Қазақстан Республикасы білім және ғылым министрлігі
Қарағанды техникалық университеті

І-Бөлім.Сызықтық алгебраның элементтері

«Жоғары математика» кафедрасы
Авторы: доцент қ.а , т.ғ.к Шаихова Г.С

Дәріс жоспары:

1. Теңдеулер жүйесінің түрлері
2. Теңдеулер жүйесін шешу әдістері.
3.Теңдеулер жүйесін матрицалық әдіспен шешу

СЫЗЫҚТЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

түріндегі жүйені m теңдеуден n белгісізден құралған сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесі деп атайды. Мұндағы $a_{ij}, i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ саны жүйенің *коэффициенттері*, b_i – бос мүшелер, x_n – белгісіздер деп аталады.

Енді осы жүйені матрицалар түрінде жазайық:

A арқылыжүйедегі белгісіздердің коэффициентерінен құралған nхm өлшемді матрицаны, B арқылы бос мүшелер тік жол матрица, X арқылы белгісіздер тік жолын белгілейік:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ - оны *негізгі матрицасы дер атайды*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ - x_j белгісіздерінен құралған тік жол матрица.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ - b_i бос мүшелерден құралған тік жол матрица.

A *және* X матрицаларының көбейтінділері анықталған, себебі A матрицасының тік жолдар саны X матрицасының жатық жолдар санына тең болып тұр.

Сонда теңдеулер жүйесін қысқаша:

$$A \cdot X = B$$

түрінде жазуға болады.

Анықтауышы $\Delta \neq 0$ жағдайындағы жүйенің шешулерін табамыз. $A \cdot X = B$ теңдеуінің екі жағынан A^{-1} матрицасына көбейтеміз, сонда $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ теңдеуін аламыз. $A^{-1} \cdot A = E$ және $E \cdot X = X$ болғандықтан

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (1)$$

(1) теңдеуі берілген *жүйенің шешуі* болады.Сызықтық теңдеулер жүйесін (1) формула арқылы шешу процесі- матрицалық әдіс деп аталады.

$X = A^{-1} \cdot B$ формуласын ашып жазайық:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

яғни,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Матрицалардың теңдігінің анықтамасын пайдаланамыз:

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

екендігі шығады. Бірақ $A_{11}\cdot b_1 + A_{21}\cdot b_2 + \cdots + A_{n1}\cdot b_n$ өрнегі анықтауышты бірінші тік жол элементі бойынша жіктелуі болып келеді.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Δ_2 Δ_2

Δ_1 анықтауышы Δ анықтауышының бірінші тік жол элементтері коэффициенттерін бос мүше тік жол коэффициенттерімен ауыстырғаннан алынды. Осылайша,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Тура осылайша, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, мұнда Δ_1 анықтауышы Δ анықтауышының

екінші тік жол элементтерінің коэффициенттерін бос мүше тік жол коэффициенттерімен ауыстырғанда шықты:

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = \overline{1,n} \qquad (2)$$

формулалары *Крамер формулалары* деп аталады. Демек, ерекше емес *n* белгісізді *m* сызықтық теңдеулер жүйесінің бір ғана жалғыз шешімі болады, ол (1) матрицалық әдіспен (2) Крамер формуласы арқылы анықталады.

Анықтама.Сызықытқ теңдеулер жүйесінің *кеңейтілген матрицасы деп жүйенің A матрицасының оң жағынан бос мүшелер бағанасын тіркеп жазу арқылы алынған келесі* $\overline{A}$ матрицасын айтады:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

1-мысал. Теңдеулер жүйесін Крамер формулалары көмегімен шешіңіздер:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ x + 5y - 4z + 5 = 0, \\ 4x + y - 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

Ол үшін матрицаның анықтауыштарын құрып және оны есептейік:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -30 + 48 + 1 - 20 - 9 + 8 = -2,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -30 - 48 - 5 + 20 + 45 + 8 = -10,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 30 - 32 - 4 + 20 + 6 - 32 = -12,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -40 + 60 + 2 - 40 - 12 + 10 = -20,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-10}{-2} = 5, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-12}{-2} = 6, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-20}{-2} = 10.$$

Тексереміз: $$\begin{cases} 2 \cdot 5 - 3 \cdot 6 + 10 - 2 = 0, \\ 5 + 5 \cdot 6 - 4 \cdot 10 + 5 = 0, \\ 4 \cdot 5 + 6 - 3 \cdot 10 + 4 = 0. \end{cases}$$

2-мысал. Теңдеулер жүйесін кері матрицаның көмегімен шешіңіздер:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 2 = 0, \\ x + 5y - 4z + 5 = 0, \\ 4x + y - 3z + 4 = 0. \end{cases}$$

Ол үшін матрицаның анықтауыштарын құрамыз және оны есептейміз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -30 + 48 + 1 - 20 - 9 + 8 = -2,$$

Теңдеулер жүйесі матрицалық түрде төмендегідей жазылады:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Сонда теңдеулер жүйесінің шешімі матрица түрінде былай жазылады:

$A \cdot X = B$. Осы теңдеудің екі жағын A^{-1} кері матрицасына көбейтетін болсақ,

алатынымыз: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$ $A \cdot A^{-1} = E$ болғандықтан, $X = A^{-1} \cdot B$ теңдеуі

берілген теңдеулер жүйесінің шешуі болады.

$$A_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{21} = -M_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{12} = -M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{32} = -M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -19, \quad A_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 13.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -11 & -8 & 7 \\ -13 & -10 & 9 \\ -19 & -14 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -22+40-28 \\ -26+50-36 \\ -38+70-52 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -10 \\ -12 \\ -20 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$x = 5,$

$y = 6,$

$z = 10.$

Мысал. Теңдеулер жүйесін шешу керек $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7, \\ 4x_1 - 5x_2 = 40. \end{cases}$

Шешуі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23 \neq 0, \qquad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 40 & -5 \end{vmatrix} = -35 - 80 = -115.$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 40 \end{vmatrix} = 120 - 28 = 92$$

$$x_1 = \frac{-115}{-23} = 5, \; x_2 = \frac{92}{-23} = -4$$

Анықтама 1. Егер жүйенің ең болмағанда бір шешімі бар болса, онда ол ***үйлесімді жүйе*** деп аталады, ал бірде-бір шешімі болмаса, онда ол ***үйлесімсіз жүйе*** деп аталады.

Анықтама 2. Егер жүйенің бір ғана жалғыз шешімі болса, онда ол *анықталған үйлесімді теңдеулер жүйесі* деп аталады.

Анықтама 3. Егер жүйенің бірден көп шешімі бар болса, онда жүйе *анықталмаған үйлесімді теңдеулер жүйесі* деп аталады.

Анықтама 4. Анықталмаған үйлесімді теңдеулер жүйесінің шешімдерінің әрқайсысы жүйенің *дербес шешімі* деп аталады. Дербес шешімдер жиынтығы *жалпы шешімі* деп аталады.

1-мысал. Теңдеулер жүйесін шешіңіздер: $\begin{cases} x+2y+3z=4, \\ 2x+4y+6z=3, \\ 3x+y-z=1. \end{cases}$

Матрицаның анықтауыштарын есептейік:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4+36+6-36-6+4=0,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -16+12+9-12+6-24=-25 \neq 0,$$

Берілген теңдеулер жүйесі шешуі жоқ, демек жүйе үйлесімсіз болады.

Кронекер – Капелли теоремасы

n белгісізді m сызықтық теңдеулер жүйесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

берілсін. Бұл жүйенің үйлесімділігін анықтау сұрағына Кронекер – Капелли теоремасы жауап береді.

1-теорема. Егер берілген жүйенің кеңейтілген матрицасының рангісі оның негізгі матрицасының рангісіне тең болғанда ғана , жүйе үйлесімді болады.

2-теорема. Егер үйлесімді жүйенің рангісі белгісіздер санына тең болса, онда жүйенің бір ғана жалғыз шешімі болады.

3-теорема. Егер үйлесімді жүйенің рангісі белгісіздер санынан кем болса, онда жүйенің шексіз көп шешімі болады.

Біртектес сызықтық теңдеулер жүйесі

Анықтама. Бос мүшелері нөлге тең жүйені біртекті, ал бос мүшелерінің ең болмағанда біреуі нөл емес жүйені біртекті емес деп атайды.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

оның матрицалық түрі $AX=0$, (0-нөл тік жол).

Біртекті жүйе- үйлесімді, өйткені $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$

Біртектес сызықтық теңдеулер жүйенің қандай шарттарда нөлдік емес шешімі болады?

1-теорема. Біртектес сызықтық теңдеулер жүйесінің нөлдік емес шешімі болуы үшін, оның негізгі матрицасының r рангісі n белгісіздер санынан кем болуы қажетті және жеткілікті, яғни $r<n$.

Мысал-1. Біртекті теңдеулер жүйесін шешіңіздер:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ x + y - z = 0. \end{cases}$$

Матрицаның анықтауыштарын есептейік:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 6 - 2 - 1 - 9 + 4 = 1 \neq 0,$$

Берілген теңдеулер жүйесінің бір ғана $x=0, y=0, z=0$ шешуі болады.

Мысал-2.Теңдеулер жүйесін шешіңіздер:

$$\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ 2x-y+3z=0, \\ x+3y-4z=0. \end{cases}$$

Матрицаның анықтауыштарын есептейік:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 12+6-6-1+16-27=0,$$

$\Delta = 0$ болғандықтан жүенің кез келген екі теңдеуін алып шешеміз:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0, \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0. \end{cases}$$

$$x=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} t, \qquad y=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} t, \qquad z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} t. \ (*)$$

Берілген теңдеулер жүйесінің алғашқы екі теңдеуін алып (*) формулалары арқылы теңдеулер жүйесінің шешуін табамыз:

$$\begin{cases} 3x+2y-z=0, \\ 2x-y+3z=0. \end{cases}$$

$$x=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} t=(6-1)t=5t, \qquad y=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} t=-11t, \qquad z=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} t=-7t.$$

Берілген теңдеулер жүйесінің шексіз көп шешуі болады: $x=5t, y=-11t, z=-7t$

БАҚЫЛАУ СҰРАҚТАРЫ

1. *Сызықтық теңдеулер жүйесінің түрлері.*
2. *Сызықтық теңдеулер жүйесінің қандай шешу әдістерін білесіз?*

3. Сызықтық теңдеулер жүйесі матрицалық түрде қалай жазылады?

4.Крамер формулаларын жазыңыз.

5. Кронекер-Капелли теоремасын тұжырымдаңыз.

ҰСЫНЫЛАТЫН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. -М., 2004.
2. Рябушко А.П. Жоғары математикадан жеке тапсырмалар: 1,2,3 бөлімдер.-Қарағанды, 2011.
3. Письменный Д.Т. Жоғары математикадан дәрістер жинағы: Толық курс. - М.: Қарағанды, 2012. - 524б.
4. Тутанов С.Қ., Шаихова Г.С.Жоғары математика 1,2 -бөлім. -Қарағанды, 2011.
5. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика есептерінің жинағы. -Алматы, 2008. -392 б.
6. Қажыкенова с.Ш, Пак Ю.Н, Шаихова Г.С. Жоғары математика курсы. - Қарағанды, 2020. - 290б.
7. Дүйсек Қ.Е., Қасымбек Е.Ә. Жоғары математика. - Алматы, 2008.
8. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 1. Оқулық. - Алматы. 2007ж. - 280б.
9. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 2. Оқулық. Алматы. 2007ж.