Қазақстан Республикасы білім және ғылым министрлігі
Қарағанды техникалық университеті

Жазықтықтағы аналитикалық геометрия

«Жоғары математика» кафедрасы
Авторы: доцент, т.ғ.к Шаихова Г.С

***Дәріс тақырыбы*:**

Жазықтықтағы координаталар жүйесі. Түзудің теңдеулерінің түрлері

Дәріс жоспары:

1. *Екі нүктенің арақашықтығын анықтау*
2. *Бұрыштық коэффициентпен берілген түзудің теңдеуі*
3. *Түзудің жалпы теңдеуі*
4. *Белгілі бағытпен берілген нүктеден өтетін түзудің теңдеуі*
5. *Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі*
6. *Түзудің нормаль теңдеуі*
7. *Екі түзудің арасындағы бұрыш. Екі түзудің параллельдік және перпендикулярлық шарттары*
8. *Нүктеден түзуге дейінге қашықтық*

Жазықтықтағы нүктелердің орналасуын сандық тұрғыдан суреттеу ұғымын **координаталар жүйесі** деп түсінуге болады. Мұндай жүйелердің бірі **тікбұрышты** координаталар жүйесі қарастырылады

Тікбұрышты координаталар жүйесі өзара перпендикуляр екі түзу – өстермен беріледі, олардың әрқайсысы оң бағытымен алынады және масштаб бірліктері бірдей кесінділерімен беріледі. Бұл өстерді координаталар өсі деп, ал олардың қиылысуы нүктесін O - координаталар басы деп аталады. Өстердің біреуін – абсцисса өсі (Ox өсі), ал екіншісін – ордината өсі (Oy өсі) деп аталады.

Суретте көлденең орналасқан абсцисса өсінің бағыты, солдан оңға қарай, ал тік орналасқан ордината өсінің бағыты төменнен жоғары қарай бағытталған. Жазықтық координаталар өстерін төрт облысқа бөледі – олар ширектер деп аталады (квадранттар деп те аталады).

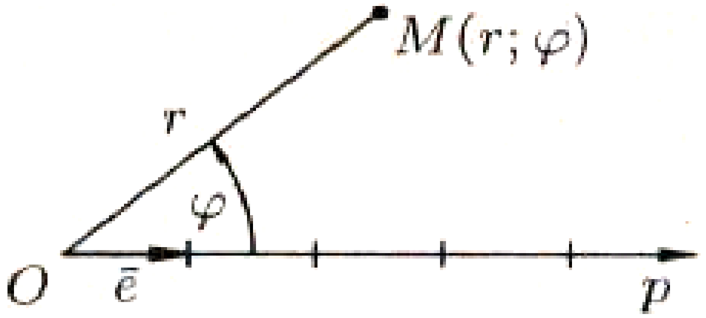
Өстердің бірлік векторларын $\bar{i}$ және $\bar{j}$ деп белгілейді $\left(|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1, \bar{i} \perp \bar{j}\right)$.
Координаталар жүйесін Oxy деп белгілейді, ал координаталар жүйесінде орналасқан жазықтықты координаталар жазықтығы деп атайды.
Oxy жазықтығында М нүктесін қарастырайық.

М нүктесінің координаталары $M(x, y)$ деп жазылады. Мұнда *x*-саны М нүктесінің **абсцисса**, ал *y*-саны М нүктесінің **ординатасы** болады.

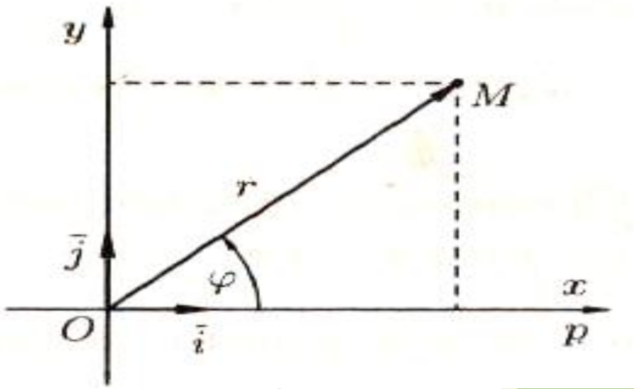
Бұл екі *x* және *y* сандары М нүктесінің жазықтықтағы орналасуын анықтайды. *x* және *y* –тің әрбір қос сан сандар мәніне бір ғана М нүктесі сәйкес келеді. Координаталар жүйесінде аса маңызды орын алатын жүйе полярлық координаталар жүйесі.

Полюс деп аталатын О нүктесі, полярлық өсі деп аталатын ОР сәулесі және ОР сәулесінің бағытымен бірдей $\overline{e}$ бірлік векторы полярлық координаталар жүйесін құрайды.

Жазықтықтан О нүктесімен сәйкес келмейтін М нүктесін алайық. М нүктесі екі сан: О полюсімен осы нүктеге дейінгі r қашықтығы $\overline{OM}$ кесіндісі мен полярлық өсі арасындағы φ бұрышы арқылы анықталады.



1-сурет



2-сурет

r және φ сандары М нүктесінің координаталары деп аталады, *r* - полярлық радиусы, φ- полярлық бұрышы деп аталады. Жазықтықтағы барлық нүктелерді анықтау үшін φ - полярлық бұрышы $(-\pi;\pi]$ (немесе $0 \le \varphi \le 2\pi$) аралығында шектеліп, ал полярлық радиус $-[0,\infty)$ аралығында өзгереді. Бұл жағдайда жазықтықтағы әрбір нүктеге *r* және φ сандарының бір қос саны сәйкес келеді және керісінше болар.

Полярлық және тікбұрышты ккоринаталар жүйесін байланыстыруға болады. Ол үшін Oxy жазықтығының *O* бас нүктесін полюспен үйлестіріп, *Ox* жарты өсін полярлық өстің бағытымен бағыттайық. *x* пен *y, M* нүктесінің тікбұрышты координаталар жүйесіндегі координаталары, ал *r* және φ-полярлық координаталары болсын.

2-суретте көрініп тұрғандай, *M* нүктесінің тікбұрышты координаталары полярлық координаталары арқылы келесі түрде өрнектеледі:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Ал *M* нүктесінің полярлық координаталары, оның декарттық координаталары мына формулалар арқылы өрнектеледі:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

φ шамасын анықтағанда (x және y таңбалары бойынша), бұрыштың жатқан ширегін анықтап, $-\pi \le \varphi \le \pi$ ескеру керек.

Жазықтықтағы координаталар әдісінің қолданылуы
Екі нүктенің арақашықтығын анықтау

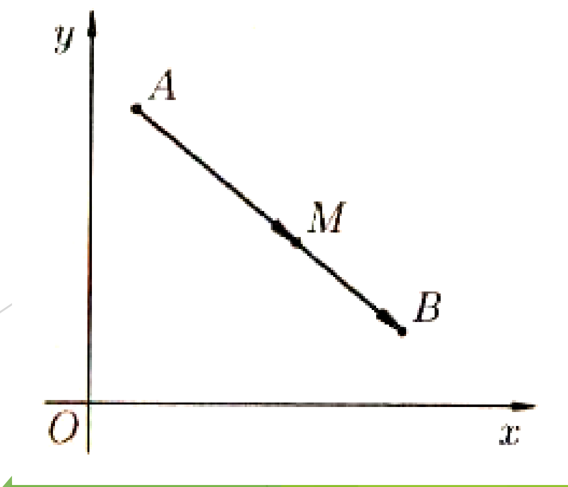
Oxy жазықтығындағы $A(x_1, y_1)$ және $B(x_2, y_2)$ нүктелерінің d арақашықтығын табу керек.

Шешуі: Іздеп отырған арақашықтық $\overline{AB}$ векторының ұзындығына тең:

$$d = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Кесіндіні берілген қатынаста бөлу

$A(x_1, y_1)$ және $B(x_2, y_2)$ нүктелерін қосатын AB кесіндісін берілген $\lambda > 0$ қатынаста бөлу қажет болсын, яғни AB кесіндісінің $M(x, y)$ нүктесінің координаталары $\frac{AM}{MB} = \lambda$ шартын қанағаттандырады (3-сурет).



3-сурет

Шешуі: $\overline{AM}$ және $\overline{MB}$ векторларын енгізейік. Егер $\overline{AM} = \lambda \cdot \overline{MB}$ болса, онда М нүктесі *AB* кесіндісін λ қатынаста бөледі. Бірақ $\overline{AM} = (x - x_1, y - y_1)$, яғни $\overline{AM} = (x - x_1)\bar{i} + (y - y_1)\bar{j}$ және $\overline{MB} = (x_2 - x)\bar{i} + (y_2 - y)\bar{j}$

теңдеуі $(x - x_1)\bar{i} + (y - y_1)\bar{j} = \lambda(x_2 - x)\bar{i} + (y_2 - y)\bar{j}$

түріне келеді.

Тең векторлардың координаталары тең болатынын ескере отырып, келесі формуланы аламыз:

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x \text{, яғни } x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad (1)$$

және

$$y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y \text{, яғни } y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \qquad (2)$$

(1) және (2) формулаларын кесіндіні берілген қатынаста бөлу формулалары деп атайды. Дербес жағдайда, $\lambda = 1$ яғни *AM=MB* болса, онда

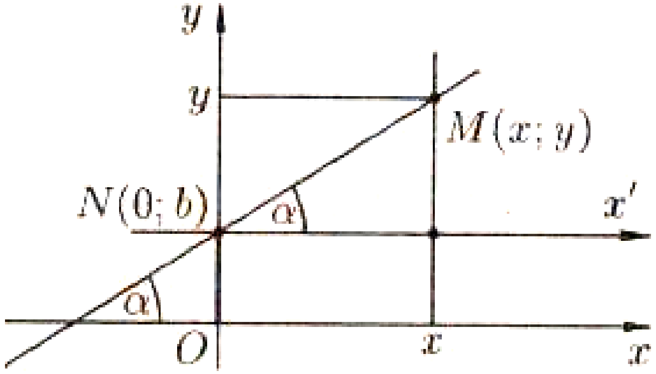
$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ түріне келеді. Бұл жағдайда М*(x; y)* нүктесі *AB* кесіндісінің ортасы болады.

Ескерту: $\lambda = 0$ болса, онда *A* және *M* нүктелері сәйкес келеді, егер $\lambda < 0$ болса, онда М нүктесі АВ кесіндісінен сыртында жатады М нүктесі *AB* кесіндісін бөледі.

($\lambda \neq -1$ болса, $\frac{AM}{MB} = -1$ тең болады, яғни *AM+MB=0*, яғни АВ=0).

Сызықтардың ішінде ең қарапайымы ол – түзу. Түзу сызықтардың тікбұрышты координаталар жүйесіндегі әртүрлі теңдеулерін қорытып шығарайық.

Бұрыштық коэффициентпен берілген түзудің теңдеуі



5-сурет

Oxy жазықтығында Oy өсіне параллель емес кез келген түзу берілсін. Бұл түзу b ордината өсінің бойынан b кесіндісін қиып өтіп, Ox өсінің оң бағытымен α бұрышын жасасын (5-сурет). Түзу бойынан кез келген $M(x;\ y)$ нүктесін аламыз.

N нүктесі арқылы Ox осіне параллель Nx' өсін жүргіземіз. Nx' өсі мен түзудің арасындағы бұрышы $\alpha -$ ға тең. Сонда M нүктесінің координаталары x және $y-b$ тең. Тангенс бұрышының анықтамасынан: $tg\alpha = \dfrac{y-b}{x}$ аламыз, яғни

$y = tg\alpha \cdot x + b$. $tg\alpha = k$ деп белгілесек, онда

$$y = kx + b \qquad (3)$$

теңдеуін аламыз, ол түзуде жататын кез келген $M(x;\ y)$ нүктесінің координаталарын қанағаттандырады. Түзуден тыс жатқан кез келген $P(x, y)$ нүктесін (3) теңдеуі қанағаттандырмайды

$k = tg\alpha$ саны түзудің *бұрыштық коэффициенті*, ал (3) теңдеуі *бұрыштық коэффициентімен берілген түзудің теңдеуі* деп аталады.

Егер түзу координаталар басы арқылы өтсе, онда $b = 0$ болады, демек, бұл түзудің теңдеуі $y = kx$ түрінде болады.

Егер түзу Ox өсіне параллель болса, онда $\alpha = 0$ болады, демек, $k = tg\alpha = 0$ (3) Теңдеуі $y = b$ түріне келеді.

Түзудің жалпы теңдеуі

x пен *y*-ке қатысты бірінші дәрежелі түзудің теңдеуін қарастырайық.

$$Ax + By + C = 0 \qquad (4)$$

мұндағы A, B, C – тұрақты шамалар, *A* және *B* бірдей нөлге тең болмайды.
(4) теңдеуі түзу сызықтың теңдеуі екенін көрсетейік. Екі жағдайын қарастырамыз.

Егер $B = 0$ болса, онда (4) теңдеуі $Ax + C = 0$ түріне келеді. $A \neq 0$, яғни $x = -\frac{C}{A}$
Бұл теңдеуі Oy өсіне параллель түзудің теңдеуі және ол $\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ нүктесі арқылы өтеді.

Егер $B \neq 0$ болса, онда (4) теңдеуінен $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ теңдеуін аламыз. Бұл теңдеу бұрыштық коэффициентімен берілген түзудің теңдеуі, мұнда $\kappa = tg\alpha = -\frac{A}{B}$
Демек, (4) теңдеуі түзу сызықтың теңдеуі, ол түзудің жалпы теңдеуі деп аталады.

Жалпы түзудің теңдеуінің кейбір дербес жағдайлары:

1. Егер $A = 0$ болса, онда теңдеу $y = -\frac{C}{B}$ түріне келеді. Бұл Ох өсіне параллель түзудің теңдеуі;

2. Егер $B = 0$ болса, онда түзу Оу өсіне параллель;

3. Егер $C = 0$ болса, онда теңдеу $Ax + By = 0$ болады. Бұл теңдеу $O(0;0)$ нүктесінің координаталарын қанағаттандырады, демек, ол координаталар басы арқылы өтеді.

Белгілі бағытпен берілген нүктеден өтетін түзудің теңдеуі

Түзу берілген $M(x_0; y_0)$ нүктесі арқылы өтеді және оның бағыты k бұрыштық коэффициентімен сипатталады. Бұл түзудің теңдеуін $y = kx + b$ түрінде жазуға болады, мұндағы b – әзірше белгісіз шама. Түзу $M(x_0; y_0)$ нүктесі арқылы өтетіндіктен, нүктенің координаталары түзудің теңдеуін қанағаттандырады:

$y_0 = kx_0 + b_0$ бұл теңдеуден $b = y_0 - kx_0$ b-мәнін $y = kx + b$ теңдеуіне апарып қойсақ,

онда іздеп отырған $y_0 = kx + y_0 - kx_0$ теңдеуін аламыз, яғни

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (5)$$

(5) теңдеуі белгілі бағытпен берілген $M(x_0; y_0)$ нүктесінен өтетін түзудің теңдеуі деп аталады.

Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі

Түзу $M_1(x_1;y_1)$ және $M_2(x_2;y_2)$ нүктелері арқылы өтеді. Бағыты белгілі $M_1(x_1;y_1)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуі

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad \textbf{(6)}$$

Мұндағы, k - әзірше белгісіз коэффициент. Түзу $M_2(x_2;y_2)$ нүктесі арқылы өтетін болғандықтан, бұл нүктенің координаталары (6) теңдеуін қанағаттандыруы керек. Сондықтан,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

Енді осы теңдеуден $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ бұрыштың коэффициентін табамыз. Енді k мәнін (6) теңдеуіне қойып, M_1 және M_2 нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін аламыз

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (7)$$

Мұндағы $x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2$

Егер $x_1 = x_2$ болса, онда $M_1(x_1; y_1)$ және $M_2(x_2; y_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуі ордината өсіне параллель. Оның теңдеуі $x = x_1$

Егер $y_1 = y_2$ болса, онда теңдеу $y = y_1$ түріне келеді. M_1M_2 түзуі абсцисса өсіне параллель орналасады.

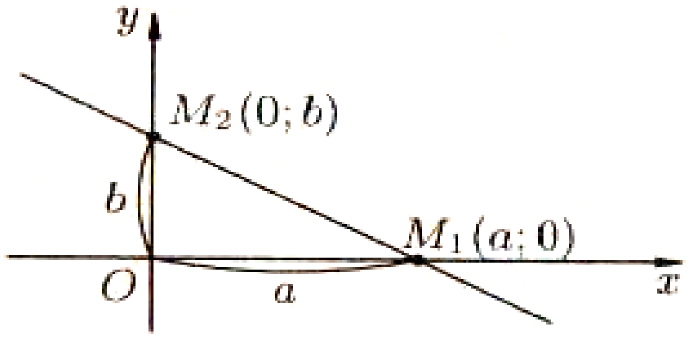
Кесінділер арқылы берілген түзудің теңдеуі

Түзу Ox осін $M_1(a;0)$, ал Oy осін $M_2(0;b)$ нүктелерінде қиып өтсін. Бұл жағдайда (7) теңдеуі

$$\frac{y-0}{b-0} = \frac{x-a}{0-a}, \text{ яғни } \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

түріне келеді.

Бұл теңдеу кесінділерімен берілген түзудің теңдеуі деп аталады. a Және b сандары координаталар өстерін қиятын кесінділер шамасы.



6-сурет

Берілген $M_0(x_0;y_0)$ нүктесі арқылы өтетін, берілген нөлдік емес $\bar{n}=(A;B)$ векторына перпендикуляр түзудің теңдеуін табайық.

Түзудің бойынан $M(x;y)$ нүктесін алайық және $\overline{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0\}$ векторын қарастырайық. $\overline{n}$ және $\overline{M_0M}$ векторлары перпендикуляр болғандықтан, олардың скалярлық көбейтінділері нөлге тең, яғни

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad (8)$$

(8) теңдеуі берілген нүкте арқылы өтетін, берілген векторға перпендикуляр түзудің теңдеуі деп аталады.

Түзудің нормаль теңдеуі

Координаталар бас нүктесінен түзуге перпендикуляр түсірейік. Оның ұзындығы *p*-*ға*, абсцисса өсінің оң бағытымен жасайтын бұрышы α тең болсын. Перпендикулярдың бағытын анықтайтын бірлік векторды $\overline{n^0}$ деп белгілейік. Сонда іздеп отырған түзудің теңдеуін бойынан кез келген жылжымалы $M(x;y)$ нүктесін алайық, онда $np_{\overline{n^0}}\overline{OM}=p$ болады. Ал екі вектордың скалярлық көбейтіндісінің анықтамасы бойынша $np_{\overline{n^0}}\overline{OM}=\overline{OM}\cdot\overline{n^0}$ болады. Олай болса $\overline{OM}\cdot\overline{n^0}=p$. Онда осы соңғы теңдеуге $\overline{OM}(x;y)$ және $\overline{n^0}(\cos\alpha;\sin\alpha)$ векторларының проекцияларын қойсақ, төмендегі теңдеуді аламыз:

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \qquad (10)$$

(10) теңдеуі түзудің *нормаль теңдеуі* деп аталады.

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

λ- көбейткіші *нормаль көбейткіш* деп аталады. Нормаль көбейткіштің таңбасын

$\lambda C = -p$ теңдігі бойынша аламыз, яғни нормаль көбейткіштің таңбасы әрқашанда

түзудің жалпы теңдеуіндегі *C* бос мүшесінің таңбасына қарама-қарсы болады.

Мысал. $-3x + 4y + 15 = 0$ теңдеуін нормаль түрге келтіру керек.

Шешуі. $\lambda = \frac{1}{-\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}$ нормаль көбейткішін табайық. Берілген теңдеуді

λ –ға көбейтіп, іздеп отырған теңдеуді аламыз: $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$

Екі түзудің арасындағы бұрыш. Екі түзудің параллельдік және перпендикулярлық шарттары

L_1 және L_2 түзулері $y = k_1 x + b_1$ және $y = k_2 x + b_2$ теңдеулерімен берілсін.

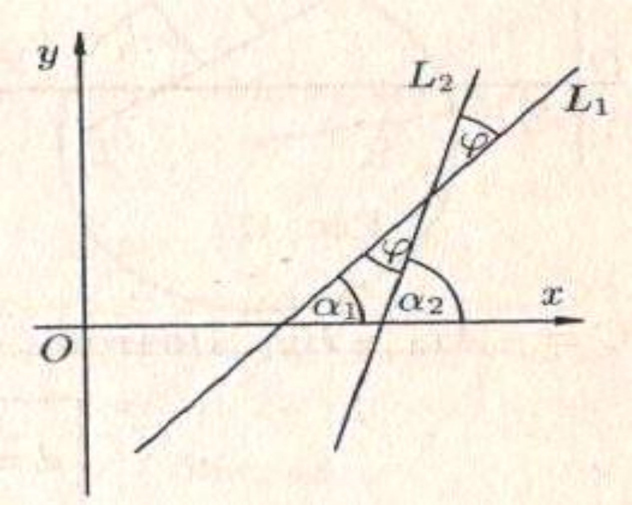
L_1 және L_2 түзулерінің арасындағы бұрышты табу керек.

Шешуі. $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ (үшбұрыштың ішкі бұрыштары туралы теорема) немесе

$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$

Егер $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ болса, онда

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$$



8-сурет

Бірақ $tg\alpha_1 = k_1, tg\alpha_2 = k_2$ сондықтан

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (11)$$

бұл теңдеуден іздеп отырған бұрыш шамасын анықтауға болады. Егер екі түзудің арасындағы сүйір бұрышты есептеу керек болса, онда (11) теңдеуі модулі бойынша алынады, яғни

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$$

Егер L_1 және L_2 түзулері параллель болса, онда $\varphi = 0$ және $tg\varphi = 0$.

Онда (11) теңдеуден $k_2 - k_1 = 0$ шығады, яғни $k_2 = k_1$ және керісінше, егер L_1 және L_2 түзулерінде $k_2 = k_1$ болса, онда $tg\varphi = 0$ яғни түзулер параллель болады.

Демек, екі түзудің параллельдік болу шарты ол-түзудің бұрыштық коэффициенттері тең болуы керек: $k_2 = k_1$

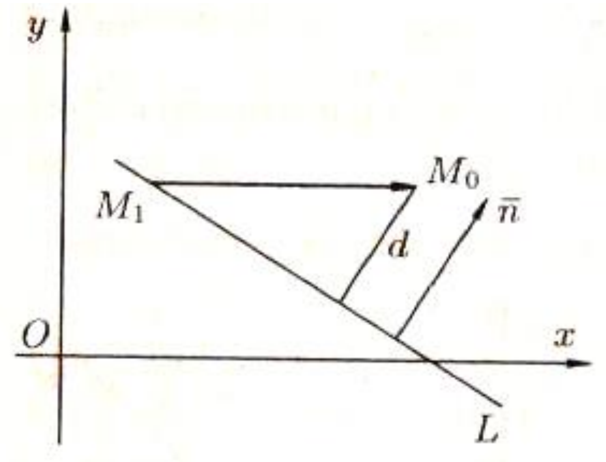
Егер L_1 және L_2 түзулері түзулері перпендикуляр болса, онда $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Демек, $ctg\varphi = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0$, бұдан $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$, яғни $k_1 \cdot k_2 = -1$ немесе $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Керісінше ұйғарымда дұрыс болады. Осылайша, екі түзудің перпендикулярлық шарты $k_1 \cdot k_2 = -1$ теңдігі болып табылады.

Нүктеден түзуге дейінге қашықтық

M_0 нүктесі және L түзуі $Ax+By+C=0$ теңдеуімен берілсін. M_0 нүктесінен L түзуіне дейінгі арақашықтықты табу керек болсын.



9-сурет

Шешуі: M_0 нүктесінен L түзуіне дейінгі d – арақашықтық $\overline{M_1M_0}$ векторының $\bar{n}=(A;B)$ нормаль векторына түсірілген проекцияның ұзындығына тең, мұндағы $M_1(x_1;y_1)$ - α түзуінің бойындағы кез келген нүкте. Демек,

$$d=\left|\text{пр}_{\bar{n}}\overline{M_1M_0}\right|=\left|\frac{\overline{M_1M_0}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}\right|=\frac{|(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0-Ax_1-By_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$M_1(x_1;y_1)$ нүктесі L түзуінде жатқандықтан $Ax_1+By_1+C=0$ болады, яғни $C=-Ax_1-By_1$ Сондықтан

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (12)$$

Мысал. $M_0(2;-1)$ нүктесінен $3x+4y-22=0$ түзуіне дейінгі қашықтықты табу керек.

Шешуі. (12) формуласы бойынша $$d=\frac{|3\cdot 2+4\cdot(-1)-22|}{\sqrt{9+16}}=\frac{20}{5}=4$$

Бақылау сұрақтары:

1. *Екі нүктенің арақашықтығын анықтау*
2. *Бұрыштық коэффициентпен берілген түзудің теңдеуі*
3. *Түзудің жалпы теңдеуі*
4. *Белгілі бағытпен берілген нүктеден өтетін түзудің теңдеуі*
5. *Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі*
6. *Түзудің нормаль теңдеуі*
7. *Екі түзудің арасындағы бұрыш. Екі түзудің параллельдік және перпендикулярлық шарттары*
8. *Нүктеден түзуге дейінге қашықтық*

Ұсынылатын әдебиеттер тізімі:

1. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. -М., 2004.
2. Рябушко А.П. Жоғары математикадан жеке тапсырмалар: 1,2,3 бөлімдер.- Қарағанды, 2011.
3. Письменный Д.Т. Жоғары математикадан дәрістер жинағы: Толық курс. - М.: Қарағанды, 2012. - 524б.
4. Тутанов С.Қ., Шаихова Г.С.Жоғары математика 1,2 -бөлім. -Қарағанды, 2011.
5. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика есептерінің жинағы. -Алматы, 2008. -392 б.
6. Қажыкенова с.Ш, Пак Ю.Н, Шаихова Г.С. Жоғары математика курсы. - Қарағанды, 2020. - 290б.
7. Шаихова Г.С. Аналитикалық геометрия курсы. - Қарағанды, 2010. -98б.
8. Дүйсек Қ.Е., Қасымбек Е.Ә. Жоғары математика. - Алматы, 2008.
9. К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. Сборник задач по высшей математике. АЙРИС ПРЕСС. - Москва, 2004.- 57 с.
10. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 1. Оқулық. - Алматы. 2007ж. - 280б.
11. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 2. Оқулық. Алматы. 2007ж.

Назарларыңызға рахмет!

Назарларыңызға рахмет!