ЛЕКЦИЯ 5-6 (3)

Элементы механики сплошных сред
Колебания и волны

СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИИ

Ламинарное и турбулентное течение жидкости

Гидродинамика вязкой жидкости

Уравнение Бернулли

Формула Стокса

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Гармонические колебания

Физический маятник

Математический маятник

Пружинный маятник

Упругие волны

Уравнение волны

ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Жидкость — это агрегатное состояние вещества, промежуточное между твёрдым и газообразным.

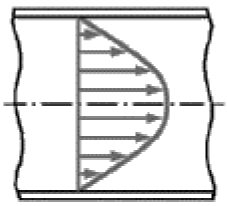
При течении жидкости (и газа) между частицами (молекулами), находящимися в соседних слоях, за счёт проникновения молекул из одного слоя в другой и межмолекулярного взаимодействия возникают силы **внутреннего трения**, называемыми **силами вязкости**.

Ламинарное и турбулентное течение жидкости

Различают два основных вида течения: **ламинарное** и **турбулентное**.

Ламинарным (или ***слоистым***) называется течение, при котором каждый выделенный вдоль потока тонкий слой скользит относительно соседних, *не перемешиваясь* с ними, то есть **линии тока** нигде **не пересекаются**.

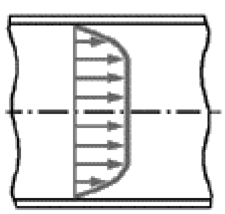
Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях её движения.



При **ламинарном течении** в трубе внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы из-за сил молекулярного сцепления, прилипает к ней и остается неподвижным. Скорости последующих слоёв тем больше, чем больше их расстояние до поверхности трубы. Наибольшей скоростью обладает слой, движущийся вдоль оси трубы.

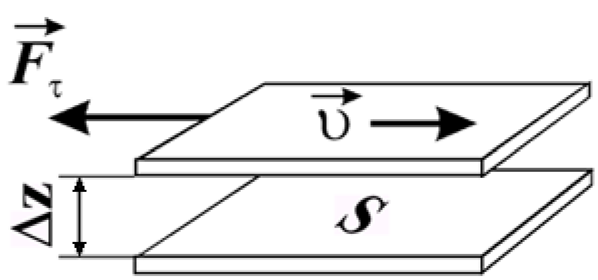
Турбулентным (или ***вихревым***) называется течение, при котором частицы жидкости *переходят* из слоя в слой (имеют составляющие скоростей, перпендикулярные течению). Это сопровождается интенсивным вихреобразованием и *перемешиванием* жидкости (газа).

Линии тока при турбулентном течении *могут* не только *пересекаться*, но *и претерпевать разрыв*.



При **турбулентном течении** в трубе скорость частиц сначала быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, а затем из-за интенсивного перемешивания изменяется очень незначительно, оставаясь практически постоянной.

Гидродинамика вязкой жидкости



Характер течения реальной жидкости из-за наличия вязкости может существенно отличаться от идеальной. Силы, действующие между частицами движущейся жидкости, могут кардинальным образом повлиять как на распределение скоростей в потоке жидкости, так и на обтекание жидкостью тел, помещенных в движущийся поток.

Еще Исаак Ньютон опытным путем установил, что при скольжении друг относительно друга двух параллельных плоскостей, пространство между которыми заполнено жидкостью, силы вязкого трения препятствуют ему. Так, при движении со скоростью υ верхней плоскости с площадью S относительно нижней, возникает сила вязкого трения, направленная против движения и равная

$$F_\tau = \eta \frac{\Delta \upsilon}{\Delta z} \cdot S \tag{3.1}$$

Эта формула представляет собой математическую запись **закона внутреннего трения Ньютона**.

Сила F_τ пропорциональна площади S и изменению скорости на единицу длины в поперечном направлении $\Delta\upsilon/\Delta z$ (градиенту скорости в направлении перпендикулярном движению) и зависит от свойств жидкости.

Коэффициент силы внутреннего трения для многих веществ (например, воздух, вода, бензин и т.п.) очень мал, поэтому достаточно часто можно рассматривать течение жидкости (или газа) как течение **идеальной жидкости**, ***лишённой вязкости***.

Течение жидкости (или газа) называется **стационарным**, если скорость, давление, плотность, температура и т.д. — остаются постоянными всё время во всех точках текущей жидкости.

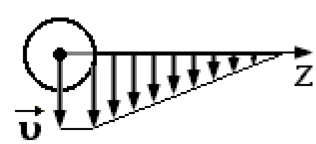
Различают два основных вида течения: **ламинарное** и **турбулентное**.

Уравнение Бернулли

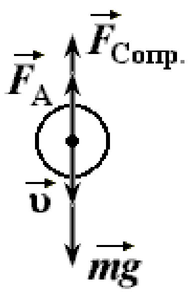
В стационарной текущей идеальной несжимаемой жидкости справедливо уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho \upsilon^2}{2} + \rho g h + p_0 = const \tag{3.2}$$

Формула Стокса



Если в жидкости под действием, например, силы тяжести со скоростью υ движется шарик (см. рис. справа), то *прилегающий к поверхности шарика слой жидкости имеет ту же скорость, что и шарик*. За счёт межмолекулярных сил этот слой вовлекает в движение следующий. Тот побуждает к движению другой, прилегающий к нему слой, и так далее. Из-за малости сил внутреннего трения объём вовлекаемой в движение жидкости тоже мал и ***скорость движения слоёв*** по мере удаления от шарика ***быстро падает***.



При свободном падении шарика в измеряемой жидкости на шарик действуют три силы: вес шарика mg, выталкивающая сила Архимеда $\boldsymbol{F}_{\text{А}}$ и сила сопротивления со стороны жидкости $\boldsymbol{F}_{\text{Сопр.}}$ (часто она называется ***силой Стокса***). Закон движения шарика имеет вид:

$$mg - (F_{\text{Сопр.}} + F_{\text{А}}) = ma. \tag{3.3}$$

Поскольку **сила Стокса** $\boldsymbol{F}_{\text{Сопр.}}$ зависит от скорости движения шарика υ, то через некоторое время от начала падения (это время называется **временем релаксации**) устанавливается равновесие. При этом ускорение становится равным нулю ($a = 0$) и в соответствии с 1ым законом Ньютона выполняется равенство:

$$mg = F_{\text{Сопр.}} + F_{\text{А}}.$$

Используя выведенное Стоксом на основе формулы (1) выражение для силы сопротивления:

$$F_{\text{Сопр.}} = 6\pi\cdot\eta\cdot r\cdot\upsilon,$$

записав массу шарика как

$$m = (4/3)\cdot\pi\cdot r^{3}\cdot g\cdot\rho_{\text{т}},$$

а силу Архимеда как

$$F_{\text{А}} = (4/3)\cdot\pi\cdot r^{3}\cdot g\cdot\rho_{\text{ж}},$$

получаем расчётную **формулу Стокса** для определения вязкости жидкости:

$$\eta = \frac{2\cdot(\rho_{\text{Т}} - \rho_{\text{Ж}})\cdot g\cdot r^{2}}{9\cdot\upsilon}. \tag{3.4}$$

Здесь

$\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости;

$\rho_{\text{Т}}$ — плотность материала шарика (твёрдого тела);

υ — скорость равномерного (установившегося) движения шарика;

r — радиус шарика.

Уравнение (3.4) справедливо лишь тогда, когда шарик падает в безграничной среде. Если шарик падает вдоль оси трубки радиуса R, то приходится учитывать влияние боковых стенок. Поправки в формуле Стокса для такого случая теоретически обосновал **Ладенбург**.

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Отличительная черта колебаний – периодичность (повторяемость). Основные типы колебаний:

- Свободные (затухающие и незатухающие)
- Вынужденные (под действием вынуждающей периодической силы)
- Автоколебания

Гармонические колебания

Колебания называются гармоническими, если происходят по закону *sin* или *cos*:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0). \qquad (3.5)$$

Условия возникновения гармонических колебаний:

- Действие возвращающей силы, упругой или квазиупругой.
- Трение мало.

Основные характеристики колебаний**:**

- Амплитуда – максимальное отклонение от положения равновесия.
- Частота – количество колебаний за единицу времени.
- Круговая (циклическая) частота – $\omega = 2\pi\nu$.
- Период – время, за которое совершается одно полное колебание
-

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (3.6)$$

Пружинный маятник – это груз массой *m*, подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий колебания под действием упругой силы. Возвращающая упругая сила сообщает ускорение $F = ma_x$,

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}\text{, или } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Введем обозначение $\frac{k}{m} = \omega^2$, тогда уравнение примет вид:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \qquad (3.7)$$

Это – дифференциальное уравнение собственных гармонических колебаний.

Решением такого дифференциального уравнения является функция

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{3.8}$$

где A и φ_0 зависят от начальных условий.

Физический маятник

Физическим маятником (ФМ) является любое твердое тело, совершающее периодическое движение вблизи положения равновесия. В частном случае МФ может быть твердое тело, способное свободно вращаться вокруг оси подвеса $O'O'$, не проходящей через центр масс тела (точка C на рис. 3.1). Если колебания такого тела происходят в пределах малых углов отклонения от вертикали θ, то величина силы, возвращающей маятник в положение равновесия, линейно зависит от величины смещения от положения устойчивого равновесия. Тогда частота и период колебаний не зависят от амплитуды колебания ФМ, и колебательный процесс называют гармоническим. Так как движение ФМ происходит в гравитационном поле Земли, то величина возвращающей силы определяется характеристиками поля тяготения в месте расположения ФМ. Из школьного курса физики известна формула математического маятника $T_м$:

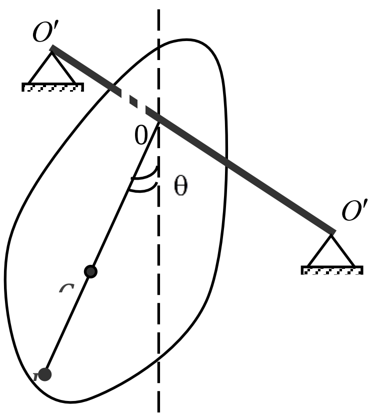


Рисунок 3.1- Физический маятник

$$T_м = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,. \tag{3.9}$$

Здесь ℓ - длина невесомой нити (или стержня) подвеса, равная расстоянию от оси вращения до центра тяжести тела массой m, принимаемого за материальную точку. Величина g определяет величину ускорения свободного падения. Как видно из (1), период математического маятника не зависит от массы m тела. Можно, однако, преобразовать (1) так, чтобы формула выражала период колебания физического маятника.

По определению, момент инерции материальной точки равен

$$I = m\ell^2. \tag{3.10}$$

Тогда зависимость периода колебаний от момента инерции определится в виде

$$T_{\text{м}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell \cdot \ell}{m\ell \cdot g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m\ell g}}\,. \tag{3.11}$$

В таком виде формула (3.11) применима также и для любого твердого тела – физического маятника, если понимать под I момент инерции I_0 физического маятника относительно оси подвеса $O'O'$, а $\ell = \ell_c$ обозначить расстояние от оси подвеса до центра масс тела

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mg\ell}}\,. \tag{3.12}$$

Формула (3.12) выражает зависимость периода колебаний ФМ от его параметров (m, ℓ_c, I_0) и ускорения свободного падения.

Физическому маятнику можно поставить в соответствие эквивалентный (по периоду колебаний) математический маятник. Если длина нити подвеса $\ell_{\text{м}}$ математического маятника равна величине

$$\ell_{\text{м}} = \frac{I_0}{m\ell}, \quad \text{то} \quad T_{\text{м}} = T. \tag{3.13}$$

Поэтому для характеристики свойств ФМ пользуются понятием его приведенной длины. Приведенная длина ($\ell_{\text{пр}}$) ФМ численно равна длине эквивалентного математического маятника, определяемой по (4).

Величина $\ell_{\text{пр}}$ показывает, на каком расстоянии от оси подвеса находится характерная точка ФМ, называемая центром качания. Следует отметить, что центр качания ФМ не совпадает с центром масс. Центр качания (L) и точка подвеса (O) всегда расположены по разные стороны от центра масс ФМ (см. рис. 1). Центр качания и точка подвеса находятся во взаимном обратном соответствии: если точку подвеса перенести в центр качания, то центр качания в новом положении совпадает с прежней точкой подвеса (это следует из постоянства $\ell_{\text{пр}}$ для данного ФМ).

Иногда можно определить положение центра качания ФМ расчетным путем по формуле (3.12), если известны масса, момент инерции и положение центра масс. Когда эти параметры заранее неизвестны, положение центра качания находится экспериментально. Для этого следует иметь одну точку подвеса закрепленной, а другую точку (или ось) подвеса перемещать вдоль линии OC, проходящей через центр масс и фиксированную точку подвеса. Если подобрать у ФМ такое расположение двух параллельных осей подвеса, при котором период колебаний окажется одинаковым, то расстояние между осями будет равно $\ell_{\text{пр}}$. Определив величину приведенной длины физического маятника, можно рассчитать величину ускорения свободного падения

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2}\ell_{\text{пр}}. \tag{3.14}$$

Период T_0 соответствует положению двух осей подвеса, при котором он одинаков, т.е. не зависит от того, относительно какой из осей совершается колебание.

Математический маятник

Математический маятник – это материальная точка массой m, подвешенная на нерастяжимой невесомой нити и совершающая колебания под действием силы тяжести.

Для математического маятника циклическая частота $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$, период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{3.15}$$

где g — ускорение свободного падения, l — длина маятника.

Пружинный маятник

Для груза массой *m,* совершающего колебания на пружине с коэффициентом жёсткости *k*, собственная частота , период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Скорость и ускорение при колебательном процессе:

$$\upsilon = \dot{x} = -A\omega sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2),\ \upsilon_{\max} = A\omega. \tag{3.16}$$

$$a = \dot{\upsilon} = \ddot{x} = -A\omega^2 cos(\omega t + \varphi_0),\ a_{\max} = A\omega^2. \tag{3.17}$$

В реальной колебательной системе есть силы сопротивления:

$$F_c = -r\upsilon = -r\dot{x}.$$

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$-kx - r\dot{x} = m\ddot{x},$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

$$\frac{r}{m} = 2\beta, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2,$$

где β – коэффициент затухания.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{3.18}$$

$$x = x_0 e^{-\beta t} cos(\omega t + \varphi_0).$$

Резонанс – это явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к резонансной частоте.

Упругие волны

Волна – процесс распространения в пространстве возмущения состояния вещества или поля. Продольными называются волны, в которых направление колебаний совпадает с направлением распространения волны. Поперечными называются волны, в которых направление колебаний перпендикулярно направлению распространения волны. Продольная волна возникает в результате деформации сжатия или разрежения**,** существуют в твердых, жидких и газообразных средах. Поперечная волна возникает в результате деформации сдвига. Газы и жидкости не обладают упругостью сдвига – в них поперечные волны невозможны.

Длина волны

Длина волны – расстояние между двумя ближайшими точками, колеблющимися в одинаковой фазе. Длина волны связана со скоростью распространения:

$$\lambda = \upsilon T. \tag{3.19}$$

Уравнение волны

Уравнение волны – это зависимость смещения колеблющейся частицы от координаты и времени. Уравнение бегущей волны:

$$\xi(x,t) = Acos(\omega t - kx + \varphi_0). \tag{3.20}$$

В однородной изотропной среде распространение волн описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \qquad (3.21)$$

Стоячие волны образуются при интерференции бегущей и отраженной волны. Уравнение стоячей волны

$$\xi(x,t) = 2A cos \frac{2\pi x}{\lambda} cos \omega t .$$

Точки, в которых амплитуда стоячей волны максимальна, называются пучностями. Точки, в которых амплитуда стоячей волны равна нулю, называются узлами.