№1. Одноканальная однофазовая модель

Цель работы: имитационное моделирование информационных потоков с заданными параметрами на примере одноканальной однофазовой модели.

Краткая теория

Основой любого имитационного эксперимента на ЭВМ служит модель имитируемой системы. Под имитацией понимается численный метод проведения на цифровых вычислительных машинах: экспериментов с математическими моделями, описывающими поведение сложных систем в течение продолжительных периодов времени. Предположим, что модель уже сформирована, и все параметры заданы. Принципиальное отличие имитационного эксперимента от эксперимента в "реальном мире" состоит в том, что в процессе имитации эксперименты проводятся с моделью реальной системы, а не с самой системой.

Для полного понимания определения нам понадобится следующий набор понятий.

Пусть Y обозначает некоторую выходную (эндогенную) переменную, которую нужно изучить, а X - вектор, составленный из переменных (экзогенных переменных или переменных управления) X_i. По определению переменные X воздействуют на переменную Y в соответствии с функциональным соотношением $Y = \varphi(X)$.

Переменная Y называется реакцией, переменные X - факторами. Функция φ называется поверхностью реакции. Частным случаем соответствия $Y=\varphi(x)$ является простая линейная модель.

$$Y = \sum_{i=1}^{k} \theta_i * X_i \qquad (1.1.)$$

где θ_i - некоторые параметры. Изменяя либо θ, либо X, либо обе величины одновременно, можно имитировать реакцию.

Эта модель слишком проста и не реальна. Чтобы сделать эту модель реалистичнее, можно добавить случайную величину ε и переписать модель в виде

$$Y = \sum_{i=1}^{k} \theta_i * X_i + \varepsilon \qquad (1.2.)$$

Функция плотности вероятностей случайной величины задана в виде $f(\varepsilon, \mu)$, где μ - вектор параметров распределения. Модель можно сделать еще более реалистичной (и сложной), если в нее включить преобразования $g(Y)$ и $h(X_i)$ реакции Y и элементов вектора X. Некоторые из этих преобразований могут быть нелинейными и содержать дополнительные параметры. В модель можно включить также случайные величины γ_i, каждую с весом β_i и свежей функцией распределения ψ γ где μ - вектор параметров. Можно ввести зависимость от времени. Тогда модель примет вид:

$$g(Yt) = \sum_{i=1}^{k} \theta_i * h(X_{it}) + \sum_{j=1}^{m} \beta_i * \psi(\gamma_{it}, \mu^{r}) + f(\varepsilon, \mu) \quad (1.3.)$$

Ясно, что такую модель можно исследовать только имитационным методом.

Итак, модель, требующая имитационного анализа, должна иметь следующие черты:

1. Большое количество координат вектора X и их функций.
2. Случайные величины γ и ε и их распределения.
3. Большое число параметров θ , β и μ .
4. Много связей δ между элементами модели.
5. Нелинейность.
6. Ограничения разных типов.
7. Реакции, зависящие от времени.

Формулировка математической модели.

После того, как сформулированы цели эксперимента, надо построить математическую модель, связывающую эндогенные системы с ее управляющими и экзогенными переменными. Экзогенные переменные определяют влияние, источники которых находятся вне системы. Некоторые из них требуют быть случайными.

Построение математической модели начинается с выбора переменных модели. Как правило, эндогенные переменные модели выбирать не надо, так как они обычно определяются уже в процессе формулировки цели исследования. Нельзя упускать из виду, что число переменных модели и ее сложность непосредственно связанны со временем программирования и счета, а также со степенью пригодности модели. Изменяя одну из характеристик модели, мы одновременно меняем все другие.

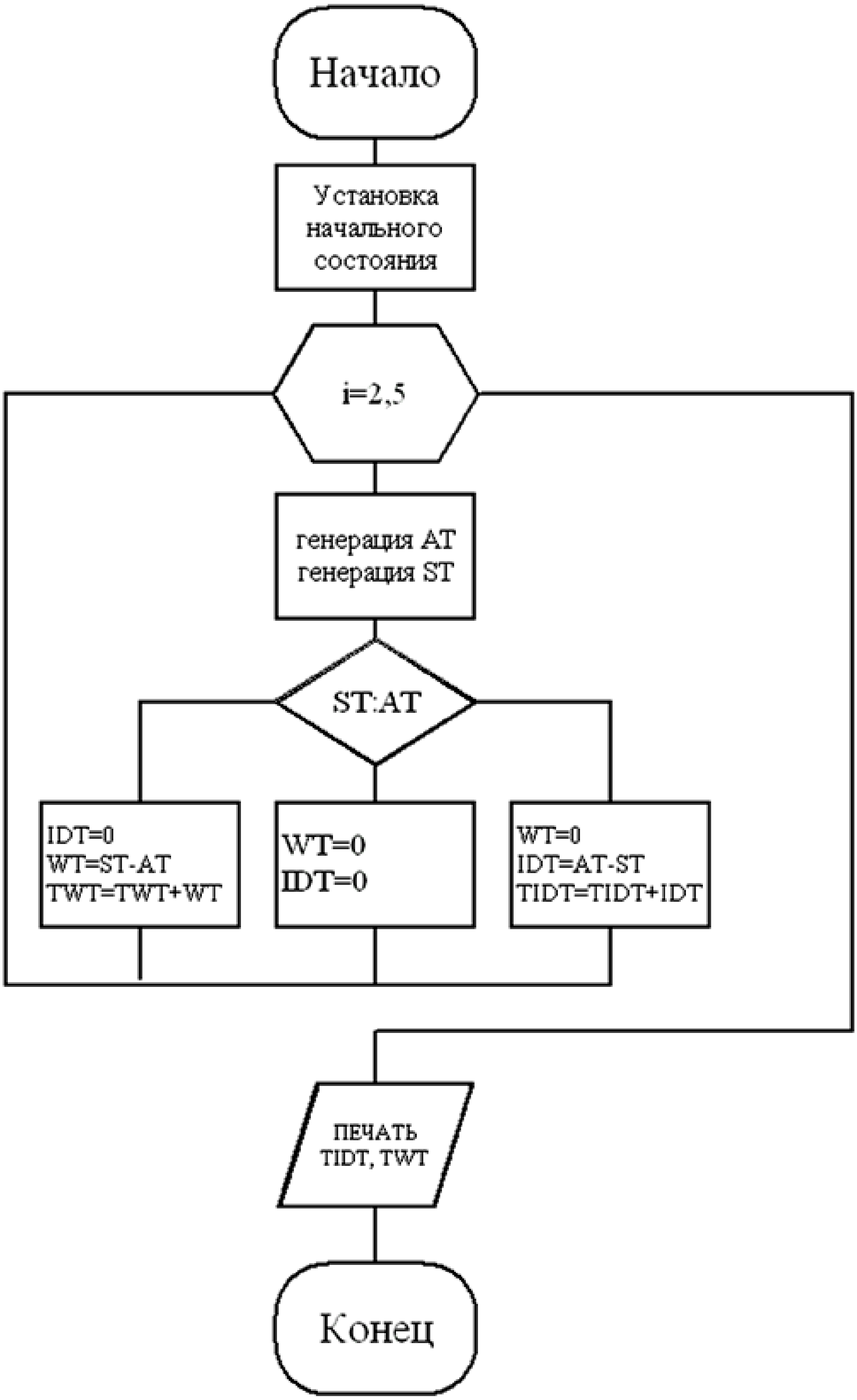

Рис.1.1 Блок-схема одноканальной одно-фазовой модели

Генерирование данных

В программе имитации на ЭВМ часто применяются численные методы генерирования данных. Для описания случайной величины независимо от того, как она распределена - непрерывно или дискретно, удобно ввести ***кумулятивную функцию распределения вероятности*** **F(*x*)**, которая при данном значении своего аргумента **X** - вероятность того, что случайная реализация величины **X** не превосходит ***x***. Для абсолютно непрерывной функции, функция плотности вероятностей f(x) имеет вид:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{1.4}$$

Законы распределения случайных величин

1. Равномерное распределение случайной величины.

Функция плотности вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \\ 0 \end{cases}$$

, a<x<b

Параметры: a, b.

Математическое ожидание:

$$Ex = \frac{b+a}{2}$$

Дисперсия:

$$Vx = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2. Нормальное распределение

Функция плотности вероятностей:

$$f(x) = \frac{Exp(-(x-\mu_x)^2/2\,\delta_x^2 x)}{\delta_x\sqrt{2\pi}}$$

Параметры: μ_x и δ_x

Математическое ожидание:

$E_x = \mu_x$

Дисперсия:

$V_x = \delta_x^2$, STDX=δ_x

3. Экспоненциальное распределение
Функция плотности вероятностей:
$f(x)=ae^{-ax}$, $a>0$, $x>=0$
Параметры: a
Математическое ожидание: $E_x=1/a$
Дисперсия:$V_x=1/a^2$

4 Гамма-распределение
Функция плотности вероятностей:

$$f(x)=\frac{a^{k\lambda}\cdot x^{(k-1)}\cdot e^{-ax}}{(k-1)!}$$

$a>0$, $k>0$, $x>=0$
Параметры: a и k
Математическое ожидание:
$E_x=k/a$;
Дисперсия:
$V_x=k/a^2$

5 Биноминальное распределение
Функция плотности вероятностей:
$f(x)=(x^n)p^xq^{u-x}$, $x=0$, l..N; $q=1-p$;
Параметры: n, N, p, q; $0<=p<=1$;
Математическое ожидание:
$E_x = np$
Дисперсия:
$V_x = npq$

6 Гипергеометрическое распределение
Функция плотности вероятностей:

$$f(x)=\frac{(\frac{N_p}{x})(\frac{N_q}{n-x})}{(N)}$$

Математическое ожидание:
$E_x=np$
Дисперсия:
$V_x=npq((N-n)/(N-l))$

7 Распределение Пуассона

Функция плотности вероятностей:

$f(x)=e^{-\lambda}*(\lambda^{x}/x!)$ x=0,1,…; $\lambda>0$

Параметры: λ

Математическое ожидание:

$E_x = \lambda$

Дисперсия:

$V_x = \lambda$

Моделирование законов распределения в системе Matlab

Для реализации требуемого закона распределения на Matlab применяется функция random(NAME, A, B, M, N), где NAME – константа, определяющая закон распределения; A, B – диапазон случайных чисел; M, N – размерность выходного массива (по умолчанию M=N=1).

Некоторые значения константы NAME

Значение	**Закон**
bino	биномиальный
exp	экспоненциальный
hyge	гипергеометрический
logn	логарифмически нормальный
norm	нормальный
poiss	Пуассона
unif	равномерный

Например,

E(N) = random(‘exp’, 2, 1, 1) – моделирование экспоненциального закона

Обработка результатов эксперимента

После того, как математический эксперимент спланирован и проведен, надо отработать его результаты. Существует ряд методов обработки результатов. Это дисперсионный анализ, регрессивный анализ, последовательный анализ, спектральный анализ и т.д.

Одноканальная одно-фазовая модель

Задачи, связанные с работой систем массового обслуживания разного вида требований, возникают в разных областях техники, в организации производства и пр. Примерами систем и требований могут служить парикмахерская и клиенты, преподаватель и студенты, телефонная станция (как совокупность линий) и вызовы на разговор, ремонтная бригада вычислительного центра и отказы обслуживаемых ею машин. Как моменты прибытия требований, так и длительности обслуживания каждой заявки являются случайными. Поэтому основным математическим аппаратом для изучения функционирования таких систем является теория вероятностей.

Термин "массовый"' предполагает многократную повторяемость ситуаций в том или ином смысле (много заявок, длительное функционирование системы и т.п.). Выводы и рекомендации, получаемые методами теории массового обслуживания, применимы лишь при наличии одного или нескольких из перечисленных факторов повторяемости. При этом необходимо учитывать, что поскольку поток заявок и продолжительность времени обслуживания носят случайный характер, то и прогноз относительно единичного события может быть только вероятностным.

Простейший пример модели массового обслуживания даст система, состоящая из одной станции, на которую поступают требования, образующие обычную очередь (если станция свободна, она приступает к обслуживанию той заявки из очереди, которая была получена раньше остальных). Промежуток времени между появлением двух последовательных заявок, и время обслуживания считаются случайными величинами с заданными функциями распределения.

Структурная схема модели в символике Q-схем показана на рисунке 1.2, где обозначено: И- источник; Н – накопитель; К – канал.

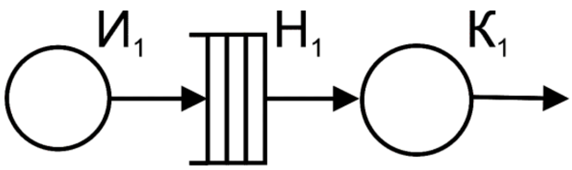

Рис. 1.2 Структурная схема модели одноканальной СМО

Канал обслуживания осуществляет обслуживание каждой заявки в соответствии с заданным детерминированным или случайным законом обслуживания. Выходной поток заявок отличается от входного в зависимости от законов дисциплины очереди и обслуживания

Перечислим переменные и управление модели:

Эндогенные переменные:

WT - среднее время ожидания заявки в очереди;

IDT - среднее время простоя системы, в ожидании очередного требования.

Переменные состояния:

WT_i - время ожидания i-ой заявки;

IDT_i время простоя системы, в ожидании i-ой заявки.

Экзогенные переменные:

AT_i - интервал времени между появлением i-ой и (i+1)-ой заявками;

ST_i - время обслуживания i-ой заявки.

Характеристики функционирования системы:

f(AT) - функция распределения плотностей вероятностей интервала времени между двумя последовательными заявками;

f(ST) - Функция распределения плотностей вероятностей времени обслуживания.

Тождества:

$$\overline{WT} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} WT_i = \frac{TWT}{m}$$

$$\overline{IDT} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^{m} IDT_i = \frac{TIDT}{m}$$

Интервал времени между двумя последовательными заявками и время обслуживания одной заявки - величины не постоянные, а случайные.

Рассмотрим пример одноканальной одно-фазовой модели. Студенты N-ой группы пришли на консультацию *к* преподавателю, который принимает весь день. Каждый студент приходит тогда, когда ему удобно, т.е. время его прихода величина случайная (т.е. разная для каждого студента). Если преподаватель занят, студент ждет в очереди.

Данные этих испытаний позволяют анализировать влияние различных изменений в параметрах вероятностных распределений на статистические характеристики очереди. Кроме того, на модели можно ставить эксперименты с различными дисциплинами очереди и ограничениями на ее длину.

Описание алгоритма одноканальной модели

1. Обнуляется время первой заявки, время ее ожидания, время простоя системы в ожидании прихода заявки, а также полные времена ожидания и простоя.
2. Генерируется относительное время появления новой заявки. Оно отсчитывается от момента прихода предыдущего требования. Определяется (генерируется) продолжительность обслуживания этой заявки.
3. Если она превышает относительное время появления новой заявки, последней придется стоять в очереди.
4. Вычисляется время ожидания заявки в очереди и полное время ожидания в системе.
5. Вычисляется продолжительность простоя системы, в ожидании заявки и полное время простоя.
6. Не возникает ли простоя системы, ни ожидания заявки в очереди.
7. Печать полного времени простоя системы и полного времени ожидания в системе.

Варианты заданий

Определить среднее время простоя и среднее время ожидания заявки в очереди, если законы распределения AT и ST следующие:

1. AT – экспоненциальный
   ST – биноминальный
2. AT – Пуассона
   ST – нормальный
3. AT – равномерный
   ST – гамма
4. AT – гамма
   ST – экспоненциальный
5. AT – гипергеометрический
   ST – Пуассона
6. AT – нормальный
   ST – экспоненциальный

Определить, при каком законе распределения AT среднее время свидания заявки в очереди минимально, если закон распределения ST следующий:

7. экспоненциальный;
8. равномерный;
9. нормальный;

Определить при каком законе распределения ST среднее время ожидания заявки в очереди минимально. Закон распределения AT следующий:

10. экспоненциальный;
11. нормальный;
12. равномерный;

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Описание варианта индивидуального задания.
3. Листинг программы с полученными результатами.
4. Результаты оформить в виде гистограмм.