Қазақстан Республикасы білім және ғылым министрлігі
Қарағанды техникалық университеті

Математикалық анализге кіріспе

«Жоғары математика» кафедрасы
Авторы: доцент қ.а, т.ғ.к Шаихова Г.С

Дәріс тақырыбы:
Бірінші және екінші тамаша шектер.
Шексіз аз шамаларды салыстыру

Дәріс жоспары:

1.Бірінші және екінші тамаша шектер
2.Шексіз аз шамаларды салыстыру

Бірінші тамаша шек

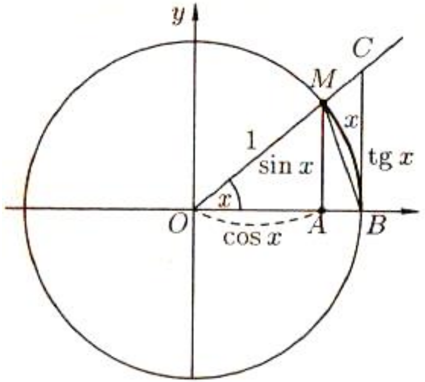
Көп жағдайда өрнегі тригонометриялық функциядан құралған шекті есептегенде келесі формула жиі қолданылады.

1-теорема. $\sin x$ функциясының x-ке қатынасының $x \to 0$ ұмтылғандағы шегі 1-ге тең:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (1)$$

Радиусы 1-ге тең шеңбер алайық, MOB бұрышының

радиандық өлшемін *x* арқылы белгілейік (1-сурет).



$0 < x < \frac{\pi}{2}$ болсын. Суретте $|AM| = \sin x$, $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ және

$\lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$ болғандықтан, шектің бар болу (аралық

функция шегі туралы) белгісі бойынша:

(2)

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x>0)}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(1 - сурет)

Егер $x < 0$ болсын. Сонда $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{(-x)}$, мұндағы $-x > 0$. Сондықтан:

Сондықтан:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ (x<0)}} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (3)$$

(2) мен (3) теңдеуінен (1) теңдігі шығады.

Есептерді шығару барысында бізге қажет болатын бірнеше шектерді

қарастырайық:

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1, \quad 2)\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k, \quad 3)\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}=\frac{\alpha}{\beta}, \quad 4)\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1,$$

$1)\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1,$ формуласын дәлелдеу үшін tgx- ті түрлендіріп, өрнекті 1- ші

тамаша шекке келтіреміз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k,$ дәлелдеу үшін бөлшектің алымы мен бөлімін санына көбейтіп, 1-ші тамаша шекті аламыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{k\cdot\sin kx}{k\cdot x}=k\lim_{x\to 0}\frac{\sin(kx)}{(kx)}=k\cdot 1=k\underline{k.}$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$, екенін дәлелдейік, ол үшін өрнекті түрлендіріп,

(3) - формуланың дәлелдемесін аламыз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\dfrac{\sin\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\beta x}{\beta x}}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{\beta}.$$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgx}{x}=1$ формуласын дәлелдейік, ол үшін бөлшектің алымын $arctgx=t$ деп алсақ, $x=tgt$ болады және $x\to 0$ болғанда, $t\to 0$ аламыз. Сонда :

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{tgt}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\frac{\cos t}{1}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\lim_{t\to 0}\cos t=1\cdot 1=1.$$

Бұл қарастырылып отырған мысалдар тамаша шектің салдары болады.

1-мысал: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ шегін табу керек. Бұл функцияның шегін әртүрлі әдістермен табуға болады. Екі әдісін қарастырайық.

Бірінші әдіс. Берілген өрнекті түрлендірсек $\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{5x}{\sin 5x}$, сонда:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\right)=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}=\frac{3}{5}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{5}$$

2-мысал: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{x}$ есептеңіз:

Шешуі: $$\lim_{x\to 0}\frac{tg5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 5x}=5\cdot\frac{1}{1}=5.$$

$x \to +\infty$

Екінші тамаша шек

$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n \in N,$ сандық тізбегінің шегі *e*-ге тең :

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (4)$$

$x \to \infty$, болғанда $x_n = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, $x \in R$ функциясында *e* санына ұмтылатынын дәлелдейік:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \qquad (5)$$

1. $x \to +\infty$ болсын *x-тің* әрбір мәні екі оң санның арасында орналасады: $n \le x < n+1$, мұндағы $n = [x] - x$ санының бүтін бөлігі. Бұдан $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n}$,

$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{x} \le \frac{1}{n}+1$, сондықтан

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Егер $x \to +\infty$, онда $n \to \infty$. Сондықтан, (4) бойынша

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e$$

Шектердің бар болуы белгісі бойынша

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad (6)$$

2. $x \to -\infty$ болсын. $-x = t$ белгілеуін енгізейік. Сонда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \times$$

$$\times \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{1} = e\cdot 1 = e \qquad (7)$$

(6), (7) теңдіктерінен (5) теңдігі шығады. Егер (5) теңдеуінде $\frac{1}{x} = \alpha$ деп алсақ ($x \to \infty$ болғанда, $\alpha \to 0$ болады) ол теңдікті

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \qquad (8)$$

деп жазуға болады.

Есептерді шығару барысында бізге қажет болатын бірнеше шектерді қарастырайық:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e, \quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x} = \mu.$$

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e,$ тепе-теңдігінің оң жағындағы логарифм астында тұрған өрнек $x\to 0$ ұмтылғанда e санына ұмтылады, олай болса бұл өрнектің логарифмі $\log_a e-$ге ұмтылады.

Дербес жағдайда, дәлелденген формуланың $(a=e)$ натурал логарифм үшін келтірейік:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\lim_{x\to 0}\ln(1+x)=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,$ формуласына көңіл аудара отырып, $a^x-1=t$ деп алсақ, онда $x\to 0$ ұмтылғанда, $t\to 0$ ұмтылады.

Сонда $x=\log_a(1+t)$ болады, енді дәлелденген нәтижені алып пайдаланатын болсақ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a$$

шығады, формула дәлелденді.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu.$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu.$ формуласын дәлелдеу үшін, бөлшектің алымындағы $(1+x)^{\mu}-1=t$ деп алсақ, онда $x\to 0$ ұмтылғанда $t\to 0$ұмтылады. $(1+x)^{\mu}=t+1$ теңдігінің екі жағын логарифмдасақ, $\mu\cdot\ln(1+x)=\ln(1+t)$ теңдігі шығады. Осы қатынасты қолданып берілген өрнекті келесі түрде түрлендіреміз:

$$\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\frac{t}{x}=\frac{t}{\ln(1+t)}\cdot\mu\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Сонда дәлелдегеніміз бойынша,

$$\frac{t}{\ln(1+t)} \quad \text{және} \quad \frac{\ln(1+x)}{x}$$

қатынастарының екеуі де 1-ге ұмтылады, демек, көбейтіндінің барлығының шегі μ болады, яғни біз дәлелдеп отырған формула дәлелденді.

3-мысал: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+1}$ шегін табу керек. Бұл шекте $(1)^{\infty}$ анықталмағандығы. Осы анықталмағандықты ашу үшін өрнекті былайша түрлендіреміз:

$$\frac{3x+2}{3x-1}=\frac{3x-1+3}{3x-1}=1+\frac{3}{3x-1}$$

$\frac{3}{3x-1}=u$ деп белгілесек $x=\frac{1}{u}+\frac{1}{3}$ болады.

$2x+1=2\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{3}\right)+1=\frac{2}{u}+\frac{5}{3}$ $x\to\infty$ ұмтылғанда $u\to 0$ ұмтылады. Сонда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+1}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{2}{u}+\frac{5}{3}}=\lim_{u\to 0}\left((1+u)^{\frac{1}{u}}\right)^{2}\cdot(1+u)^{\frac{5}{3}}=e^{2}\cdot\sqrt[3]{1^{5}}=e^{2}$$

Эквиваленттi ақырсыз аз функциялар

Ақырсыз аз функцияларды салыстыру

Екi ақырсыз аз функцияның қосындысы, айырмасы, көбейтiндiсi ақырсыз аз функция болады. Екi ақырсыз аз функцияның қатынасы ақырсыз сан, ақырсыз үлкен функция, ақырсыз аз функция болады немесе ешқандай шекке ұмтылмауы да мүмкiн.

Екi ақырсыз аз функция олардың қатынасының көмегiмен салыстырылады.

$\alpha = \alpha(x)$ және $\beta = \beta(x)$ функциялары $x \to x_0$ болғанда, ақырсыз аз функция болсын, яғни $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ және $\lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0$

1. Егер $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$ $(A \in R)$ болса, онда α мен β - бірдей ретті ақырсыз аз деп аталады.

2. Егер $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$ болса, онда α, β - ға қарағанда жоғарғы ретті ақырсыз аз деп аталады.
3. Егер $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$ болса, онда α, β - ға қарағанда төмен ретті ақырсыз аз деп аталады.

4. Егер $\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta}$ шегі болмаса, онда α мен β салыстырылмайтын ақырсыз аз деп аталады.

Егер *α(x)* шексіз аз функциясынан кемімелі дәрежесі бойынша орналасқан көпмүшесі өзінің соңғы мүшесіне эквивалент болады.

1-мысал: *$3\alpha^5 - 2{,}7\alpha^4 + 0{,}3\alpha^2 \sim 0{,}3\alpha^2$, а $\to 0$*

ЯҒНИ $$\lim_{\alpha\to 0}\frac{3\alpha^5 - 2{,}7\alpha^4 + 0{,}3\alpha^2}{0{,}3\alpha^2} = \lim_{\alpha\to 0}\left(10\alpha^3 - 9\alpha^2 + 1\right) = 1$$

2-мысал: *$3x^5 - 2{,}7x^4 - 0{,}3x^2 \sim 3x^5$*

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^5 - 2{,}7x^4 + 3x^2}{3x^5} = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{0{,}9}{x} + \frac{0{,}1}{x^3}\right) = 1$$

3-мысал: $$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2 - 0{,}8x + 1}{8x^2 + x - 3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{8x^2} = 0{,}5$$

1-мысал: $x \to 0$ болғанда, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ болатынын көрсетейік.

Шешуі: $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ \left(\frac{x}{2}\to 0\right)}}\frac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}} = 1\cdot 1 = 1$$

2-мысал: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$ есептеңіз

Шешуі: $\arcsin x = t$ деп белгілесек. Сонда $x=\sin t$ немесе $x\to 0$ болғанда $t\to 0$
Сондықтан

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}=\frac{1}{1}=1$$

Сәйкесінше, $x\to 0$ болғанда $\arcsin x \sim x$.

3-мысал: $x\to 0$ болғанда, $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}$ болатынын көрсетейік.

Шешуі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{\frac{x}{2}\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{x}{2}\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\frac{2}{2}=1$$

Болғандықтан $x\to 0$ болғанда, $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}$

Сәйкесінше, $x \to 0$ болғанда $\arcsin x \sim x$.

Төменде шектерді есептеуде қолданатын негізгі эквивалент функциялар көрсетілген.

1. $x \to 0$ болғанда $\sin x \sim x;$
2. $x \to 0$ болғанда $tgx \sim x;$
3. $x \to 0$ болғанда $\arcsin x \sim x;$
4. $x \to 0$ болғанда $arctgx \sim x;$
5. $x \to 0$ болғанда $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2};$
6. $x \to 0$ болғанда $e^x - 1 \sim x;$
7. $x \to 0$ болғанда $a^x - 1 \sim x\ln a;$
8. $x \to 0$ болғанда $\ln(1+x) \sim x;$
9. $x \to 0$ болғанда $\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e;$
10. $x \to 0$ $(1+x)^k - 1 \sim k \cdot x, k > 0$, $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$

Бақылау сұрақтары

1. 1-ші тамаша шектің формуласын жазыңыз.
2. 2-ші тамаша шектің формуласын жазыңыз
3. 2-ші тамаша шек қандай анықталмағандықта қолданылады?
4. Шексіз аз функция деп қандай функцияны айтад?
5. Шексіз үлкен функция деп қандай функцияны айтады?
6. Эквивалент шамалар деп қандай шамаларды айтады?
7. Шексіз аз шамаларды салыстырудың белгілерін тқжырымдаңыз.

Ұсынылыатын әдебиеттер

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления.- М.: Интеграл-пресс, 2002.
2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. -М., 2004.
3. Рябушко А.П. Жоғары математикадан жеке тапсырмалар: 1,2,3 бөлімдер.- Қарағанды, 2011.
4. Письменный Д.Т. Жоғары математикадан дәрістер жинағы: Толық курс. - М.: Қарағанды, 2012. - 524б.
5. Тутанов С.Қ., Шаихова Г.С.Жоғары математика 1,2 -бөлім. -Қарағанды, 2011.
6. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика есептерінің жинағы. -Алматы, 2008. -392 б.
7. Қажыкенова с.Ш, Пак Ю.Н, Шаихова Г.С. Жоғары математика курсы. - Қарағанды, 2020. - 290б.
8. Шаихова Г.С. Аналитикалық геометрия курсы. - Қарағанды, 2010. -98б.

9. Дүйсек Қ.Е., Қасымбек Е.Ә. Жоғары математика. - Алматы, 2008.

10. К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. Сборник задач по высшей математике. АЙРИС ПРЕСС. - Москва, 2004.- 57 с.

11. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 1. Оқулық. - Алматы. 2007ж. - 280б.

12. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 2. Оқулық. Алматы. 2007ж.

Назарларыңызға рахмет!