Қазақстан Республикасы білім және ғылым министрлігі
Қарағанды техникалық университеті

Математикалық анализге кіріспе

«Жоғары математика» кафедрасы
Авторы: доцент қ.а, Шаихова Г.С

Дәріс тақырыбы: Сандар тізбегі, оның шегі. Функция, функция шегі. Шектерді есептеу.

Дәріс жоспары:

1.Сан тізбегі, оның шегі. Шектер қасиеттері.
2.Функция, оның анықталу облысы, функция шегі.
3.Анықталмағандықтарды шешу.
4.Шексіз аз шамалар

САНДАР ТІЗБЕГІ

Анықтама: $n=1,2,3,\dots$. натурал санына қандайда бір ереже бойынша сәйкес

$x_n = f(n)$ қойылса, онда $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ *сандар тізбегі* деп аталады

немесе N натурал сандар жиынында анықталған

$$x_n = f(n) \qquad (1)$$

(1) функциясын айтады.

Тізбек қысқаша $\{x_n\}$ түрінде немесе x_n , $n \in N$ түрінде белгіленеді.

$x_1 -$ саны тізбектің 1-мүшесі, x_2 –саны тізбектің 2-мүшесі,..., $x_n -$ *тізбектің жалпы мүшесі* немесе $n -$ *мүшесі* деп аталады.

Сандық тізбектің шегі

Егер $\forall \varepsilon > 0$ натурал саны үшін N саны табылып, барлық $n > N$ болғанда

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad (2)$$

теңсіздігі орындалса, a саны $\{x_n\}$ тізбегінің шегі деп аталады. Бұл жағдайда

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a$ немесе $x_n \to a$ деп жазып, $\{x_n\}$ тізбегінің (немесе x_n

айнымалысының a санына тең шегі бар (немесе $x_n \to a$ ұмтылады) деп

айтады. Сонымен қатар, $\{x_n\}$тізбегі a-ға жинақталады деп те атайды. Шек

анықтамасын қысқаша былай жазуға болады:

$$\left(\forall\varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

1-мысал. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n} = 1$ болатынын дәлелдейік.

Шешуі: анықтама бойынша егер $\forall\varepsilon > 0$ үшін барлық $n > N$ болғанда $\left|\dfrac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$ теңсіздігі, яғни $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ орындалатындай N натурал саны табылса, 1 саны $x_n = \dfrac{n-1}{n}, n \in N$ тізбегінің шегі деп аталады.

Теңсіздік барлық $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ үшін орындалады, яғни барлық $n > N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ үшін орындалады, мұндағы $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ - $\dfrac{1}{\varepsilon}$ санының бүтін бөлігі. (x-тан аспайтын ең үлкен бүтін сан - x санының бүтін бөлігі, $[x]$ арқылы белгіленеді).

Егер $\varepsilon > 1$ болса, N ретінде $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1-$ ді алуға болады.

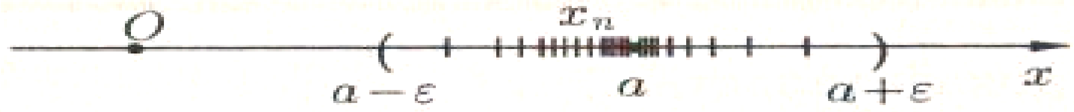
Сонымен $\forall\varepsilon > 0$ үшін сәйкес N – нің мәні көрсетілген. Бұл $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1$ екендігін дәлелдейді.

N – саны $\varepsilon -$ нан тәуелді. Егер $\varepsilon = \frac{3}{26}$ болса: $N=\left[\frac{1}{\frac{3}{26}}\right]=\left[\frac{26}{3}\right]=\left[8\frac{2}{3}\right]=8$

Егерде, $\varepsilon = 0{,}01$ болса, онда: $N=\left[\frac{1}{\frac{1}{100}}\right]=[100]=100$

Сондықтан кей жағдайда $N = N(\varepsilon)$ деп жазады.

Тізбек шегінің анықталуының геометриялық мағынасын қарастырайық. (2) теңсіздігі $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ немесе $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$ теңсіздіктеріне тепе тең. Бұлар x_n элементінің a – нүктесінің $\varepsilon-$ маңайында жатқандығын көрсетеді.



1 – сурет

Сондықтан тізбек шегінің анықтамасын геометриялық тілде келесі түрде тұжырымдауға болады:

a – нүктесінің ε – маңайында үшін x_n – нің $n > N$ болатындай барлық мәндері a – нүктесінің ε – маңайында жататындай N натурал саны табылса a саны $\{x_n\}$ *тізбегінің шегі* деп аталады (5.4-сурет).

ε аз болған сайын N саны арта түседі. Бірақ a санының ε- маңайында тізбектің шексіз аз мүшелері жатыр, ε- маңайынан тыс тізбектің ақырлы мүшелері жатуы мүмкін.

Осыдан жинақты тізбектің бір ғана шегі болатыны шығады. Шегі жоқ тізбек жинақсыз деп аталады. Мысалы, $u_n = \{2, 5, 10, \ldots, n^2 + 1, \ldots\}$ тізбегі $x_n = c, n \in N$ тұрақты тізбегінің шегі c-ға тең, яғни $\lim c = c$. Шынында, $\forall \varepsilon > 0$ барлық натурал n үшін (2) теңсіздігі орындалады, яғни $|x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$.

Теңсіздіктерде шекке көшу

$\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ тізбектерін қарастырайық.

1-теорема. Егер $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ болса және қандай да номерден бастап $x_n \le y_n$ теңсіздігі орындалса, онда $a \le b$ теңсіздігі орындалады.

2-теорема. Егер $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ теңдіктері мен $x_n \le z_n \le y_n$ (қандайда бір нөмірден бастап) теңсіздігі орынды болса, $\lim_{n\to\infty} z_n = a$ (дәлелсіз орындалады).

3-теорема. (Вейерштрасс). Кез келген монотонды шенелген тізбектің шегі бар болады.

Функцияның нүктедегі шегі

$y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің қандайда бір маңайында анықталсын.

***Анықтама.* (Коши)** Егер $\forall \varepsilon > 0$ үшін δ оң саны табылып, барлық $x_n \neq x_0$ үшін $|x - x_0| < \delta$ теңсіздігі қанағаттандыратын, $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, A саны $y = f(x)$ функцияның x_0 нүктесіндегі *шегі* деп аталып, деп белгіленеді. Бұл анықтаманы қысқаша былай жазуға болады:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

$$\varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x : \quad \underbrace{|x - x_0| < \delta, \; x \neq x_0}_{\text{немесе } 0<|x-x_0|<\delta} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

Функция шегінің геометриялық мағынасы: $|x - x_0| < \delta$ немесе $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ теңсіздігінен $|f(x) - A| < \varepsilon$ немесе $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындығынан кез келген x-тің $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалдағы мәндері $y = f(x)$ функциясының графигі $y = A + \varepsilon$, $y = A - \varepsilon$ түзулері аралығындағы $2\varepsilon -$ ға тең жолақтың ішінде орналасады.

Анықтама. Егер $\forall\varepsilon > 0$ үшін $|x| > M$ саны табылып,

$M = M(\varepsilon) > 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x мәндері үшін

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

теңсіздігі орындалса, онда A саны $x \to \infty$ ұмтылғанда $y = f(x)$

функцияның *шегі* деп аталады. Бұл анықтаманы қысқаша былай жазуға болады:

$$(\forall\varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall x : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

Бұл анықтаманың геометриялық мағынасы мынадай: $\forall\varepsilon > 0$ саны үшін $M > 0$ саны табылып, $x \in (-\infty; -M)$ немесе $x \in (M; +\infty)$ аралықтарындағы нүктеле үшін $f(x)$ функциясының сәйкес мәндері A нүктесінің $\varepsilon -$ маңайында жатады.

Егер $x \to +\infty$, онда $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ деп, егер $x \to -\infty$, онда $-A = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ деп белгіленеді.

Ақырсыз үлкен функция (а.ү.ф.)

Анықтама. Егер кез келген $M > 0$ үшін $|f(x)| > M$ табылып, $0 < |x - x_0| < \delta$

теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x)| > M$ теңсіздігі орындалса,

функциясы $y = f(x)$ ұмтылғанда *ақырсыз үлкен функция* деп атап,

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ немесе $x \to x_0$ болғандағы $f(x) \to \infty$ деп жазады. Қысқаша келесі

түрде жазылады:

$$\forall M > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x : |x - x_0| < \delta, \ x \neq x_0, \Longrightarrow |f(x)| > M \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Мысалы. $y=\dfrac{1}{x-2}$ функциясы $x\to 2$ болғандағы а.ү.ф. болып табылады.

Егер $x\to x_0$ болғанда $f(x)$ шексіздікке ұмтылса және тек оң мәндер

қабылдаса, онда $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ деп жазады, ал тек теріс мәндер қабылдаса,

онда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ деп жазады

Егер кез келген $M>0$саны үшін $N=N(M)>0$ саны табылып, $|x|>N$

теңсіздікті қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x)|>M$ теңсіздігі орындалса,

барлық сандық түзуде берілген $y=f(x)$ функциясы $x\to\infty$ болғандағы *ақырсыз үлкен функция* деп аталады. Қысқаша:

$$\forall M>0 \quad \exists N>0 \quad \forall x:|x|>N \quad \Longrightarrow \quad |f(x)|>M \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

Егер *x* аргументі шексіздікке ұмтылса және тек натурал мәндер қабылдаса,

яғни $x \in N$, онда сәйкес а.ү.ф. ақырсыз үлкен тізбекке айналады.

Мысалы: $v_n = n^2 + 1$, $n \in N$ тізбегі ақырсыз үлкен тізбек болады. Бұдан

x_0 нүктесінің маңайындағы кез келген а.ү.ф. осы маңайда шектелмеген.

Кері тұжырым дұрыс емес: шектелмеген функция а.ү.ф. болуы да мүмкін

емес (мысалы, $y = x \sin x$).

Бірақ, егер $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ мұндағы, А- нақты сан, онда $f(x)$функциясы x_0

нүктесінің маңайында шектелген.

Шынында да, функция шегі анықтамасынан $x \to x_0$ болғанда $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$

шарты орындалады. Сәйкесінше, $x \in (x_0 - \varepsilon;\ x_0 + \varepsilon)$ болғанда $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$

ал бұл, $f(x)$ функциясының шектелгендігін білдіреді.

Егер $x \to x_0$ болғанда:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

болса, онда $y = f(x)$ функциясы *ақырсыз аз функция* деп аталады.

функцияның шегі анықтамасы бойынша 7) теңдігінің (кез келген $\varepsilon > 0$ сан үшін) мағынасы: кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta > 0$саны табылса, $0 < |x - x_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x)| < \varepsilon$ теңсіздігі орынды.

Шектер туралы негізгі теоремалар

1-теорема. Екі функцияның шектерінің қосындысының (айырмасының) шегі олардың шектерінің қосындысына (айырмасына) тең:

$$\lim_{x \to x_0}\left(f(x) \pm \varphi(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x)$$

.

$\alpha(x)$

2-теорема. Екі функцияның көбейтіндісінің шегі олардың шектерінің көбейтіндісіне тең:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$ болғандықтан, $f(x)=A+\alpha(x)$,$\varphi(x)=B+\beta(x)$, мұндағы $\alpha(x)$ пен $\beta(x)$ -а.а.ф. Сәйкесінше, $f(x)\cdot\varphi(x)=\left(A+\alpha(x)\right)\cdot\left(B+\beta(x)\right)$, яғни:

$$f(x)\cdot\varphi(x)=AB+\left(A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)\right)$$

жақшадағы өрнек а.а.ф. Сондықтан, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x)=A\cdot B$, яғни:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)$$

Теорема кез-келген ақырлы функциялардың көбейтіндісі үшін орынды.

1-салдар. Тұрақты көбейтіндіні шек таңбасының алдына шығаруға болады

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x)=c\lim_{x\to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(c\cdot f(x)\right)=\lim_{x\to x_0} c\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)=c\cdot\lim_{x\to x_0} f(x)$$

2-салдар. Натурал көрсеткішті дәреженің шегі шектің сол дәрежесіне тең. Дербес жағдайда, $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n,\ n \in N$.

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^n = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\left(f(x) \cdot f(x) \cdot \ldots \cdot f(x)\right)}_{n\ кобейтінді} = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \ldots \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^n.$$

3-теорема. Егер бөлшектің бөлімінің шегі 0-ден өзгеше болса, бөлшектің шегі бөлшек алымының шегінің бөлімінің шегінің бөліндісіне тең:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)}, \left(\lim_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0\right)$$

Бөлшектің алымы (немесе бөлімі) иррационал өрнектер болғанда $\left(\frac{0}{0}\right), \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ анықталмағандықтарын ашу үшін алымындағы (немесе бөліміндегі) иррационалдықтан құтылып, содан кейін шекке көшу керек.

Шек таңбасы астындағы өрнектің алымы мен бөлімін

Берілген тізбектердің шектерін табыңдыздар:

1-мысал. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+2}{5n^2+2}$

$$\frac{3n^2-n+2}{5n^2+2}=\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{2}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+2}{5n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(5+\frac{2}{n^2})}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=$$

$$=\frac{3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{5+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{3-0+0}{5+0}=\frac{3}{5}.$$

2-мысал. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$

Шек таңбасы сатындағы өрнекті түйіндесіне көбетіп, бөлеміз::

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})$ - шексіз үлкен тізбек, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ - шексіз аз тізбек,

сонда $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=0,$ $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=0$

3-мысал:

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{1+2x-9}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=\lim_{x\to4}2\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{2\cdot4}{6}=\frac{4}{3}$$

4-мысал.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x-1}{\sqrt{1-2x+x^2}}-1\right)=-1-1=-2$$

Бақылау сұрақтары

1. Сандар тізбегінің шегінің анықтамасын тұжырымдаңыз.
2. Функцияның шегі деп нені айтады.
3. Функцияның шегінің қандай қасиеттерін білесіздер?
4. Шексіз аз функция деп нені айтады?
5. Шексіз үлкен функция деп нені айтады?

Ұсынылған әдебиеттер тізімі

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления.- М.: Интеграл-пресс, 2002.
2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. -М., 2004.
3. Рябушко А.П. Жоғары математикадан жеке тапсырмалар: 1,2,3 бөлімдер.- Қарағанды, 2011.
4. Письменный Д.Т. Жоғары математикадан дәрістер жинағы: Толық курс. - М.: Қарағанды, 2012. - 524б.
5. Тутанов С.Қ., Шаихова Г.С.Жоғары математика 1,2 -бөлім. -Қарағанды, 2011.
6. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика есептерінің жинағы. -Алматы, 2008. -392 б.
7. Қажыкенова с.Ш, Пак Ю.Н, Шаихова Г.С. Жоғары математика курсы. - Қарағанды, 2020. - 290б.

8 Дүйсек Қ.Е., Қасымбек Е.Ә. Жоғары математика. - Алматы, 2008.

9. К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. Сборник задач по высшей математике. АЙРИС ПРЕСС. - Москва, 2004.- 57 с.

10. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 1. Оқулық. - Алматы. 2007ж. - 280б.

11. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 2. Оқулық. Алматы. 2007ж.

Назарларыңызға рахмет!