6 Реттегіштердің бірлескен өзара әрекеттесу кезінде желдету ағындарының өзара байланыстылығы

Бұл ретте тораптар бойынша $\sum_{i \in S} q_i = 0$ дифференциалдау кәдімгі түрде орындалады және кез келген реттегі туындыларды анықтау кезінде теңдік әділ болады

$$\sum_{i \in S} \frac{\partial^{(n)} q_i}{\partial \alpha_1^{(l)} \partial \alpha_2^{(k)} \partial \alpha_3^{(r)} ... \partial \alpha_p^{(s)}} = 0, \ n = \overline{1, n}. \tag{6.86}$$

Осыдан дифференциалдау процесінде *i*-лі торапта ауа шығындарының алгебралық қосындысы тиісті реттегі анықталатын туындылардың алгебралық қосындысы айырбасталады.

Контур бойынша аралас туындыларды анықтау кезінде $F_i^{(p)}$ реттегі дербес туындыларды алдын ала табу ұсынылады, сосын басқа параметрлер бойынша дифференциалдай отырып, аралас туындыларды анықтауға көшеді.

Аралас туындыларды есептеу үшін теңдеулерді қалыптастырудың кейбір ерекшеліктерін анықтау мақсатында α_j, α_p екі айнымалы бойынша $F = R_i q_i^2$ функциясын бірізділікті дифференциалдаймыз.

Бірінші реттегі туындыларды есептеу кезінде формуланың жалпы түрі қандай параметр бойынша қарастырылатын функцияны дифференциалдауға байланысты емес.

Шынында,

$$F_{\alpha_j}^{(1)} = 2R_i q_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}, \text{ если } \alpha_j \neq R_i; \tag{6.87}$$

$$F_{\alpha_j}^{(1)} = 2R_i q_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + q_i^2, \text{ если } \alpha_j = R_i. \tag{6.88}$$

Екінші айнымалы α_p параметр бойынша (4.87) дифференциалдай отырып, екінші реттегі аралас туындыларды есептеу үшін теңдеуді аламыз. Бұл ретте екі нұсқа мүмкін, онда $\alpha_p \neq R_i$ и $\alpha_p = R_i$.

Көбінесе,

$$F^{(2)}_{\alpha_j\alpha_p} = 2R_iq_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j\partial\alpha_p} + 2R_i\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_p}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_j}, \tag{6.89}$$
$$\text{если } \alpha_j \neq R_i; \alpha_p = R_i$$

және

$$F^{(2)}_{\alpha_j\alpha_p} = 2R_iq_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j\partial\alpha_p} + 2R_i\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_p}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_j} + 2q_i\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_j}, \tag{6.90}$$
$$\text{если } \alpha_j \neq R_i,\ \alpha_p = R_i.$$

Дифференциалдау кезінде (4.88) назар аударамыз, егер $\alpha_j = R_i$ болса, онда $\alpha_p \neq R_i$ айқын, сондықтан

$$F^{(2)}_{\alpha_j\alpha_p} = 2R_iq_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j\partial\alpha_p} + 2R_i\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_p}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_j} + 2q_i\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_p}, \tag{6.91}$$
$$\text{если } \alpha_j = R_i,\ \alpha_p \neq R_i.$$

(4.90) және (4.91) салыстыра отырып, алғашқы екі қосылғыш дифференциалдауға байланысты емес екеніне оңай көз жеткізуге болады және (4.89) сияқты қалады. Үшінші қосылғышта айнымалы дифференциалдау өзгереді. Егер $\alpha_p = R_i$ болса, онда q_i туынды α_j бойынша алынады, егер $\alpha_j = R_i$ болса, онда α_p бойынша сәйкес алынады.

Үшінші реттегі аралас туындыларды есептеу кезінде $F^{(3)}_{\alpha_j^2\alpha_p}, F^{(3)}_{\alpha_p\alpha_j^2}, F^{(3)}_{\alpha_j\alpha_p^2}, F^{(3)}_{\alpha_p^2\alpha_j}$ нұсқалары мүмкін. Алайда, аралас туындылардың жалпы белгілі қасиеттерін назарға алып, яғни дифференциалдау нәтижесі дифференциалдау өтетін ретке байланысты емес болғанда, $F^{(3)}_{\alpha_j^2\alpha_p} = F^{(3)}_{\alpha_p\alpha_j^2}; F^{(3)}_{\alpha_j\alpha_p^2} = F^{(3)}_{\alpha_p^2\alpha_j}$ деп болжауға болады.

(4.89) және (4.90) өрнектерін әрі қарай дифференциалдауды жалғастыра беріп, мысалы, α_j бойынша, аламыз

$$F^{(3)}_{\alpha_j^2\alpha_p} = 2R_iq_i\frac{\partial^3 q_i}{\partial\alpha_j^2\partial\alpha_p} + 4R_i\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_j}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j\partial\alpha_p} + 2R_i\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_p}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j^2}, \tag{6.92}$$
$$\text{если } \alpha_j = R_i,\ \alpha_p \neq R_i;$$

$$F^{(3)}_{\alpha_j^2\alpha_p} = 2R_i q_i \frac{\partial^3 q_i}{\partial\alpha_j^2 \partial\alpha_p} + 4R_i \frac{\partial q_i}{\partial\alpha_j}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j \partial\alpha_p} + 2R_i \frac{\partial q_i}{\partial\alpha_p}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j^2} +$$

$$+ 2R_i \frac{\partial q_i}{\partial\alpha_p}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j^2} + 2q_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j^2} + 2\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_j}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_j}, \text{ если } \alpha_j \neq R_i, \alpha_p = R_i; \qquad (6.93)$$

$$F^{(3)}_{\alpha_j^2\alpha_p} = 2R_i q_i \frac{\partial^3 q_i}{\partial\alpha_j^2 \partial\alpha_p} + 4R_i \frac{\partial q_i}{\partial\alpha_j}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j \partial\alpha_p} + 2R_i \frac{\partial q_i}{\partial\alpha_p}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j^2} +$$

$$+ 4q_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j \partial\alpha_p} + 4\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_j}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_p}, \text{ если } \alpha_j = R_i, \alpha_p \neq R_i. \qquad (6.94)$$

Үш $\alpha_j, \alpha_p, \alpha_s$ айнымалы жағдайында аламыз

$$F^{(3)}_{\alpha_j\alpha_p\alpha_s} = 2R_i q_i \frac{\partial^3 q_i}{\partial\alpha_j \partial\alpha_p \partial\alpha_s} + 2R_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_p \partial\alpha_s} + 2R_i \frac{\partial q_i}{\partial\alpha_p}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j \partial\alpha_s} +$$

$$+ 2R_i \frac{\partial q_i}{\partial\alpha_s}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j \partial\alpha_p}, \text{ если } \alpha_j \neq R_i, \alpha_p \neq R_i, \alpha_s = R_i. \qquad (6.95)$$

$$F^{(3)}_{\alpha_j\alpha_p\alpha_s} = 2R_i q_i \frac{\partial^3 q_i}{\partial\alpha_j \partial\alpha_p \partial\alpha_s} + 2R_i \frac{\partial q_i}{\partial\alpha_j}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_p \partial\alpha_s} + 2R_i \frac{\partial q_i}{\partial\alpha_p}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j \partial\alpha_s} +$$

$$+ 2R_i \frac{\partial q_i}{\partial\alpha_s}\frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j \partial\alpha_p} + 2q_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial\alpha_j \partial\alpha_s} + 2\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_j}\frac{\partial q_i}{\partial\alpha_s},$$

$$\text{если } \alpha_j \neq R_i, \alpha_p = R_i, \alpha_s \neq R_i. \qquad (6.96)$$

Теңдеулерді әрі қарай қалыптастыру үш параметрден және оларды екі-екіден іріктеп алуда аралас туындыларды есептеу бойынша жоғарыда баяндалған формулаларға сәйкес анықталады.

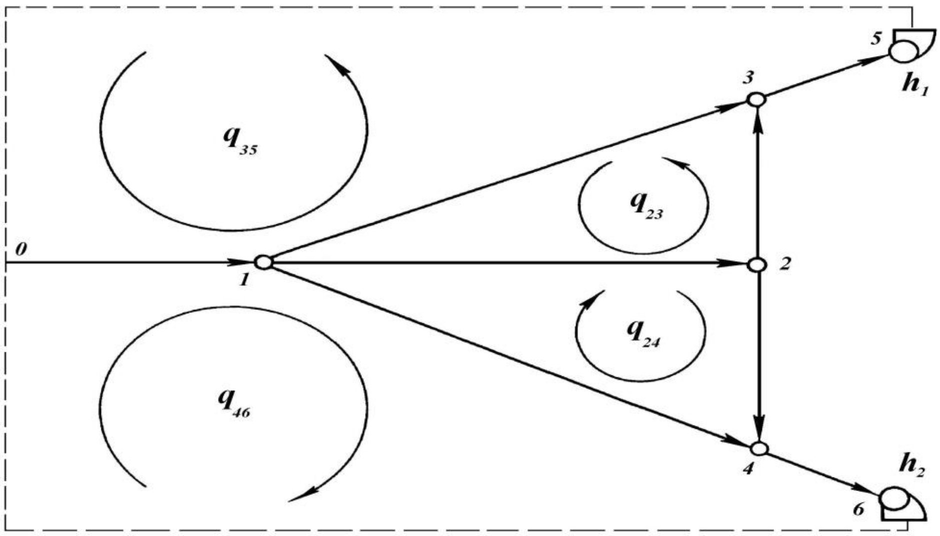
Осылайша жалғастыра отырып, төртінші, бесінші және т.б. реттегі аралас туындыларды енгізетін теңдеулер құрастыруға болады. Алайда, (4.85) тәуелділігін пайдалана отырып, есептеу практикасы көрсеткендей шешімнің қолданылатын дәлдігі үшінші реттегі туындыларды есептеу және пайдалану кезінде қол жеткізіледі.

(4.85) қатарлардың ұқсастығы, егер өзара байланысу теңдеуіне енетін $\alpha_j, j = \overline{1,p}$, айнымалы параметрлердің әрқайсысы үшін (4.76) шартымен орындалатын болса, қамтамасыз етіледі.

24-мысал. 4.13-суретте берілген сұлба үшін h_1 және h_2 желдеткіштер депрессиясының өзгерісіне байланысты 3-5 тармақтағы ауа шығынын анықтау үшін есептеу формуласын табу талап етіледі. Желдеткіш депрессиясы реттеу сәтінде $h_{1,0}$ = 274 даПа, $h_{2,0}$ = 223 даПа сәйкес тең.

4.4-кесте. 4.13-суреттегі есептеу сұлбасына базалық мәндер

Тармақ коды	0,1	1,2	1,3	1,4	2,3	2,4	3,5	4,6
q,м^3/с	80	45	20	15	30	15	50	30
R, даПа·с^2/м^6	0,1	0,012	0,15	0,507	0,04	0,4	0,06	0,05



4.13 –сурет. Есептік төрт контурлы желдету сұлбасы

(4.85)-ға сәйкес екі айнымалының функциясы үшін *i*–лі тармақтағы ауаны анықтау бойынша есептеу формуласы мына түрді қабылдайды

$$q_i(h_1,h_2)=q_{i,0}(h_1,h_2)+\left[(h_1-h_{1,0})\frac{\partial q_i}{\partial h_1}+(h_2-h_{2,0})\frac{\partial q_i}{\partial h_2}\right]+\frac{1}{2}\Big[(h_1-h_{1,0})^2\times$$
$$\times\frac{\partial^2 q_i}{\partial h_1^2}+2(h_1-h_{1,0})\,(h_2-h_{2,0})\frac{\partial^2 q_i}{\partial h_2^2}+(h_2-h_{2,0})^2\,\frac{\partial q_i}{\partial h_2^2}\Big]+$$
$$+\frac{1}{6}\Big[(h_1-h_{1,0})^3\,\frac{\partial^3 q_i}{\partial h_1^3}+3(h_1-h_{1,0})^2(h_2-h_{2,0})\frac{\partial^3 q_i}{\partial h_1^2\partial h_2}+ \qquad (6.97)$$
$$+\,3(h_1-h_{1,0})\,(h_2-h_{2,0})^2\,\frac{\partial^3 q_i}{\partial h_1\partial h_2^2}+(h_2-h_{2,0})^3\frac{\partial^3 q_i}{\partial h_2^3}\Big]+\cdot\;\cdot$$

Себебі $h_{1,0}$,$h_{2,0}$,$q_{i,0}$ берілді, ал h_1 және h_2 аралықтағы кез келген мәндерді қабылдай алуы мүмкін (4.76), онда есеп базалық ағын бөлуге сәйкес келетін нүктелерде есептелетін дербес туындыларды табуға әкеледі.

Егер q_{35} ,q_{46} ,q_{23} ,q_{24} тәуелсіз шығындарды қарастырсақ, онда келтірілген сұлба үшін теңдеулер жүйесі келесі түрде жазылады

$$\begin{cases} R_{01}\left(q_{35}+q_{46}\right)^2+R_{13}\left(q_{35}-q_{23}\right)^2+R_{35}q_{35}^2=h_1\ ; \\ R_{01}\left(q_{35}+q_{46}\right)^2+R_{14}\left(q_{46}-q_{24}\right)^2+R_{46}q_{46}^2=h_2\ ; \\ -R_{13}\left(q_{35}-q_{23}\right)^2+R_{23}q_{23}^2+R_{12}\left(q_{23}+q_{24}\right)^2=0; \\ R_{12}\left(q_{23}+q_{24}\right)^2+R_{24}q_{24}^2-R_{14}\left(q_{46}-q_{24}\right)^2=0. \end{cases} \tag{6.98}$$

$h_2=const$ деп болжам жасай отырып h_1 айнымалы параметр бойынша (4.98) жүйесін дифференциалдаймыз

$$\begin{cases} 2R\left(q_{35}+q_{46}\right)\left(\frac{\partial q_{35}}{\partial h_1}+\frac{\partial q_{46}}{\partial h_1}\right)+2R_{35}q_{35}\frac{\partial q_{35}}{\partial h_1}+2R_{13}\left(q_{35}-q_{23}\right)\left(\frac{\partial q_{35}}{\partial h_1}-\frac{\partial q_{23}}{\partial h_1}\right)=1; \\ 2R_{01}\left(q_{35}+q_{46}\right)\left(\frac{\partial q_{35}}{\partial h_1}+\frac{\partial q_{46}}{\partial h_1}\right)+2R_{46}q_{46}\frac{\partial q_{46}}{\partial h_1}+2R_{14}\left(q_{46}-q_{24}\right)\left(\frac{\partial q_{46}}{\partial h_1}-\frac{\partial q_{24}}{\partial h_1}\right)=0; \\ -2R_{13}\left(q_{35}-q_{23}\right)\left(\frac{\partial q_{35}}{\partial h_1}-\frac{\partial q_{23}}{\partial h_1}\right)+2R_{23}q_{23}\frac{\partial q_{23}}{\partial h_1}+2R_{12}\left(q_{23}+q_{24}\right)\left(\frac{\partial q_{23}}{\partial h_1}+\frac{\partial q_{24}}{\partial h_1}\right)=0; \\ 2R_{12}\left(q_{23}+q_{24}\right)\left(\frac{\partial q_{23}}{\partial h_1}+\frac{\partial q_{24}}{\partial h_1}\right)+2R_{24}q_{24}\frac{\partial q_{24}}{\partial h_1}--2R_{14}\left(q_{46}-q_{24}\right)\left(\frac{\partial q_{46}}{\partial h_1}-\frac{\partial q_{24}}{\partial h_1}\right)=0. \end{cases}$$

R және q орнына 4.4-кестеде берілген тиісті мәндерді қойғаннан кейін теңдеулер жүйесі мына түрге түрленеді:

$$\begin{cases} 13{,}6\frac{\partial q_{35}}{\partial h_1}+1{,}6\frac{\partial q_{46}}{\partial h_1}-6\frac{\partial q_{23}}{\partial h_1}=1; \\ 1{,}6\frac{\partial q_{35}}{\partial h_1}+19{,}81\frac{\partial q_{46}}{\partial h_1}-15{,}21\frac{\partial q_{24}}{\partial h_1}=0; \\ -6\frac{\partial q_{35}}{\partial h_1}+9{,}48\frac{\partial q_{23}}{\partial h_1}+1{,}08\frac{\partial q_{24}}{\partial h_1}=0; \\ -15{,}21\frac{\partial q_{46}}{\partial h_1}+1{,}08\frac{\partial q_{23}}{\partial h_1}+28{,}25\frac{\partial q_{24}}{\partial h_1}=0\ , \end{cases}$$

осыдан бастапқы туындыларды табамыз

$$\frac{\partial q_{35}}{\partial h_1}=106{,}09\cdot10^{-3};\ \frac{\partial q_{46}}{\partial h_1}=-18{,}03\cdot10^{-3};\ \frac{\partial q_{23}}{\partial h_1}=68{,}37\cdot10^{-3};\ \frac{\partial q_{24}}{\partial h_1}=-12{,}32\cdot10^{-3}.$$

h_2 бойынша дифференциалдаудан (6.98) кейін $h_1=const$ кезінде базалық деректерді қойғаннан кейін теңдеулердің келесі жүйесін аламыз

$$\begin{cases} 13,6\dfrac{\partial q_{35}}{\partial h_1}+1,6\dfrac{\partial q_{46}}{\partial h_2}-6\dfrac{\partial q_{23}}{\partial h_2}=0; \\ 1,6\dfrac{\partial q_{35}}{\partial h_2}+19,81\dfrac{\partial q_{46}}{\partial h_2}-15,21\dfrac{\partial q_{24}}{\partial h_2}=1; \\ -6\dfrac{\partial q_{35}}{\partial h_2}+9,48\dfrac{\partial q_{23}}{\partial h_2}+1,08\dfrac{\partial q_{24}}{\partial h_2}=0; \\ -15,21\dfrac{\partial q_{46}}{\partial h_2}+1,08\dfrac{\partial q_{23}}{\partial h_2}+28,25\dfrac{\partial q_{24}}{\partial h_2}=0, \end{cases}$$

онда коэффициенттер матрицасы туындылар кезінде өзгеріссіз қалады, дифференциалдау параметрдің өзгерісі күшінде тек оң жақ бөлігі ғана айырбасталады. Аталған жүйенің шешімі туындылардың келесі мәндерін береді:

$$\frac{\partial q_{35}}{\partial h_2}=-18,06\cdot 10^{-3}\ ;\ \frac{\partial q_{46}}{\partial h_2}=89,39\cdot 10^{-3}\ ;$$

$$\frac{\partial q_{23}}{\partial h_2}=-17,03\cdot 10^{-3}\ ;\ \frac{\partial q_{24}}{\partial h_2}=48,78\cdot 10^{-3}.$$

Екінші және үшінші реттегі туындылар осыған ұқсас есептеледі. Бұл ретте теңдеулер жүйесі h_1 және h_2 қарастырылатын аргументтер бойынша (4.98) біріздділікті дифференциалдау арқылы қалыптасады. Бұл есептеулердің нәтижесі 4.5-кестеде берілген.

4.5-кесте. Туындыларды есептеу нәтижелері

Контурлы ағындардан туындылар	Контурлы ағындардан туындылардың сандық мәндері			
	q_{35}	q_{46}	q_{23}	q_{24}
$\left(\partial q_{ij} / \partial h_1\right)\cdot 10^{3}$	106,09	-18,03	68,37	-12,32
$\left(\partial^2 q_{ij} / \partial h_1^2\right)\cdot 10^{6}$	-201,79	13,38	-130,43	6,39
$\left(\partial^3 q_{ij} / \partial h_1^3\right)\cdot 10^{9}$	1163,56	-70,28	764,82	-46,94
$\left(\partial q_{ij} / \partial h_2\right)\cdot 10^{3}$	-18,06	89,39	--17,03	48,78
$\left(\partial^2 q_{ij} / \partial h_2^2\right)\cdot 10^{6}$	31,39	-239,11	30,75	-138,98
$\left(\partial^3 q_{ij} / \partial h_2^3\right)\cdot 10^{9}$	-263,56	1934,61	-264,92	1198,77
$\left(\partial^2 q_{ij} / \partial h_1 \partial h_2\right)\cdot 10^{6}$	7,54	31,34	6,14	23,84
$\left(\partial^3 q_{ij} / \partial^2 h_1 \partial_2\right)\cdot 10^{9}$	-75,25	26,75	-70,04	32,50
$\left(\partial^3 q_{ij} / \partial h_1 \partial h_2^2\right)\cdot 10^{9}$	42,44	-264,95	46,38	-212,98

Аралас туындыларды есептеу тәртібін қарастырамыз. Себебі анықталатын туындылар кезінде коэффициенттер матрицасы өзгеріссіз қалады, онда есеп оң жақ бөліктегі еркін мүшелерді қалыптастырудан тұрады. Мысалы, $\partial^2 q_i / \partial h_1 \partial h_2$ аралас туындыларды есептеу кезінде оң жақ бөлікті (4.89) тәуелділік негізінде қалыптастырамыз, одан жоғары реттегі туындыларды алып тастаймыз. Қорытындысында аламыз

$$\begin{cases} 13{,}6\dfrac{\partial^2 q_{35}}{\partial h_1 \partial h_2}+1{,}6\dfrac{\partial^2 q_{46}}{\partial h_1 \partial h_2}-6\dfrac{\partial^2 q_{23}}{\partial h_1 \partial h_2}=-2R_{01}\left(\dfrac{\partial q_{35}}{\partial h_1}+\dfrac{\partial q_{46}}{\partial h_1}\right)\left(\dfrac{\partial q_{35}}{\partial h_2}+\dfrac{\partial q_{46}}{\partial h_2}\right)- \\ -2R_{13}\left(\dfrac{\partial q_{35}}{\partial h_1}-\dfrac{\partial q_{23}}{\partial h_1}\right)\left(\dfrac{\partial q_{35}}{\partial h_2}-\dfrac{\partial q_{23}}{\partial h_2}\right)-2R\dfrac{\partial q_{35}}{\partial h_1}\dfrac{\partial q_{35}}{\partial h_2}; \\ 1{,}6\dfrac{\partial^2 q_{35}}{\partial h_1 \partial h_2}+19{,}81\dfrac{\partial^2 q_{46}}{\partial h_1 \partial h_2}-15{,}21\dfrac{\partial^2 q_{24}}{\partial h_1 \partial h_2}=-2R_{01}\left(\dfrac{\partial q_{35}}{\partial h_1}+\dfrac{\partial q_{46}}{\partial h_1}\right)\left(\dfrac{\partial q_{35}}{\partial h_2}+\dfrac{\partial q_{46}}{\partial h_2}\right)- \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2R_{14}\left(\dfrac{\partial q_{46}}{\partial h_1}-\dfrac{\partial q_{24}}{\partial h_1}\right)\left(\dfrac{\partial q_{46}}{\partial h_2}-\dfrac{\partial q_{24}}{\partial h_2}\right)-2R_{46}\dfrac{\partial q_{46}}{\partial h_1}\dfrac{\partial q_{46}}{\partial h_2}; \\ -6\dfrac{\partial^2 q_{35}}{\partial h_1 \partial h_2}+9{,}48\dfrac{\partial^2 q_{23}}{\partial h_1 \partial h_2}+1{,}08\dfrac{\partial^2 q_{24}}{\partial h_1 \partial h_2}=2R_{13}\left(\dfrac{\partial q_{35}}{\partial h_1}-\dfrac{\partial q_{23}}{\partial h_1}\right)\left(\dfrac{\partial q_{35}}{\partial h_2}-\dfrac{\partial q_{23}}{\partial h_2}\right)- \\ -2R_{12}\left(\dfrac{\partial q_{23}}{\partial h_1}+\dfrac{\partial q_{24}}{\partial h_1}\right)\left(\dfrac{\partial q_{23}}{\partial h_2}+\dfrac{\partial q_{24}}{\partial h_2}\right)-2R_{23}\dfrac{\partial q_{23}}{\partial h_1}\dfrac{\partial q_{23}}{\partial h_2}; \\ 15{,}21\dfrac{\partial^2 q_{46}}{\partial h_1 \partial h_2}+1{,}08\dfrac{\partial^2 q_{23}}{\partial h_1 \partial h_2}+28{,}25\dfrac{\partial^2 q_{24}}{\partial h_1 \partial h_2}=-2R_{12}\left(\dfrac{\partial q_{23}}{\partial h_1}+\dfrac{\partial q_{24}}{\partial h_1}\right)\left(\dfrac{\partial q_{23}}{\partial h_2}+\dfrac{\partial q_{24}}{\partial h_2}\right)+ \\ +2R_{14}\left(\dfrac{\partial q_{46}}{\partial h_1}-\dfrac{\partial q_{24}}{\partial h_1}\right)\left(\dfrac{\partial q_{46}}{\partial h_2}-\dfrac{\partial q_{24}}{\partial h_2}\right)-2R_{24}\dfrac{\partial q_{24}}{\partial h_1}\dfrac{\partial q_{24}}{\partial h_2}. \end{cases}$$

R_i орнына бірінші реттегі туындылардың сандық мәндерін қойғаннан кейін келесі жүйеге көшеміз

$$\begin{cases} 13{,}6\dfrac{\partial^2 q_{35}}{\partial h_1 \partial h_2}+1{,}6\dfrac{\partial^2 q_{46}}{\partial h_1 \partial h_2}-6\dfrac{\partial^2 q_{23}}{\partial h_1 \partial h_2}=115{,}947\cdot 10^{-6}; \\ 1{,}6\dfrac{\partial^2 q_{35}}{\partial h_1 \partial h_2}+19{,}81\dfrac{\partial^2 q_{46}}{\partial h_1 \partial h_2}-15{,}21\dfrac{\partial^2 q_{24}}{\partial h_1 \partial h_2}=270{,}568\cdot 10^{-6}; \\ -6\dfrac{\partial^2 q_{35}}{\partial h_1 \partial h_2}+9{,}48\dfrac{\partial^2 q_{23}}{\partial h_1 \partial h_2}+1{,}08\dfrac{\partial^2 q_{24}}{\partial h_1 \partial h_2}=38{,}778\cdot 10^{-6}; \\ -15{,}21\dfrac{\partial^2 q_{46}}{\partial h_1 \partial h_2}+1{,}08\dfrac{\partial^2 q_{23}}{\partial h_1 \partial h_2}+28{,}25\dfrac{\partial^2 q_{24}}{\partial h_1 \partial h_2}=203{,}159\cdot 10^{-6}. \end{cases}$$

Осы жерде табамыз

$$\frac{\partial^2 q_{35}}{\partial h_1 \partial h_2} = 7,536 \cdot 10^{-6}\ ;\ \frac{\partial^2 q_{46}}{\partial h_1 \partial h_2} = 31,342 \cdot 10^{-6}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 q_{23}}{\partial h_1 \partial h_2} = 6,14 \cdot 10^{-6}\ ;\ \frac{\partial^2 q_{24}}{\partial h_1 \partial h_2} = 23,835 \cdot 10^{-6}.$$

Аналогтық әдістемес бойынша (4.92) және (4.95) формуласы пайдалана отырып, үшінші реттегі аралас туындыларды табамыз. Қорытынды есептеу нәтижесі 4.5-кестеде келтірілген.

Өйткені кез келген реттегі туындылардың алгебралық қосындысы ***i***-лі торапта нольге тең, тәуелсіз шығындардан белгісіз туындылар қалған тармақтар үшін тиісті реттегі туындылар оңай анықталады.

(4.97) орнына $q_{i,0}\ , h_{1,0}\ , h_{2,0}$ оларды базалық деректерін қойса, ал туындылар орнына 4.5-кестеден олардың сандық мәндерін қойса, жіктеудің үш мүшесіне дейін дәлдікпен 3-5 тармақтағы ауа шығындарының өзгерісін анықтау үшін ізделетін есептеу формуласын аламыз.

$$\begin{aligned} q_{35} &= 50 + \left[106,09\left(h_1 - 274\right) - 18,06\left(h_2 - 223\right)\right] \cdot 10^{-3} + \\ &+ \frac{1}{2}\left[-201,79\left(h_1 - 274\right)^2 + 2 \cdot 7,54\left(h_1 - 274\right)\left(h_2 - 223\right) + 31,39\left(h_2 - 223\right)^2\right] \cdot 10^{-6} + \\ &+ \frac{1}{6}\left[1163,56\left(h_1 - 274\right)^3 - 3 \cdot 75,25\left(h_1 - 274\right)^2\left(h_2 - 223\right) + 3 \cdot 42,44\left(h_1 - 274\right) \times \right. \\ &\left. \times \left(h_2 - 223\right)^2 - 263,56\left(h_2 - 223\right)^3\right] \cdot 10^{-9}. \end{aligned}$$

Қалған ағындар үшін есептеу формуласын осыған ұқсас қып табады. Табылған тәуелділіктер негізінде алынған нәтижелерді сандық бағалау $170 \geq h_1 \geq 400, 120 \geq h_2 \geq 350$ шегінде кез келген нұсқада желдеткіш жұмысының режимін өзгерту кезінде есептеудегі қателік 5 %-дан аспайтынын көрсетеді.

6.4.3 Туындыларды есептеу бойынша теңдеулер құрудың жалпы алгоритмі

Жоғарыда қарастырылған есептерді шешу $\alpha_j\ , j = \overline{1, p}$ айнымалы параметр бойынша $F_i = R_i q_i^2$ түрдегі функциямен байланысты. ЭЕМ-да тікелей дифференциалдау күрделі, ал қолмен – туындыларды есептеу бойынша теңдер жүйесін құру кезінде дайындау операцияларының жалпы көлемінің күрт ұлғайту күшінде рационалды емес.

Туындыларды анықтау алгоритмін ықшамдау процесінде функцияның бірізділікті дифференциалдау процесін

$$F_i = R_i q_i^2 \qquad (6.99)$$

α_j, $j=\overline{1,p}$ айнымалы параметр бойынша қарастырамыз. Бұл ретте екі жағдай мүмкін.

1. $\alpha_i \neq R_i$ болсын, онда $\left(\partial R_i / \partial \alpha_j\right) = 0$. Екі функцияның көбейтіндісі ретінде (4.99) қарастыратын боламыз, яғни

$$F_i = R_i \left(q_i q_i\right). \tag{6.100}$$

Айнымалы α_j параметр бойынша (4.100) дифференциалдай отырып, аламыз

$$F_i^{(1)} = R\left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} q_j + q_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}\right).$$

Қайталап дифференциалдаудан кейін, аламыз

$$F_i^{(2)} = \left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} q_i + \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + q_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2}\right) =$$

$$= R_i \left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} q_i + 2\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + q_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2}\right).$$

Тағы да дифференциалдай отырып, аламыз

$$F_i^{(3)} = R_i \left(\frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3} q_i + \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + 2\frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_l^2}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + 2\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}\frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} + \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}\frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} + \right.$$

$$\left. + q_i \frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3}\right) = R\left(\frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3} q_i + 3\frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2}\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + 3\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j}\frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} + q_i \frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3}\right).$$

Табылған тәуелділіктерді салыстыра отырып, мынадай қорытындыға келеміз, олар n = 2 және n = 3жағдай үшін $\left(q_i + q_i\right)^n$ өрнегін жіктеу кезінде бинарлық Ньютонға сәйкес келеді. Сондықтан, Лейбниц формуласы тура болады және қарастырылатын функциядан n-лі реттегі туынды мына өрнектен анықталады

$$F_i^{(n)} = R_i \left[q_i \frac{\partial^{(n)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n)}} + \frac{n}{1!} \frac{\partial^{(n-1)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-1)}} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{\partial^{(n-2)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-2)}} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} + \right.$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{\partial^{(n-3)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-3)}} \frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-2)]}{(n-1)!} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial^{(n-1)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-1)}} + \qquad (6.101)$$

$$\left. + \; q_i \frac{\partial^{(n)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n)}} \right], \; n = \overline{2,n},$$

мұнда n – анықталатын туынды ретіне сәйкес келетін көрсеткіш, себебі $\partial^{(0)} q_i / \partial \alpha_j^{(0)} = 0$, ең шеткі мүшеге енетін q функцияның өзімен айырбасталады.

Мысал келтіреміз. (4.99) өрнектен сегізінші реттегі туындыны есептеу үшін есептеу формуласын алу талап етілсін. (4.101)-ға сәйкес, аламыз

$$F_i^{(8)} = R_i \left[q_i \frac{\partial^8 q_i}{\partial \alpha_j^8} + 8 \frac{\partial^7 q_i}{\partial \alpha_j^7} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \frac{\partial^6 q_i}{\partial \alpha_j^6} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{\partial^5 q_i}{\partial \alpha_j^5} \frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3} + \right.$$

$$+ \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{\partial^4 q_i}{\partial \alpha_j^4} \frac{\partial^4 q_i}{\partial \alpha_j^4} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3} \frac{\partial^5 q_i}{\partial \alpha_j^5} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \times$$

$$\left. \times \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} \frac{\partial^6 q_i}{\partial \alpha_j^6} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial^7 q_i}{\partial \alpha_j^7} + q_i \frac{\partial^8 q_i}{\partial \alpha_j^8} \right] =$$

$$= 2 R_i q_j \frac{\partial^8 q_i}{\partial \alpha_j^8} + 16 R_i \frac{\partial^7 q_i}{\partial \alpha_j^7} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + 56 R_i \frac{\partial^6 q_i}{\partial \alpha_j^6} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} +$$

$$+ 112 \frac{\partial^5 q_i}{\partial \alpha_j^5} \frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3} + 70 R_i \left(\frac{\partial^4 q_i}{\partial \alpha_j^4} \right)^2 .$$

(4.99) функциясын бірізділікті дифференциалдау арқылы алынған өрнектің тура екендігіне көз жеткіз оңай.

2. Егер $\alpha_j = R_i$ болсын, онда (4.101) формуласы қосылғыштармен толықтырылатын болады, яғни ол үшін $(\partial R_i / \partial \alpha_j) = 1$. (4.99) функциясын үш функцияның көбейтіндісі ретінде қарастырамыз, онда

$$F_j^{(1)} = R_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} q_i + q_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right) + q_i q_i \, . \qquad (6.102)$$

Оң жақ бөліктегі екінші қосылғыш (4.102) $R_i = 1$ кезінде екі функцияның көбейтіндісі болып табылады, оны дифференциалдау жоғарыда баяндалған алгоритмге тең келеді. Көбінесе, екінші туындыны анықтай отырып, аламыз

$$F_i^{(2)} = R_i \left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} q_i + 2 \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + q_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} \right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} q_i + q_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right) + \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} q_i + q_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right),$$

осы жерде ұсынылады

$$F_i^{(2)} = R_i \left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} q_i + 2 \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + q_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} q_i + q_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \right).$$

Дифференциалдауды жалғастыра отырып, аламыз

$$F_i^{(3)} = R_i \left(\frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3} q_i + 3 \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + 3 \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} + q_i \frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3} \right) +$$

$$+ 3 \left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} q_i + 2 \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + q_i \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} \right).$$

Тағы да бір дифференциалдай отырып, төртінші реттегі туындыны есептеу үшін өрнегін табамыз

$$F_i^{(4)} = R_i \left(\frac{\partial^4 q_i}{\partial \alpha_j^4} q_i + 4 \frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + 6 \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} + 4 \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3} + q_i \frac{\partial^4 q_i}{\partial \alpha_j^4} \right) +$$

$$+ 4 \left(\frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3} q_i + 3 \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + 3 \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} + q \frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3} \right).$$

Алынған нәтижені бағалай отырып, қарастырылатын жағдай үшін Лейбниц ережесі тура деген қорытындыға келеміз. n = 2-дан бастай отырып, туындыларды есептеу үшін функционалдық тәуелділіктерді қалыптастыру процесі биномдық жіктеуге бағынады.

Сондықтан,

$$F_i^{(n)} = R_i \left[\frac{\partial^{(n)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n)}} q_i + \frac{n}{1!} \frac{\partial^{(n-1)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-1)}} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{\partial^{(n-2)} q_i}{\partial \alpha^{(n-2)}} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} + \right.$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{\partial^{(n-3)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-3)}} \frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-2)]}{(n-1)!} \times$$

$$\left. \times \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial^{(n-1)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-1)}} + q_i \frac{\partial^{(n)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n)}} \right] + n \left[\frac{\partial^{(n-1)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-1)}} q_i + \frac{n-1}{1!} \frac{\partial^{(n-2)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-2)}} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + \right.$$

$$+ \frac{(n-1)(n-2)}{2!} \frac{\partial^{(n-3)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-3)}} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} \frac{\partial^{(n-4)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-4)}} \times \tag{6.103}$$

$$\left. \times \frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3} + \ldots + \frac{(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-3)]}{(n-2)!} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial^{(n-2)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-2)}} + q_i \frac{\partial^{(n-1)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-1)}} \right];$$

$$n = \overline{2, n}.$$

Жалпы жағдайда баяндалған алгоритм оңай іске асырылады, егер теңдеулер жүйесін қалыптастыру процесінде еркін мүшелерді (4.101) және (4.102) формулалар бойынша табады, жоғары реттегі туындылармен алдын ала қосылғыштарды алып тастайды. Өйткені (4.101) және (4.103) формулалар дұрыс, n = 2- бастап, туындыларды анықтау бойынша есептерді шешу екі кезеңге бөлінеді.

Бірінші кезең мына теңдеулер жүйесінің шешімінен бірінші реттегі туындыларды анықтаумен байланысты

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in S} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} = 0; \\ \sum\limits_{i \in L} 2R_i q_i \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial h_L}{\partial \alpha_j} = 0, \text{ если } \alpha_j \neq R_i; \\ \sum\limits_{i \in L} 2Rq \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial h_f}{\partial \alpha_j} = -\sum\limits_i q_i^2, \text{ если } \alpha_j = R_i, \\ \qquad j = \overline{1, p}. \end{cases} \tag{6.104}$$

Екінші кезеңде мына түрдегі теңдеулер жүйесі қалыптасады

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\sum_i \frac{\partial^{(n)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n)}} = 0; \\
\sum_i 2R_i q_i \frac{\partial^{(n)}}{\partial \alpha_j^{(n)}} + \frac{\partial^{(n)} h_f}{\partial \alpha^{(n)}} = -\sum R_i \Bigg[\frac{n}{1!} \frac{\partial^{(n-1)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-1)}} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + \\
+ \frac{n(n-1)}{2!} \frac{\partial^{(n-2)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-2)}} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{\partial^{(n-3)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-3)}} \frac{\partial^3 q_{3i}}{\partial \alpha j} + \ldots \\
\ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-2)]}{(n-1)!} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial^{(n-1)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-1)}} \Bigg], \text{если } \alpha_j \neq R_i; \\
\sum_i 2R_i q_i \frac{\partial^{(n)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n)}} + \frac{\partial^{(n)} h_f}{\partial \alpha_j^{(n)}} = -\sum_i \Bigg\{ R_i \Bigg| \frac{n}{1!} \frac{\partial^{(n-1)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-1)}} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{\partial^{(n-2)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-2)}} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} + \\
+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{\partial^{(n-3)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-3)}} \frac{\partial^3 q_i}{\partial \alpha_j^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-2)]}{(n-1)!} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial^{(n-1)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-1)}} \Bigg] + \\
+ n \Bigg[q_i \frac{\partial^{(n-1)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-1)}} + \frac{n-1}{1!} \frac{\partial^{(n-2)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-2)}} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} \frac{\partial^{(n-3)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-3)}} \frac{\partial^2 q_i}{\partial \alpha_j^2} + \ldots + \\
+ \frac{(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-3)]}{(n-2)!} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha_j} \frac{\partial^{(n-2)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-2)}} + q_i \frac{\partial^{(n-1)} q_i}{\partial \alpha_j^{(n-1)}} \Bigg] \Bigg\}, \\
\qquad \text{если } \alpha_j = R_i;\ j = \overline{1, p}; n = \overline{2, n},
\end{array}
\right.
\tag{6.105}
$$

Одан n = 2-дан бастап, барлық келесі туындылар табылады.

Туындыларды есептеу үшін теңдеулер жүйесін матрицалық түрде беруге болады

$$
AX^{(n)} = S^{(n)}, \tag{6.106}
$$

мұнда A – туындылар кезіндегі коэффициенттер матрицасы;

$X^{(n)}$ – n реттегі туындылармен анықталатын матрица-бағандар;

$S^{(n)}$ – еркін мүшелердің матрица-бағандары.

Себебі A = const, онда туындылардың сандық мәндерін табу бойынша есеп, негізінен, (4.106) теңдеулердің оң жақ бөлігіндегі еркін мүшелерді анықтау тұтас алғанда шешімдерді маңызды қысқартады.

(4.104) және (4.105) теңдеулер жүйесін шешу айрықша қиыншылықтарды тудырмайды, өйткені салыстырмалы анықталатын туындыларға сызықты күйде болады.

Есептеулер нәтижесін (4.107) матрица түрінде беру қолайлы. Бірінші баған желдету жүйесінің барлық тармағындағы бірінші тармаққа әсерін ескереді, ал екіншісі желдету жүйесінің және т.б. барлық тармақтарына екінші бағынның әсерін сипаттайды. Мұндай матрицалардың жалпы саны туындымен анықталатын ретке сәйкес келеді.

$$X^{(n)}=\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial^{(n)}q_1}{\partial\alpha_1^{(n)}} & \dfrac{\partial^{(n)}q_2}{\partial\alpha_1^{(n)}} \cdots \dfrac{\partial^{(n)}q_m}{\partial\alpha_1^{(n)}}\\ \dfrac{\partial^{(n)}q_1}{\partial\alpha_2^{(n)}} & \dfrac{\partial^{(n)}q_2}{\partial\alpha_2^{(n)}} \cdots \dfrac{\partial^{(n)}q_m}{\partial\alpha_2^{(n)}}\\ \dfrac{\partial^{(n)}q_1}{\partial\alpha_3^{(n)}} & \dfrac{\partial^{(n)}q_2}{\partial\alpha_3^{(n)}} \cdots \dfrac{\partial^{(n)}q_m}{\partial\alpha_3^{(n)}}\\ \dfrac{\partial^{(n)}q_1}{\partial\alpha_4^{(n)}} & \dfrac{\partial^{(n)}q_2}{\partial\alpha_4^{(n)}} \cdots \dfrac{\partial^{(n)}q_m}{\partial\alpha_4^{(n)}}\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{\partial^{(n)}q_1}{\partial\alpha_j^{(n)}} & \dfrac{\partial^{(n)}q_2}{\partial\alpha_j^{(n)}} \cdots \dfrac{\partial^{(n)}q_m}{\partial\alpha_j^{(n)}}\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{\partial^{(n)}q_1}{\partial\alpha_m^{(n)}} & \dfrac{\partial^{(n)}q_2}{\partial\alpha_m^{(n)}} \cdots \dfrac{\partial^{(n)}q_m}{\partial\alpha_m^{(n)}}\end{matrix}\right\|, n=\overline{1,n}. \qquad (6.107)$$

Бірінші реттегі туындылар матрицаларының компоненттері *j*-лі әсер ететін элементтің әсерімен ауаны бөлу сипатындағы мүмкін өзгерістерді сапалы бағалауға мүмкіндік береді.