Лабораторная работа №3 Логические основы цифровых устройств

Цель работы: Приобрести практические навыки анализа работы логических элементов.

Оборудование, технические и инструментальные средства: ПК, среда моделирования электронных схем Electronics Workbench (EWB) или Multisim.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

3.1 Определения комбинационных и последовательностных устройств

Устройства, реализующие функции алгебры логики, называют *логическими* или *цифровыми* и классифицируют по различным отличительным признакам. Так, по характеру информации на входах и выходах логические устройства подразделяют на устройства последовательного, параллельного и смешанного действия, а по схемному решению и характеру связи между входными и выходными переменными с учётом их изменения по тактам работы – на комбинационные и последовательностные.

В *комбинационных* устройствах значения (0 или 1) сигналов на выходах в каждый конкретный момент времени полностью определяются значениями (комбинацией, набором) действующих в данный момент цифровых входных сигналов. В *последовательностных* же устройствах значения выходных сигналов в n-такте определяются не только значениями входных сигналов в этом такте, но и зависят от внутренних состояний устройств, которые произошли в результате воздействия входных сигналов в предшествующие такты.

Данная работа посвящена изучению простейших комбинационных логических устройств, реализующих логические функции сложения, умножения и отрицания.

3.2 Основные элементы алгебры логики

Анализ комбинационных устройств удобно проводить с помощью алгебры логики, оперирующей только с двумя понятиями: истинным (логическая 1) и ложным (логический 0). В результате, функции, отображающие информацию, принимают в каждый момент времени только значения 0 или 1. Такие функции называют *логическими*, а сигналы (входные и выходные переменные) – *двоичными* (бинарными).

Схемные элементы, при помощи которых осуществляется преобразование поступающих на их входы двоичных сигналов и непосредственное выполнение предусмотренных логических операций, называют *логическими* устройствами.

В общем случае логическое устройство может иметь n входов и m выходов. Рассматривая входные сигналы x_1, x_2, …, x_n в качестве аргументов, можно соответствующие выходные сигналы представлять в виде функции $y_i = f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ с помощью операций алгебры логики.

Функции алгебры логики (ФАЛ), иногда называемые *переключательными* функциями, обычно представляют в алгебраической форме (в виде математического выражения), например $y_i = (x_0 \wedge x_1) \vee (x_1 \wedge x_2)$, или в виде таблиц истинности (комбинационных таблиц).

Таблица истинности содержит всевозможные комбинации (наборы) бинарных значений входных переменных с соответствующими им бинарными значениями выходных переменных; каждому набору входных сигналов соответствует определенное значение выходного сигнала – значение логической функции y_i. Максимальное число возможных различных наборов (строк) зависит от числа входных переменных n и равно 2^n.

В булевой алгебре выделяют три основные функции: конъюнкция, дизъюнкция, отрицание. Остальные функции являются производными от приведенных выше.

Основные логические операции состоят из следующих элементарных преобразований двоичных сигналов:

– *логическое сложение* или *дизъюнкция*, обозначаемое символом "∨" (или "+") и называемое также операцией ИЛИ. При этом число аргументов (слагаемых x) может быть любым. Эта операция для функции двух переменных x_1 и x_2 описывается в виде логической формулы

$$y = x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2.$$

Это значит, что y истинно (равно 1), если истинно хотя бы одно из слагаемых x_1 или x_2. И только в случае, когда все слагаемые x равны 0, результат логического сложения y также равен 0.

Условное обозначение, таблица истинности и другие показатели этой логической функции приведены во втором столбце таблицы 3.1;

- *логическое умножение* или *конъюнкция*, обозначаемое символом "∧" (или "·") и называемое также операцией И. При этом число аргументов (сомножителей x) может быть любым. Эта операция для функции двух переменных x_1 и x_2 описывается в виде логической формулы

$$y = x_1 \wedge x_2 = x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2.$$

Это значит, что y истинно (равно 1), если истинны сомножители x_1 и x_2. В случае, если хотя бы один из сомножителей равен 0, результат логического умножения y равен 0.

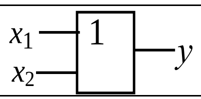
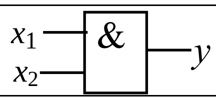
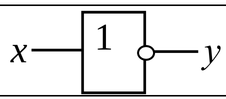
Условное обозначение, таблица истинности и другие показатели логической функции И приведены в третьем столбце таблицы 3.1;

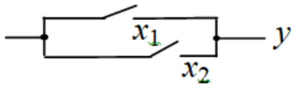
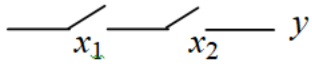
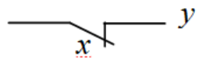
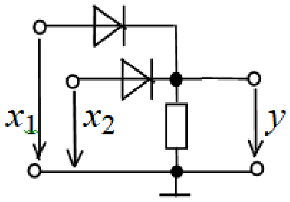
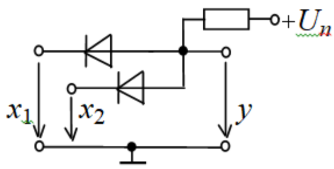
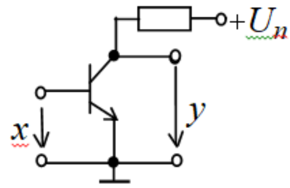
– *логическое отрицание* или *инверсия*, обозначаемое чёрточкой над переменной и называемое операцией НЕ. Эта операция записывается в виде

$$y = \bar{x}.$$

Это значит, что y истинно (равно 1), если x ложно (равно 0), и наоборот. Очевидно, что операция y выполняется над одной переменной x и её значение всегда противоположно этой переменной (см. четвертый столбец таблицы 3.1).

Таблица 3.1

Формы отображения основных логических функций			
Наименование функции →	Дизъюнкция	Конъюнкция	Инверсия
Символическая	∨ или +	∧ или ·	$\bar{x}$
Буквенная	ИЛИ	И	НЕ
Условная графическая			
Аналитическая	$y = x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2$	$y = x_1 \wedge x_2 = x_1 x_2$	$y = \bar{x}$
Табличная (истинности)	x_1 x_2 y: 0 0 0; 0 1 1; 1 0 1; 1 1 1	x_1 x_2 y: 0 0 0; 0 1 0; 1 0 0; 1 1 1	x y: 0 1; 1 0

Контактная			
Схемо-техническая			

Основные логические операции ИЛИ, И и НЕ позволяют аналитически описать, а логические элементы ИЛИ (*дизъюнктор*), И (*конъюнктор*) и НЕ (*инвертор*) – реализовать комбинационное устройство любой степени сложности, т. е. операции $y = x_1 + x_2$, $y = x_1 x_2$ и $y = \bar{x}$ обладают функциональной полнотой и составляет функционально полный набор.

В качестве примера рассмотрим функцию неравнозначности y двух переменных x_1 и x_2, принимающая значение 1 при $x_1 \neq x_2$ и значение 0 при $x_1 = x_2 = 0$ или при $x_1 = x_2 = 1$, т. е.

$$y = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2 .$$

Операцию неравнозначности чаще называют *суммированием по модулю* 2 и обозначают

$$y = x_1 \oplus x_2 .$$

Примеры контактной и простейшей схемной реализаций дизъюнктора, конъюнктора и инвертора приведены в предпоследней и последней строках таблицы 3.1.

3.3 Базовые логические элементы

Особое значение в цифровой электронике имеют универсальные (базовые) логические элементы, способные образовать функционально полный набор, с помощью которых можно реализовать синтез устройств любой сложности. При интегральной технологии удобство изготовления одного базового элемента имеет решающее значение. Поэтому базовые логические устройства составляют основу большинства цифровых ИМС.

К универсальным логическим операциям (устройствам) относят две разновидности базовых элементов:

– *функцию Пирса*, обозначаемую символически вертикальной стрелкой ↓ (стрелка Пирса) и отображающую операцию ИЛИ-НЕ. Для простейшей функции двух переменных x_1 и x_2 функция $y = 1$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = 0$:

$$y = x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 + x_2};$$

– *функцию Шеффера*, обозначаемую символически вертикальной черточкой $|$ (штрих Шеффера) и отображающую операцию И-НЕ. Для простейшей функции двух переменных x_1 и x_2 функция $y = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2 = 1$:

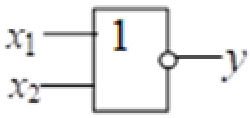
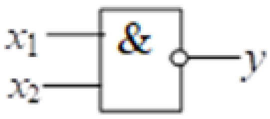
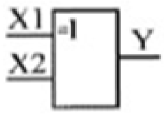
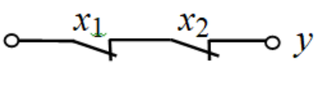
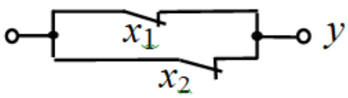
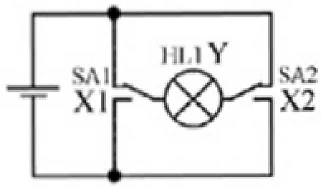
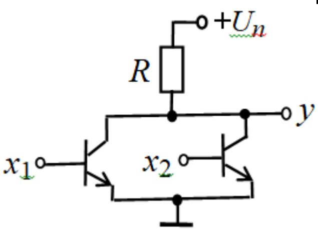
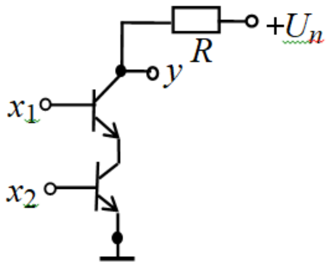
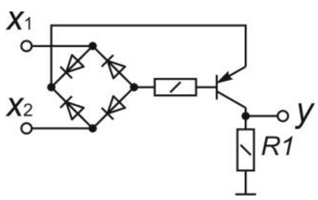
$$y = x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 x_2}.$$

Функция Исключающее ИЛИ, выполняющая операцию неравнозначности и обозначаемая символически знаком ⊕ и отображающая операцию Сложение по mod 2. В случае двух переменных результат выполнения операции истинен тогда и только тогда, когда один из аргументов истинен, а другой — ложен.

$$y = x_1 \oplus x_2$$

Важнейшие показатели функций Шеффера, Пирса и Исключающее ИЛИ представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2

Формы отображения базовых логических функций			
Наименование функции →	Функция Пирса	Функция Шеффера	Исключающее ИЛИ
Символическая	↓	|	⊕
Буквенная	ИЛИ-НЕ	И-НЕ	Исключающее ИЛИ
Условная графическая			
Аналитическая	$y=x_1 \downarrow x_2$	$y=x_1 \| x_2$	$y= x_1 \oplus x_2$
Табличная (истинности)	x_1 x_2 y 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0	x_1 x_2 y 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0	x_1 x_2 y 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1
Контактная			
Схемо-техническая			

3.4 Представление логических функций математическими выражениями

Наиболее распространенным способом задания логических функций является табличная форма. Таблицы истинности позволяют полно и однозначно установить все существующие логические связи.

При табличном представлении логических функций их записывают в одной из канонических форм: совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ) или совершенной конъюнктивной нормальной форме (СКНФ).

Математическое выражение логической функции в СДНФ получают из таблицы истинности следующим образом: для каждого набора аргументов, на котором функция равна

1, записывают элементарные произведения переменных, причем переменные, значения которых равны нулю, записывают с инверсией. Полученные произведения, называемые *конституентами единицы* или *минтермами*, суммируют.

Запишем логическую функцию y трех переменных a, b и c, представленной в виде таблице 3.3, в СДНФ:

$$y(a, b, c) = \overline{a}bc + a\overline{b}c + ab\overline{c} + abc.$$

Таблица 3.3

№	*a*	*b*	*c*	*y*
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Совершенной конъюнктивной нормальной формой называют логическое произведение элементарных сумм, в каждую из которых аргумент или его отрицание входят один раз.

При этом для каждого набора аргументов таблицы истинности, на котором функция y равна 0, составляют элементарную сумму, причем переменные, значение которых равно 1, записывают с отрицанием. Полученные суммы, называемые *конституентами нуля* или *макстермами*, объединяют операцией логического умножения.

Для функции (таблица 3.3) СКНФ:

$$y(a, b, c) = (a + b + c)(a + b + \overline{c})(a + \overline{b} + c)(\overline{a} + b + c).$$

3.5 Переход от логической функции к логической схеме

Для построения логической схемы необходимо логические элементы, предназначенные для выполнения логических операций, располагать, начиная от входа, в порядке, указанном в булевом выражении.

Построим структуру логического устройства, реализующего логическую функцию трех переменных

$$y = (a + b + c)(a + b + \overline{c})(\overline{a} + b + c)(\overline{a} + \overline{b} + c).$$

Слева располагаем входы a, b и c с ответвлениями на три инвертора, затем четыре элемента ИЛИ и, наконец, элемент И на выходе (рисунок 3.1).

Итак, любую логическую функцию можно реализовать непосредственно по выражениям, представленным в виде СДНФ или СКНФ. Однако, полученная таким образом схема, как правило, не оптимальна с точки зрения её практической реализации: она громоздка, содержит много логических элементов и возникают трудности в обеспечении её высокой надёжности.

Алгебра логики позволяет преобразовать формулы, описывающие сложные высказывания с целью их упрощения. Это помогает в конечном итоге определить оптимальную структуру того или иного логического устройства, реализующего любую сложную функцию. Под оптимальной структурой принято понимать такое построение логического устройства, при котором число входящих в его состав элементов минимально.

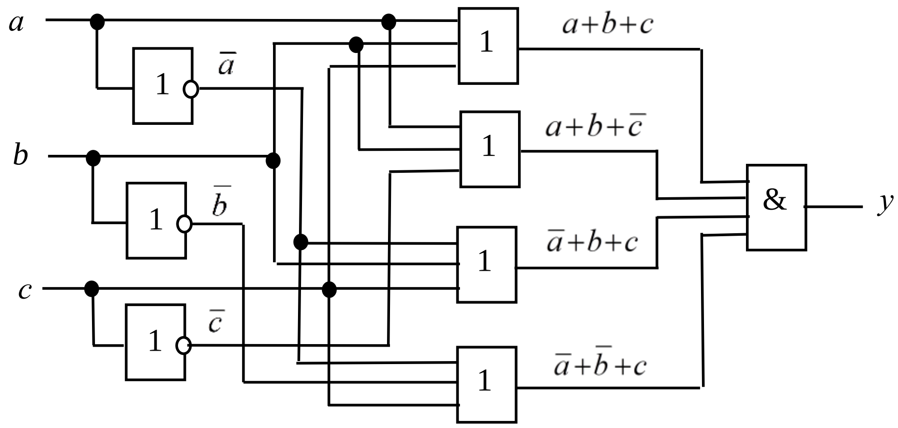


Рисунок 3.1

Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретический материал.
2. Выполнить задания.
3. Ответить на контрольные вопросы.

Задание 1.
Заполнить таблицу 3.4

Таблица 3.4

Дизъюнктор [ИЛИ (**OR**)]			Конъюнктор [И (**AND**)]			Инвертор [НЕ (**NOT**)]		Штрих Шеффера [И-НЕ (**NAND**)]			Стрелка Пирса [ИЛИ-НЕ (**NOR**)]		
x_1	x_2	y	x_1	x_2	y	x	y	x_1	x_2	y	x_1	x_2	y
0	0		0	0		0		0	0		0	0	
0	1		0	1				0	1		0	1	
1	0		1	0		1		1	0		1	0	
1	1		1	1				1	1		1	1	

Задание 2.
Нарисовать схему согласно варианту таблицы 3.5.

Таблица 3.5

Вариант	Логическая функция
1, 6, 11, 16, 21, 26	$y=(\overline{a}b+\overline{c})(\overline{a}+\overline{b}+c)(a+b+c).$
2, 7, 12, 17, 22, 27	$y=(a+b+\overline{c})(\overline{a}+\overline{b}c)(a+\overline{b}+\overline{c}).$
3, 8, 13, 18, 23, 28	$y=(b+a\overline{c})(\overline{a}+bc)(a+\overline{b}+c).$
4, 9, 14, 19, 24, 29	$y=(\overline{a}\overline{b}+\overline{c})(a+\overline{b}+c)(ab+\overline{c}).$
5, 10, 15, 20, 25, 30	$y=(a+\overline{b}c)(\overline{a}+b+\overline{c})(ab+c).$

В качестве примера соберём схему для реализации логической функции

$$y = (ab + \bar{c})(\bar{a} + \bar{b} + c)(a + b + c).$$

Анализ функции показывает, что для построения логической схемы нам потребуются три инвертора, три дизъюнктора, причем один дизъюнктор с двумя, а два – с тремя входами, и два конъюнктора, причём один с двумя, а другой с тремя входами. Схема, составленная в EWB в соответствии с заданной функцией, приведена на рисунке 3.3,

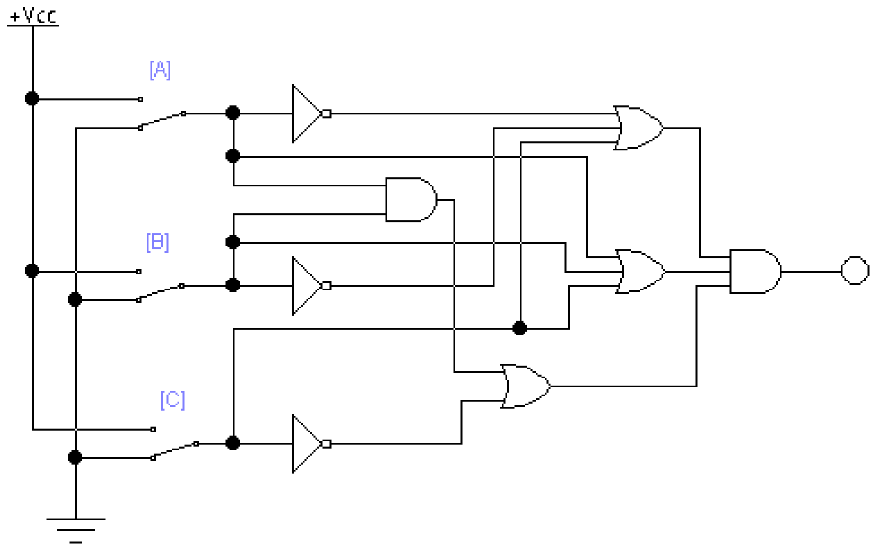


Рисунок 3.2

Задание3.

Собрать электрическую схему исследования логического элемента И на три входа (рисунок 3.3). Интегральная схема содержит три логических элемента И. Входы элементов обозначены буквами I1, I2, I3, …I9, а выходы обозначены буквами O1, O2, O3.

Подать на входы второго элемента И все возможные сочетания нулей и единиц с помощью управляющих ключей. Единице соответствует высокий уровень напряжения, а нулю – низкий уровень.

Управляющие ключи замыкаются и размыкаются с помощью клавиш Z, X, C. Результаты исследования занести в таблицу истинности.

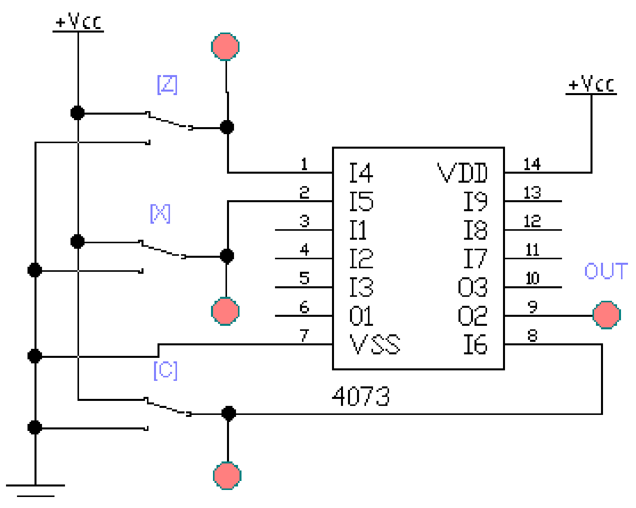


Рисунок 3.3 - Электрическая схема исследования элемента И на три входа

Задание 4.

Собрать электрическую схему и исследовать логический элемент ИЛИ (рисунок 3.4). Зарисовать диаграммы входных и выходных сигналов при изменении положения управляющего ключа. Результаты исследования занести в таблицу истинности.

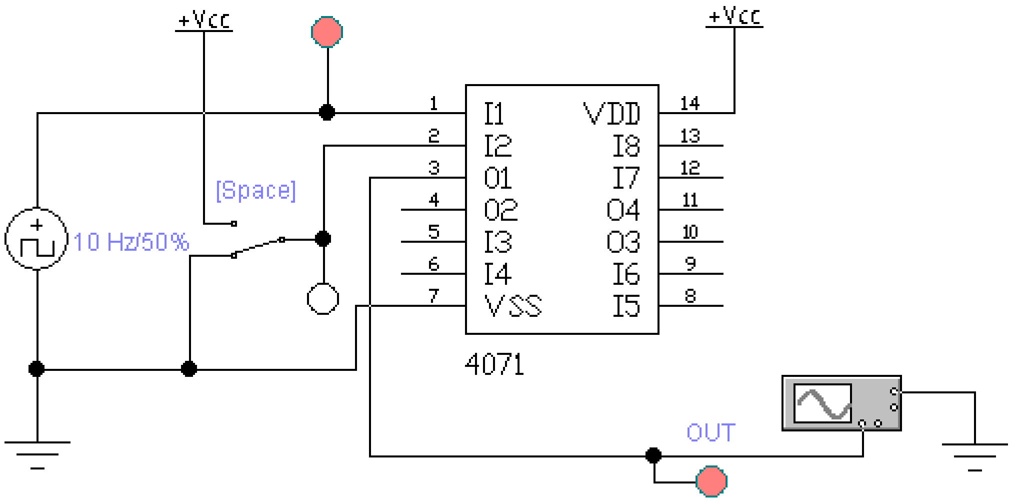


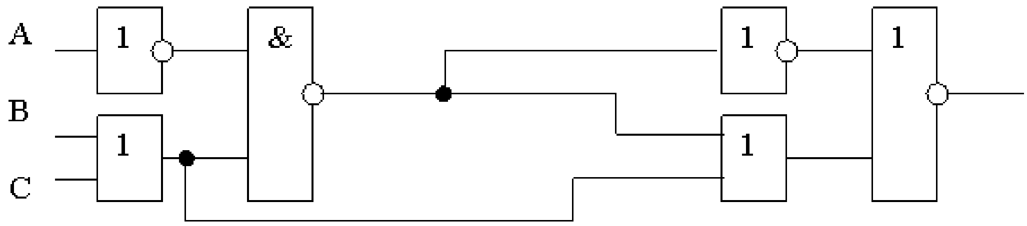
Рисунок 3.4 – Электрическая схема исследования элемента ИЛИ на два входа

Задание 5.

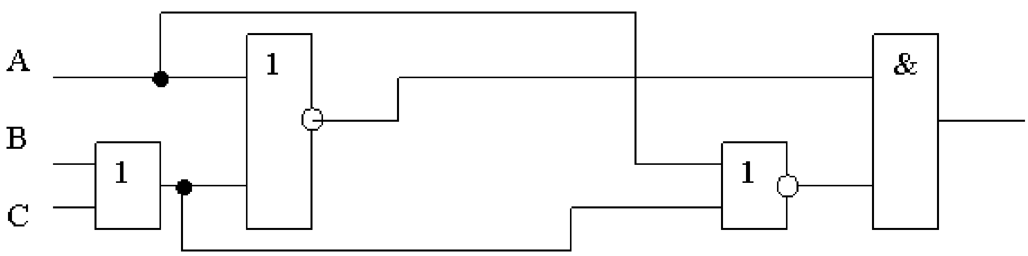
1. В соответствии с вариантом, выбрать задание и собрать и собрать в программе EWB (Multisim) электрическую принципиальную схему на логических элементах.

2. Подать на входы все возможные сочетания нулей и единиц с помощью управляющих ключей. Единице соответствует высокий уровень напряжения, а нулю – низкий уровень.

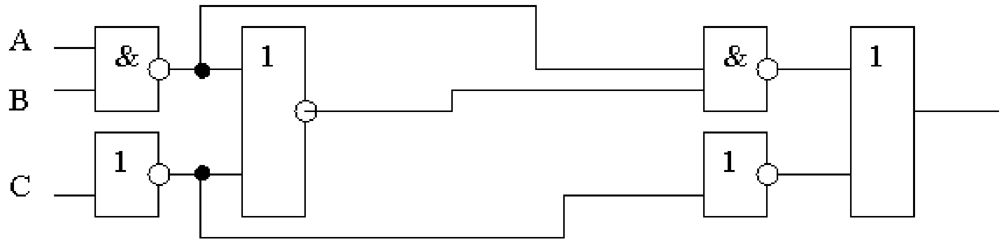
3. По заданной принципиальной электрической схеме составить логическое выражение и заполнить для него таблицу истинности.



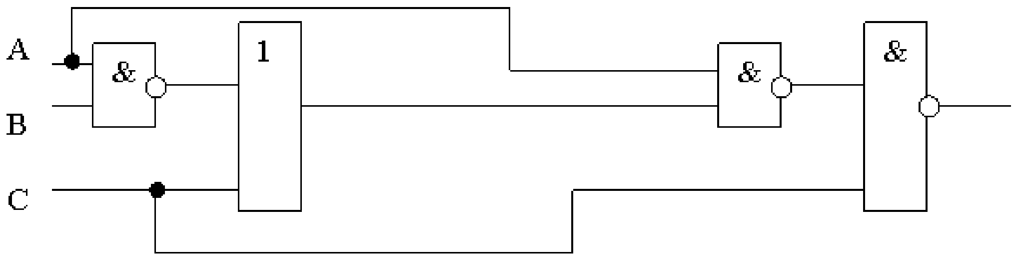
Вариант 1



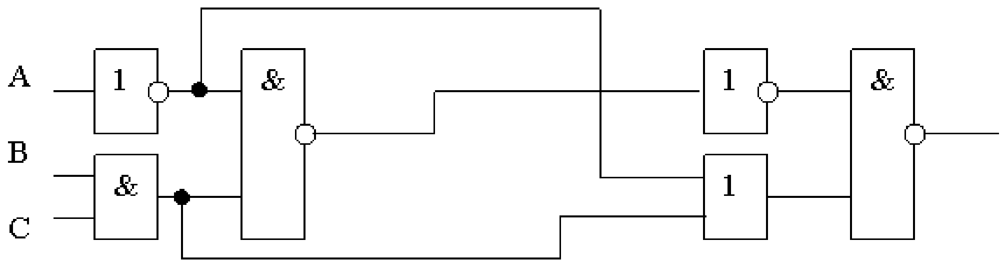
Вариант 2



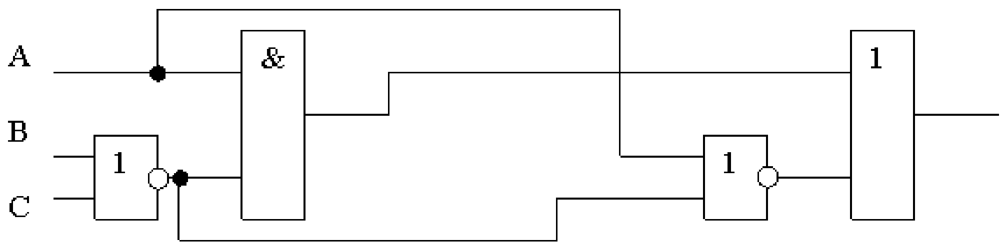
Вариант 3



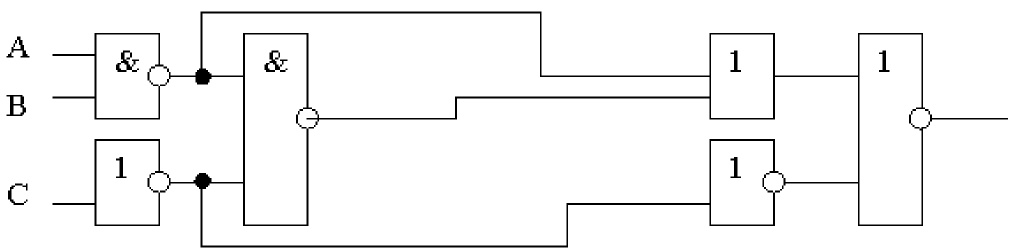
Вариант 4



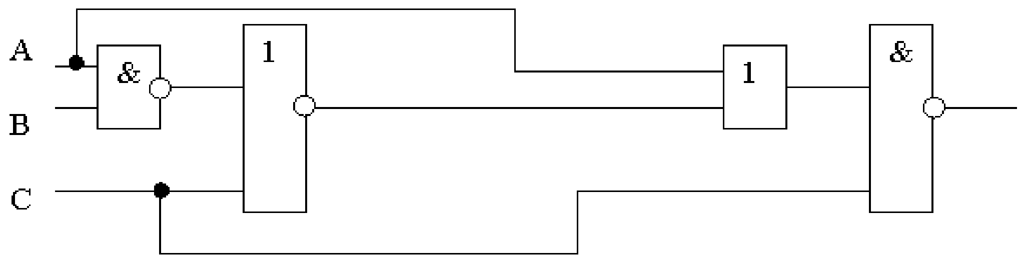
Вариант 5



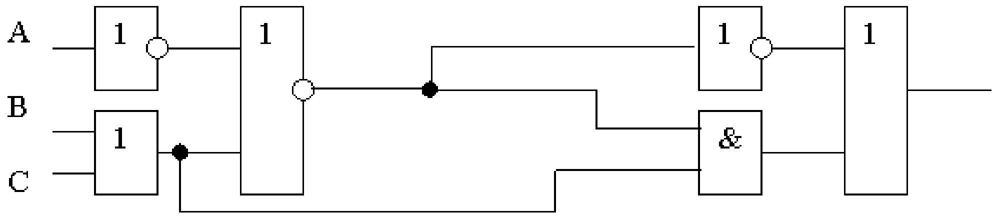
Вариант 6



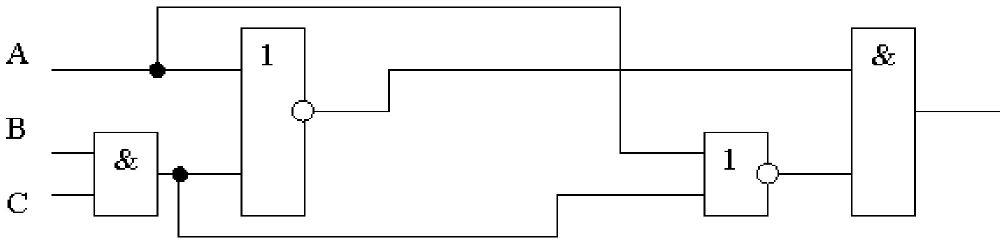
Вариант 7



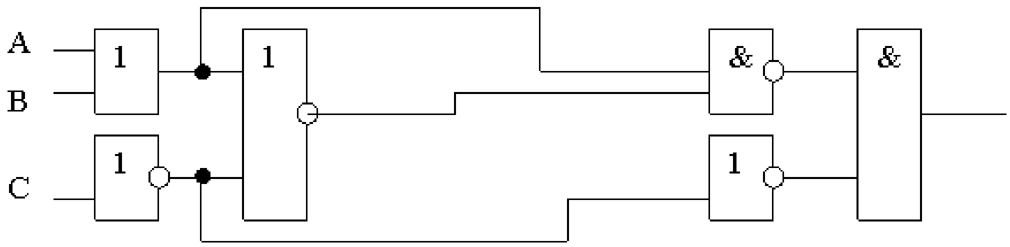
Вариант 8



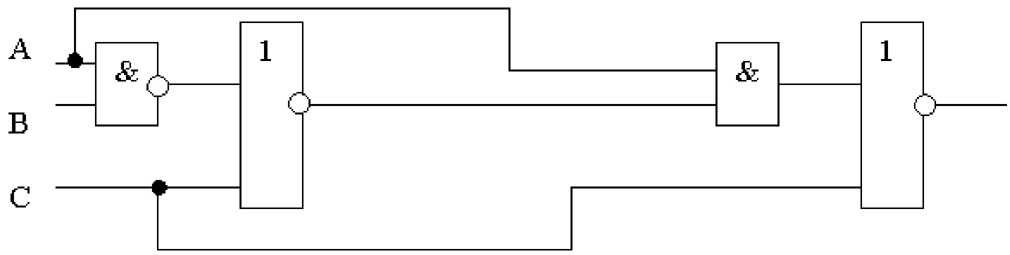
Вариант 9



Вариант 10



Вариант 11



Вариант 12

Содержание отчета

1. Титульный лист.
2. Наименование, цель и задание к лабораторной работе;
3. Результаты выполнения задания, в том числе электрические схемы, временные диаграммы и результаты исследования.
4. Ответы на контрольные вопросы и тестовые задания.

Контрольные вопросы

1. Сколько логических элементов И в микросхеме4073?
2. Сколько логических элементов ИЛИ в микросхеме 4071?
3. Какую логическую операцию выполняет элемент исключающее ИЛИ?
4. Нарисуйте условное графическое обозначение элемента ИЛИ-НЕ на три входа.
5. Нарисуйте условное графическое обозначение элемента И-НЕ на три входа.

Тестовые задания к работе

1. Укажите **признаки,** характеризующие основные логические элементы:

☐ На входах логических элементов аналоговые сигналы, а на выходах – цифровые;

☐ Операции логического сложения, логического умножения и инверсия не составляют функционально полный набор;

☐ Используя основные логические операции И, ИЛИ и НЕ, можно аналитически выразить любую сложную логическую функцию;

☐ Минимальный логический базис составляют операции ИЛИ и НЕ или И и НЕ;

☐ Входные и выходные сигналы логических элементов могут принимать только два значения: логическую 1 и логический 0;

☐ Операция логического сложения совпадает с операцией обычного сложения.

2. Укажите **выражение** логической функции двух переменных x_1 и x_2, реализуемой элементом "Стрелка Пирса".

○ $y = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$; ○ $y = \overline{x_1 x_2}$; ○ $y = \overline{x_1 + x_2}$;

○ $y = x_1 \oplus x_2$; ○ $y = x_1 + x_2$; ○ $y = x_1 x_2$.

3. Укажите **выражение** логической функции двух переменных x_1 и x_2, реализуемой элементом "Штрих Шеффера".

○ $y = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$; ○ $y = \overline{x_1 x_2}$; ○ $y = x_1 \oplus x_2$;

○ $y = \overline{x_1 + x_2}$; ○ $y = x_1 + x_2$; ○ $y = x_1 x_2$.

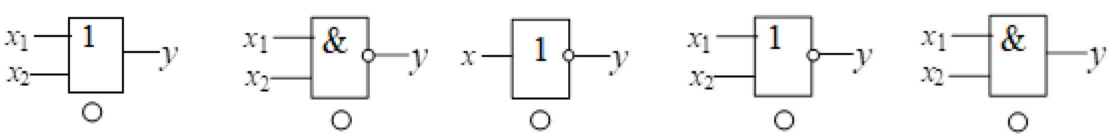
4. Укажите **выражение** логической функции трех переменных *a, б* и *c*, записанной в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ).

○ $y(a, b, c) = \bar{a}bc + a\bar{b}c + ab\bar{c} + abc$;

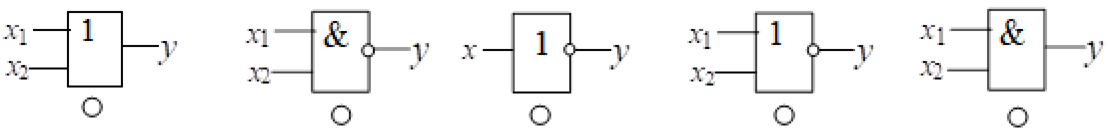
○ $y(a, b, c) = (a + b + c)(a + b + \bar{c})(a + \bar{b} + c)(\bar{a} + b + c)$;

○ $y(a, b, c) = (\bar{a}b + c + a\bar{b}c)(ab\bar{c} + \overline{ab} + \bar{c}a)$.

5. Укажите **элемент** ИЛИ-НЕ.



6. Укажите **элемент** И.



7. Укажите значение **функции** $y = (ab + \bar{c})(\bar{a} + \bar{b})$, если $a = b = c = 1$.

○ 1 ○ 0

Список рекомендуемой литературы

1. Цифровая схемотехника: учебное пособие для студентов, магистрантов специальности "Вычислительная техника и программное обеспечение" / В.А. Эттель, О.А.Кан; М-во образования и науки РК, Карагандинский государственный технический университет, Кафедра "Информационные технологии и безопасность". - Караганда: КарГТУ, 2019. - 99 с.: ил., табл.
2. Новожилов, О. П. Основы микропроцессорной техники: в 2-х т. / О. П. Новожилов. - М.: РадиоСофт, 2012 - Т. 2: учебное пособие. - 2-е изд. - М., 2012. - 333 с.
3. Новиков, Ю. В. Введение в цифровую схемотехнику: учебное пособие / Ю. В. Новиков. - М.: Интуит, 2016. — 393 с. https://intuit.ru/studies/courses/104/104/info
4. Миленина, С. А. Электроника и схемотехника: учебник и практикум для вузов / С. А. Миленина; под редакцией Н. К. Миленина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 270 с.