Қазақстан Республикасы білім және ғылым министрлігі
Қарағанды техникалық университеті

Дәріс тақырыбы: *Туындының көмегімен функцияны зерттеу*

«Жоғары математика» кафедрасы
Авторы: доцент, т.ғ.к Шаихова Г.С

Дәріс жоспары:

1.Функция асимптоталары.
2.Функция графигінің өсу, кему аралықтары.
3.Функция графигінің дөңес, ойыс аралықтары.
4.Функцияның кесіндідегі ең кіші, үлкен мәндері.
5.Функция графигін толық зерттеу
6.Тейлор формуласы

Туындының көмегімен функцияны зерттеу. Функцияның максимумы мен минимумы

Егер x_0 нүктесінің $\delta -$ маңайы бар болып, осы маңайдың барлық $x \neq x_0$ үшін

$f(x) < f(x_0)$ теңсіздігі орындалса, x_0 нүктесі $y = f(x)$ функциясының максимум

нүктесі деп аталады. Функцияның минимум нүктесі де осылай анықталады: егер

$\exists \delta > 0 \ \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \ f(x) > f(x_0)$ болса, x_0 функциясының минимум нүктесі.

Максимум (минимум) нүктедегі функция мәні функцияның максимумы (минимумы) деп аталады. Функцияның максимумы мен минимумы функцияның экстремумы деп аталады.

1-теорема. (экстремумның қажетті шарты). Егер $y = f(x)$ дифференциалданатын функциясының x_0 нүктесінде экстремумы бар болса, оның осы нүктедегі туындысы нөлге тең: $f'(x_0) = 0$.

Үзіліссіз функцияның тек туындысы нөлге немесе туындысы болмайтын нүктелерінде ғана экстремумы болады. Функцияның туындысын нөлге айналдыратын немесе туындысы болмайтын x аргумнтінің мәндерін **күдікті нүктелер** деп атайды.

2-теорема. (Экстремумның жеткілікті шарты). Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 күдікті нүктесінің қандайда бір δ – маңайында дифференциалданатын болса және ол нүктеден өткенде (солдан оңға) $f'(x)$ туындысының таңбасы плюстен минусқа ауысса, x_0 - максимум нүкте, таңбасы минустан плюске ауысса, x_0 - минимум нүктесі болып табылады.

3-теорема. Егер x_0 нүктесінде $f(x)$ функциясының бірінші туындысы нөлге тең $\left(f'(x) = 0\right)$, ал x_0 нүктесіндегі екінші туындысы бар болса және нөлге тең болмаса

$(f''(x) \neq 0)$, онда $f''(x_0) < 0$ болғанда x_0 нүктесінде функцияның максимумы, ал

$f''(x_0) > 0$ болғанда минимумы болады.

Функцияның кесіндідегі ең үлкен және ең кіші мәні

$y = f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз болсын. Мұндай функция өзінің ең үлкен және ең кіші мәнін және олар не кесіндісінің ішкі нүктелерінде немесе кесіндінің шеткі $x_0 = a$ және $x_0 = b$, $x_0 \in (a;b)$ нүктелерінде қабылдайды. Егер болса, онда x_0 нүктесін берілген функцияның күдікті нүктелерінен іздеу керек.

$[a;b]$ кесіндісінде функцияның ең үлкен, ең кіші мәндерін табудың келесі ережесін аламыз:

1) функцияның барлық күдікті нүктелерін табамыз;

2) функцияның осы табылған күдікті нүктелеріндегі және (a,b) кесіндісінің шеткі нүктелеріндегі мәндерін есептеу;

3) осы табылған мәндер ішінен ең үлкені мен ең кішісін таңдау.

Ескерту-1. Егер $y = f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде тек бір ғана күдікті нүктесі болса және ол максимум (минимум) нүкте болса, онда бұл нүктеде функция ең үлкен (ең кіші) мән қабылдайды. $f(x_0) = f_{\text{е.ү.}} = f_{\max}$

Ескерту-2. Егер $y = f(x)$ функциясының $[a;b]$ кесіндісінде күдікті нүктелері болмаса, онда бұл кесіндіде функция не монотонды өседі, не монотонды кемиді. Сәйкесінше, функция өзінің ең үлкен (M) мәнін кесіндінің бір ұшында, ал ең кіші (m) мәнін екінші ұшында қабылдайды.

Функция графигінің дөңестігі мен ойыстығы, иілу нүктелері

Егер $y = f(x)$ дифференциалданатын функциясының графигі оған жүргізілген кез келген жанамадан жоғары болса, онда график –ойыс деп, егер жанамадан төмен болса, график –дөңес деп аталады.

1-теорема. Егер $y = f(x)$ функциясының $(a;b)$ интервалының барлық нүктесінде екінші туындысы теріс, яғни $f''(x) < 0$ болса, онда осы интервалда функция графигі дөңес. Егер $f''(x) > 0$, $\forall x \in (a;b)$ болса, функция графигі ойыс болады.

2-теорема. (иілу нүктелерінің бар болуының жеткілікті шарты). Егер $f''(x)$ екінші ретті туындысы нөльге тең немесе болмайтын нүктесі арқылы өткенде, екінші ретті туындының таңбасы өзгерсе, онда $M_0(x_0;y_0)$ нүктесі $y = f(x)$ функциясының *иілу нүктесі* болып табылады.

Функция графигінің асимптоталары

Анықтама: Егер берілген $y = f(x)$ функциясының графигі үшін қандайда бір түзу бар болып, қисықтың нүктесі бас нүктеден қашықтаған сайын функция графигі осы түзуге жақындай беретін болса, онда бұл түзу осы қисықтың *асимптотасы* деп аталады.

Анықтама: Егер $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ болса, онда $x = a$ түзуі $y = f(x)$ функциясының *вертикаль асимптотасы* деп атайды.

Вертикаль асимптотаны $y = f(x)$ функциясының үзіліс нүктелері арасынан іздеу керек. Үзіліссіз функциялардың графигінде вертикаль асимптотасы болмайды (көпмүше болған жағдайда).

Анықтама: $y = f(x)$ функциясының x шексіздікке ұмтылғанда $y = kx + b$ түзуі *көлбеу асимптота* деп аталады, егер $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, мұнда $\lim_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$

Егер $y = kx + b$ көлбеу асимптота бар болса, онда k және b коэффициенттері мына формулалармен анықталады:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx]$$

Егер $k = 0$ болса, көлбеу асимптотаны *горизонталь асимптота* деп атайды.

Функцияны зерттеу және графигін салу

$y = f(x)$ функциясын зерттеуді белгілі тізбек бойынша жүргізу қажет.

1. Функцияның анықталу облысын табу;
2. Графиктің координаталар өсімен қиылысу нүктелерін табу (мүмкін болса);
3. Функцияның таңбасы тұрақты интервалдарын табу ($f(x) > 0$ немесе $f(x) < 0$ болатындай аралықтарды табу);
4. Функцияның жұп, тақ, не жалпы түрдегі болатындығын анықтау;
5. Функция графигінің асимптоталарын табу;
6. Функцияның монотондық интервалдарын табу;
7. Функцияның экстремумдарын табу;
8. Функция графигінің ойыс интервалдары мен иілу нүктелерін табу;

$$y = \frac{2x}{x^2 - 1}$$

1. Берілген функция рационал бөлшек болғандықтан $x=-1$ және $x=1$

нүктелерінен басқа сандар өсінің барлық нүктелерінде анықталған және үзіліссіз,

яғни бұл $x=-1$ және $x=1$ нүктелерінде бөлшектің бөлімі нөлге айналады, демек,

нүктелерінен басқа сандар өсінің барлық нүктелерінде анықталған және үзіліссіз болғандықтан,

функцияның анықталу облысы:

$$D(f): x \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$$

ТЕЙЛОР ФОРМУЛАСЫ

$f(x)$ функциясы $P_n(x)$ $n-$дәрежелі көпмүшелігі болсын:

$$f(x)=P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$$

Бұл көпмүшелікті $n-$дәрежелі $x-x_0$ (x_0- кез-келген сан) айырмасының дәрежесі арқылы түрлендірейік, яғни $P_n(x)-$ ты.

$$P_n(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\cdots+A_n(x-x_0)^n \qquad (1)$$

$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ коэффициенттерін табу үшін (1) теңдігін n рет дифференциалдайық:

$$P_n'(x)=A_1+2A_2(x-x_0)+3A_3(x-x_0)^2+\cdots+nA_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$P_n''(x)=2A_2+2\cdot 3A_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)A_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$P_n'''(x)=2\cdot 3A_3+2\cdot 3\cdot 4A_3(x-x_0)+\cdots+n(n-1)(n-2)A_n(x-x_0)^{n-3}$$

....,

$$P_n^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1A_n$$

$x - x_0$ мәнін алынған теңдіктерге және (1) теңдікке қойып, мынаны аламыз:

$$P_n(x_0) = A_0, \qquad \text{яғни} \quad A_0 = P_n(x_0)$$

$$P_n'(x_0) = A_1, \qquad \text{яғни} \quad A_1 = \frac{P_n'(x_0)}{1!}$$

$$P_n''(x_0) = 2A_2, \qquad \text{яғни} \quad A_2 = \frac{P_n''(x_0)}{2!}$$

$$P_n'''(x_0) = 2 \cdot 3A_0\ , \qquad \text{яғни} \quad A_3 = \frac{P_n'''(x_0)}{3!}$$

....,

$$P_n^{(n)}(x_0) = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1A_0\ , \qquad \text{яғни} \ A_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ табылған мәндерін (1) теңдігіне қойып, n –дәрежелі $P_n(x)$ Көпмүшелігінің $x - x_0$ дәрежесі бойынша жіктеуін аламыз:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P_n'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P_n''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (2)$$

(2) формуласы n – дәрежелі $P_n(x)$ *көпмүшелігі үшін Тейлор формуласы* деп аталады.

1-мысал. $P_n(x) = -4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ көпмүшелігін $x+1$ дәрежесі бойынша жікте.

Шешуі: $x_0 = -1$, $P'(x) = -12x^2 + 6x - 2$, $P''(x) = -24x + 6$, $P'''(x) = -24$

Сондықтан $P(-1) = 10$,$P'(-1) = -20$, $P''(x) = 30$,$P'''(-1) = -24$

Сәйкесінше $P(x) = 10 + \frac{-20}{1}(x+1) + \frac{30}{2!}(x+1)^2 + \frac{-24}{3!}(x+1)^3$

яғни $-4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 10 - 20(x+1) + 15(x+1)^2 - 4(x+1)^3$

Кез келген функция үшін Тейлор формуласы

$y = f(x)$ дифференциалданатын функциясын қарастырайық. Тейлор формуласы белгілі бір шарттарды қоя отырып, $f(x)$ функциясын көпмүше түрінде көрсетуге және осы жуықтау қателегін бағалауға мүмкіндік береді.

1-теорема. Егер $y = f(x)$ функциясы x_0 нүктесінің қандай да бір маңайында анықталған және $(n+1)$ -ші ретті туындысы бар болса, онда кез келген x үшін осы маңайдан *c нүктесі табылып, келесі формула орындалады:*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (3)$$

$$\left(c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1\right)$$

(3) *формула* $f(x)$*функциясы үшін Тейлор формуласы* деп аталады. Бұл формуланы $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ түрінде де жазуға болады, мұндағы

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Тейлор көпмүшелегі деп, ал $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$

Лагранж түрінде жазылған Тейлордың *қалдық мүшесі* деп аталады. $R_n(x)$ - $f(x) \approx P_n(x)$ жуық теңдігінің қателігі. Осылайша, Тейлор формуласы $y = f(x)$ функциясын қалдық мүшесінің мәніне тең сәйкес дәрежелік дәлдікпен $y = P_n(x)$ көпмүшелігімен алмастыруға мүмкіндік береді.

$x_0 = 0$ болғанда Тейлор формуласының дербес жағдайы болып табылатын – *Маклорен формуласын* аламыз:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (4)$$

мұндағы *c* мәні *0* мен *x*-тың арасында жатыр $(c = \theta x,\ 0 < \theta < 1)$.

$n = 0$ болғанда Тейлор формуласы (3) $f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0)$ немесе $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$ түріне, яғни ақырлы өсімшелі Лагранж формуласымен сәйкес. Алдында қарастырылған жуық есептеудің $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (функция дифференциалы) формуласы

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

2-мысал. e санының жуық мәнін 0,001 дәлдікпен табыңыз.
Шешуі: $f(x) = e^x$ функциясының Маклорен формуласын жазайық. Осы функциялардың туындыларын табайық: $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x, \ldots,$ $f^{(n+1)}(x) = e^x$.

$f(0)=e^0=1$, $f'(0)=e^0=1$, $f''(x)=e^x,\dots,$ $f^{(n)}(0)=1$, $f^{(n+1)}(c)=e^c$ болғандықтан, (4) формуласы бойынша

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^c\,x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{4}$$

$x=1$ қойсақ: $e=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{e^c}{(n+1)!}$

e санының жуық мәнін 0,001 дәлдікпен табу үшін $\dfrac{e^c}{(n+1)!}$ қалдық мүшесі 0,001 – ден кіші шарты бойынша $n-$ ді анықтаймыз. $0<c<1$ болғандықтан, $e^c<3$. Болғандықтан $n=6$ болғанда $\dfrac{e^c}{7!}<\dfrac{3}{5040}=0,0006<0,001$

Сондықтан,

$$e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\approx2+0,5+0,1667+0,0417+0,0083+0,0014=2,7181\approx2,718$$

яғни, $e\approx2,718$ жуық мәнін аламыз.

Кейбір элементар функциялардың Маклорен формуласы бойынша жіктелуін келтірейік:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \cdot \cos c$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cdot \cos c$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!} x^n + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n)(1+c)^{\mu-n-1}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Бақылау сұрақтары:

1. *Функция асимптоталары.*
2. *Функция графигінің өсу, кему аралықтары.*
3. *Функция графигінің дөңес, ойыс аралықтары.*
4. *Функцияның кесіндідегі ең кіші, үлкен мәндері.*
5. *Функция графигін толық зерттеу*
6. *Тейлор формуласы*

ҰСЫНЫЛАТЫН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления.- М.: Интеграл-пресс, 2002.
Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. -М., 2004.
Рябушко А.П. Жоғары математикадан жеке тапсырмалар: 1,2,3 бөлімдер.- Қарағанды, 2011.
Письменный Д.Т. Жоғары математикадан дәрістер жинағы: Толық курс. - М.: Қарағанды, 2012. - 524б.
Тутанов С.Қ., Шаихова Г.С.Жоғары математика 1,2 -бөлім. -Қарағанды, 2011.
Махмеджанов Н.М. Жоғары математика есептерінің жинағы. -Алматы, 2008. -392 б.
Қажыкенова с.Ш, Пак Ю.Н, Шаихова Г.С. Жоғары математика курсы. - Қарағанды, 2020. - 290б.
8.Шаихова Г.С. Төлеутаева Ж.М. Бір айнымалы функциялардың дифференциалдық есептеулрі. - Қарағанды, 2018. -98б.
9. Дүйсек Қ.Е., Қасымбек Е.Ә. Жоғары математика. - Алматы, 2008.
10. К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. Сборник задач по высшей математике. АЙРИС ПРЕСС. - Москва, 2004.- 57 с.
11. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 1. Оқулық. - Алматы. 2007ж. - 280б.
12. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 2. Оқулық. Алматы. 2007ж.

Назар қойып тыңдағандарыңызға рахмет!