ЛЕКЦИЯ 1-2
КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА

СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИИ.

ЛЕКЦИЯ 1-2
1. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА
Путь и перемещение
Модели в механике
Система отсчета
Способы описания движения, кинематические уравнения движения
Кинематические характеристики движения
Мгновенная скорость
Направление вектора скорости
Нахождение пути по известной зависимости скорости от времени $\upsilon(t)$
Ускорение
Криволинейное движение
Классификация движения по кинематическим характеристикам движения: скорости и ускорению
Вращательное движение
Угловые кинематические характеристики
2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА
Основные понятия
Законы Ньютона.
Силы в природе

Кинематикой называют раздел механики, в котором движение тел рассматривается без выяснения причин изменения этого движения.

Путь и перемещение

Путь (Δs, рис.1.1) —сумма отрезков по траектории движения —величина существенно положительная. Если при решении задачи Вы получили отрицательную величину, то надо проверять решение задачи.

То есть путь не может быть отрицательным и не может убывать с течением времени.

***Траектория* —** это линия, которую описывает частица при своем движении.

Перемещение ($\Delta\vec{r}$, рисунок.1.1) — направленный отрезок, соединяющий начальное и конечное положение частицы. Величина перемещения тела не может превышать его путь.

Пройденный путь Δs равен длине дуги траектории, пройденной телом за некоторое время t.

Исходя из вышесказанного, путь Δs —величина скалярная, перемещение $\Delta\vec{r}$ - векторная величина. Примерами *скалярных* величин являются время, масса, длина, площадь, объем и т.д. *Векторными* называются величины, характеризуемые числовым значением и направлением и подчиняющиеся операциям над векторами (рис 1.1).

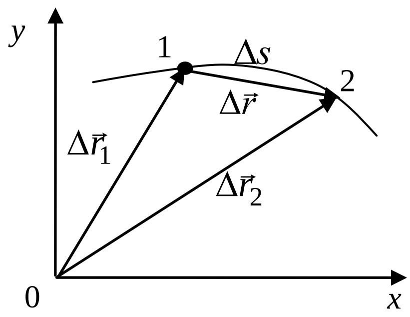


Рисунок 1.1 — Векторные величины

Векторные же величины складываются по правилу параллелограмма, показанному на Рисунок 1.2.

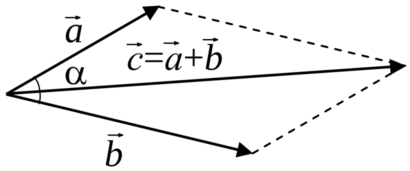


Рисунок 1.2 — Сложение векторов

Модуль вектора — скалярная величина, причем, всегда положительная и обозначается

$$c = |\vec{c}|. \tag{1.1}$$

Модуль вектора можно рассчитать, используя теорему косинусов

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}. \tag{1.2}$$

Здесь α — угол между направлениями векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (Рисунок 1.3).

Модуль вектора —длина отрезка в установленном масштабе.

Если в задаче необходимо найти сумму трех и более векторов, то начало каждого следующего слагаемого совмещается с концом предыдущего (Рисунок 1.3).

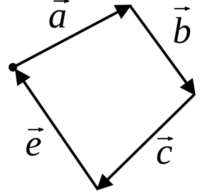


Рисунок 1.3 — Сложение более двух векторов

В результате такого сложения получается ломаная линия. Замыкающая этой линии, проведенная из конца последнего вектора в начало первого, дает результирующий вектор $\vec{e}$, т.е.

$$\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\,. \tag{1.3}$$

Разность векторов (Рисунок 1.4) найдем, соединив концы векторов, отложенных из общего начала:

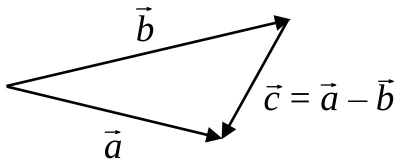


Рисунок 1.4 — Вычитание векторов

Заметим, что ни сумма, ни разность векторов не равна сумме или разности их модулей!

Модели в механике

В механике (как и в других разделах физики) изучают абстрактные модели тел: материальная точка и абсолютно твердое тело.

Тело, размерами которого в данных условиях можно пренебречь, называется ***материальной точкой***. Понятие материальной точки играет важную роль в механике.

Абсолютно твердое тело — это тело, не изменяющее свою форму и размеры при движении (т.е. недеформируемое).

Система отсчета

Всякое движение относительно, т.е. движение одного тела рассматривается относительно другого. Чтобы изучать движение, надо определиться с системой отсчета. Необходимо выбрать тело отсчета, связать с ним систему координат (Рисунок1.5) и иметь часы для отсчета времени, синхронизованные сигналом точного времени.

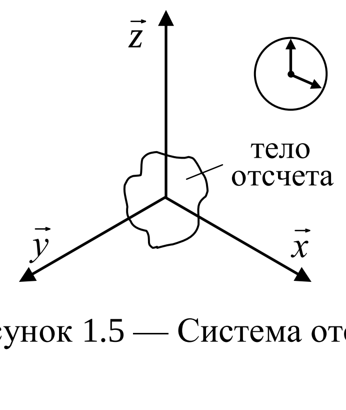


Рисунок 1.5 — Система отсчета

Способы описания движения, кинематические уравнения движения

Положение материальной точки в пространстве в любой момент времени можно определять либо с помощью зависимости координат от времени $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ (***координатный способ***), либо при помощи зависимости от времени радиус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (***векторный способ***), проведенного из начала координат до данной точки (Рисунок 1.6).

Уравнения:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{и} \quad z = z(t) \tag{1.4}$$

эквивалентны векторному уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{1.5}$$

где x, y, z - проекции радиус-вектора $\vec{r}$ на оси координат, а $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы (***орты***), направленные по соответствующим осям.

Уравнения (1) и (2) называются ***кинематическими уравнениями движения материальной точки.***

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется ***числом степеней свободы***.

Если материальная точка движется в пространстве, то она имеет три степени свободы (координаты x, y, z). Если она движется на плоскости — две степени свободы (x, y). Если вдоль линии - одна степень свободы (x).

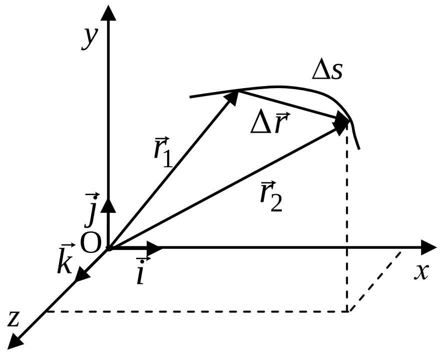


Рисунок 1.6 — Определение положения точки с помощью координат $x = x(t)$, $y = y(t)$ и $z = z(t)$ и радиус-вектора $\vec{r}(t)$. $\vec{r}_1$ —радиус-вектор положения точки в начальный момент времени, $\vec{r}_2$ — в конечный момент времени

Из рисунка 1.6 следует, что перемещение $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Связь между координатами x, y, z и радиус-вектором $\vec{r}$, как уже было указано, выражается следующим соотношением:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

а модуль этого вектора

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Если взять (см. рисунок 1.6) бесконечно малый промежуток времени dt, то модуль вектора перемещения $|d\vec{r}|$ будет равен пройденному пути ds, т.е.

$$\left|d\vec{r}\right| = ds, \quad \text{если } \Delta t \to 0.$$

Кинематические характеристики движения

Кинематические характеристики движения — это ***скорость и ускорение***.

Вектор средней скорости есть отношение вектора перемещения к промежутку времени, за который это перемещение произошло:

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.6}$$

Средняя путевая скорость определяется

$$\upsilon_s = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{1.7}$$

Здесь Δs - пройденный путь за промежуток времени Δt.

Если точка (или тело) прошла несколько отрезков пути за различные промежутки времени, то

$$\upsilon_s = \frac{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \ldots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \ldots}. \tag{1.8}$$

Средняя путевая скорость, также как и путь, положительная величина!

Мгновенная скорость

Предел, к которому стремится отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, в математике обозначают, как $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ и называется этот предел ***производной***.

Т.е. производная функции r по времени t есть предел отношения приращения функции (r) к соответствующему приращению независимого аргумента (t) при условии, что приращение аргумента (t) стремится к нулю. Отсюда следует, что ***скорость есть производная радиус-вектора по времени***. Обозначают производную точкой, штрихом или символом $\frac{d}{d}$.

$$\upsilon = \left|\vec{\upsilon}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|. \tag{1.9}$$

При $\Delta t \to 0$, т.е. на бесконечно малом участке траектории перемещение совпадает с траекторией ($\Delta s = \Delta r$).

В этом случае мгновенную скорость можно выразить через скалярную величину —путь:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \qquad (1.10)$$

Направление вектора скорости

Чтобы понять, как направлен вектор скорости, выясним геометрический смысл производной.

Секущая 1-2 (Рисунок 1.7) образует с положительным направлением оси времени угол α, тангенс которого равен $\frac{\Delta r}{\Delta t}$. В пределе при $\Delta t \to 0$, секущая 1-2 превращается в касательную к траектории в точке 1.

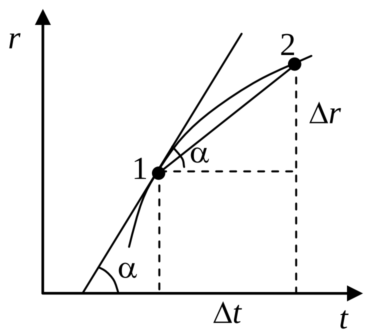


Рисунок 1.7 — Направление вектора скорости

Следовательно, производная r по t численно равна тангенсу угла α, образованного касательной с положительным направлением оси времени (или оси аргумента). Таким образом, ***производная функции численно равна тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси аргумента*** —таков геометрический смысл производной.

Поскольку

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

то вектор скорости $\vec{\upsilon}$, как следует из Рисунка 1.7, направлен по касательной к траектории в каждой ее точке и в ту сторону, куда движется точка.

Модуль вектора скорости $|\vec{\upsilon}| = \upsilon$:

$$\upsilon = \left| \lim \frac{\Delta r}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}.$$

В этой формуле нельзя записать Δr вместо $|\Delta \vec{r}|$, так как приращение вектора, вообще говоря, не равно *модулю* приращения вектора.

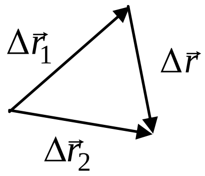


Рисунок 1.8 — Приращение вектора

Как следует из Рисунок1.8, модуль вектора $|\vec{r}|$ остался прежним, т.е. $\Delta r = 0$. Модуль приращения вектора, т.е. $|\vec{r}|$ равен длине отрезка, соединяющего концы векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, т.е.

$$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta r.$$

Как следует из Рисунка 1.8, отношение $\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s}$ при уменьшении Δt стремится к единице, то модуль скорости

$$|\vec{\upsilon}| = \upsilon = \frac{ds}{dt}. \qquad (1.11)$$

Нахождение пути по известной зависимости скорости от времени υ(t)

Мы уже выяснили, что модуль скорости — это производная пути по времени

$$\upsilon = \frac{ds}{dt}.$$

Следовательно, путь, пройденный частицей за промежуток времени от t_1 до t_2 равен определенному интегралу от функции $\upsilon(t)$, показывающую, как изменяется модуль скорости с течением времени:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt.$$

Определенный интеграл имеет простой геометрический смысл. На Рисунок 1.9 показана зависимость $\upsilon(t)$.

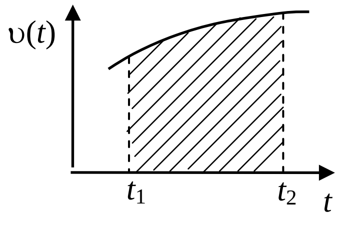


Рисунок 1.9 — Зависимость $\upsilon(t)$.

Нетрудно догадаться, что площадь заштрихованной фигуры, ограниченной сверху графиком $\upsilon(t)$, снизу — осью t, с боков — прямыми $t = t_1$ и $t = t_2$, численно равна определенному интегралу $\int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt$.

Ускорение

Другой кинематической характеристикой движения является *ускорение*. Если можно сказать, что ***скорость — это быстрота изменения пути по времени, то ускорение —быстрота изменения скорости во времени***.

Вектор среднего ускорения равен

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}. \tag{1.12}$$

Мы уже установили, что вектор мгновенной скорости —производная радиуса-вектора по времени

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

По аналогии: вектор мгновенного ускорения —это производная скорости по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}, \tag{1.13}$$

т.е.

$$\vec{a} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\vec{j} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k} \tag{1.14}$$

или

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ . \tag{1.15}$$

Криволинейное движение

При криволинейном движении вектор скорости изменяется по **ВЕЛИЧИНЕ И ПО НАПРАВЛЕНИЮ**. Вектор полного ускорения $\vec{a}$ имеет две составляющие (рисунок 1.10): $\vec{a}_\tau$ — ***тангенциальное*** (***касательное***) ускорение, как следует из названия оно направлено по касательной к каждой точке траектории, следовательно, совпадает по направлению с вектором скорости и ***нормальное*** (***центростремительное***) ускорение, направленное по нормали к вектору $\vec{\upsilon}$. Тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости по величине, а нормальное — по направлению.

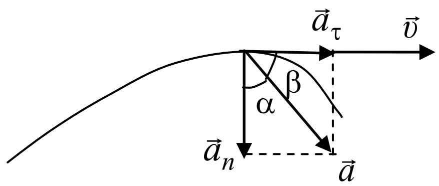


Рисунок 1.10 — Тангенциальное и нормальное ускорения

Таким образом, при криволинейном движении

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n . \qquad (1.16)$$

При этом модуль тангенциального ускорения $|\vec{a}_\tau| = \frac{d\upsilon}{dt}$ — есть производная от модуля вектора скорости по времени, а модуль нормального ускорения

$$|\vec{a}_n| = \frac{\upsilon^2}{R}, \qquad (1.17)$$

где R —радиус кривизны траектории в данной точке. Как следует из рисунка 1.19

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|\vec{a}_\tau|}{|\vec{a}_n|}; \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{|\vec{a}_n|}{|\vec{a}_\tau|}.$$

Классификация движения по кинематическим характеристикам движения: скорости и ускорению

1. $\vec{a}_\tau = 0; \vec{a}_n = 0$ *– прямолинейное равномерное движение.*

2. $\vec{a}_\tau = const; \vec{a}_n = 0$ *– равнопеременное прямолинейное движение.*

3. $\vec{a}_\tau = 0; \vec{a}_n = const$ *- равномерное движение по окружности.*

4. $\vec{a}_\tau \neq 0; \vec{a}_n \neq 0$ *- неравномерное криволинейное движение.*

Вращательное движение

Вращательным движением относительно некоторой неподвижной оси (оси вращения) называется такое движение твердого тела, при котором все его точки движутся по окружностям, центры которых лежат на оси вращения, а плоскости вращения перпендикулярны ей (рисунок 1.11).

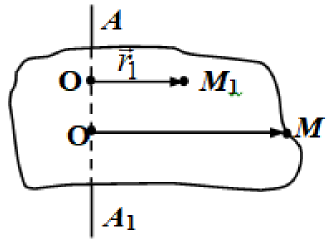


Рисунок 1.11 — Расположение точек

Возьмем две точки M и M_1, принадлежащие вращающемуся телу. Как следует из Рисунок 1.12, линейные скорости точек M и M_1 не равны, следовательно, не могут служить характеристикой тела в целом. А какие величины для них одинаковы?

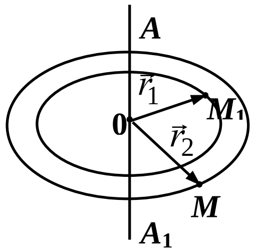


Рисунок 1.12 — Радиус-векторы точек

При повороте тела на угол φ радиусы-векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ его точек тоже повернутся на угол φ. Начало координат для простоты поместим в центр окружностей, по которым движутся точки M и M_1.

Таким образом, необходимо ввести *характеристики, связанные с углом поворота* φ, *которые называются* ***угловыми характеристиками***.

Угловые кинематические характеристики

1. Вектор угловой скорости

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \tag{1.18}$$

$d\vec{\varphi}$ —бесконечно малый угол поворота. В математике доказывается, что $d\vec{\varphi}$ — вектор, в то время как $\Delta\varphi$ —скалярная величина. Направление $\vec{\omega}$ совпадает с направлением $d\vec{\varphi}$ и связано с направлением вращения правилом правого винта

2. Вектор углового ускорения

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \tag{1.19}$$

При ускоренном вращении вектор $\vec{\varepsilon}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{\omega}$, при замедленном — направлен в противоположную сторону. Что мы заметили общего для векторов $d\vec{\varphi}, \vec{\omega}, \vec{\varepsilon}$?

1. Направления векторов связаны с направлением вращения (поэтому они называются ***псевдовекторами*** или ***аксиальными*** векторами).

2. Векторы $\mathrm{d}\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ направлены по оси вращения и не имеют определенных точек приложения, они могут откладываться из любой точки оси вращения (рисунок 1.26).

Как связана линейная скорость с угловыми характеристиками?

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{r}]; \qquad |\vec{\upsilon}| = \omega r \times \sin(\vec{\omega}, \vec{r}) \qquad (1.20)$$

Тангенциальная и нормальная составляющие полного ускорения нам также здесь пригодятся, связь их с угловыми характеристиками легко получить:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{r d\omega}{dt} = \varepsilon r; \quad a_n = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 r. \qquad (1.21)$$

Таким образом, связь линейных и угловых характеристик:

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{r}]; \qquad a_\tau = \varepsilon r; \qquad a_n = \omega^2 r. \qquad (1.22)$$

Аналогично тому, как рассматривалась классификация движений по линейным кинематическим характеристикам ($\vec{\upsilon}$ и $\vec{a}$), можно указать виды вращательного движения:

$\vec{\omega} = \mathrm{const}$ – равномерное вращение;

$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 \pm \vec{\varepsilon} t, \quad \vec{\varepsilon} = \mathrm{const}$ – равнопеременное вращение;

$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$, φ —угловой путь.

Число оборотов $N = \frac{\varphi}{2\pi}$.

$\vec{\omega} \neq \mathrm{const}$ – неравномерное вращение.

$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}; \qquad \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}.$

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

Основные понятия

1. ***Масса.*** Всякое тело оказывает сопротивление при попытках привести его в движение или изменить модуль или направление его скорости. Это свойство тел называется ***инертностью***. Масса — количественная мера инертности тел при поступательном движении.

2. ***Импульс***, или количество движения — вектор, равный произведению массы тела на его скорость.

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon} \qquad (2.1)$$

3. ***Сила*** - причина изменения импульса (скорости) тела.

Законы Ньютона.

1- й закон — закон инерции

Существуют системы отсчета, в которых свободная материальная точка (тело) движется равномерно и прямолинейно или покоится.

Такие системы отсчета называют **инерциальными**. Инерциальной является гелиоцентрическая система отсчета, связанная с Солнцем и тремя звездами, направления на которые взаимно перпендикулярны (это можно установить опытным путем). Всякая другая система, которая движется равномерно и прямолинейно или покоится относительно гелиоцентрической, тоже инерциальна. Система отсчета, связанная с Землей, не является инерциальной, потому что Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца, но при изучении законов динамики неинерциальностью земной (геоцентрической) системы можно пренебречь.

2-й закон — основной закон динамики

В инерциальной системе отсчета производная от импульса (скорость изменения импульса) материальной точки по времени равна суммарной действующей на нее силе:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad (2.2)$$

Если $\upsilon << c$ (c — скорость света в вакууме), то m = const и

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}\,. \qquad (2.3)$$

Как перейти от 2 закона Ньютона к уравнению движения? Это возможно, если представить его в другой форме, записав ускорение $\vec{a}$ как вторую производную от радиуса вектора по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2},$$

тогда

$$\vec{F} = \frac{md^2\vec{r}}{dt^2}.$$

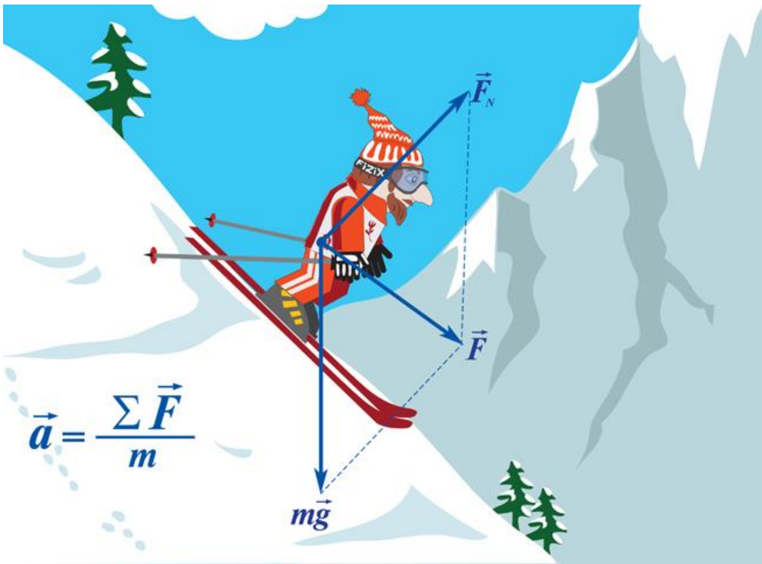


Рисунок 1.13 — К пояснению 2 го закона Ньютона
https://zaochnik.ru/blog/2018/03/image010.png

Поскольку

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

то уравнение (2.2) связывает действующие на тело силы с координатами, т.е. позволяет определить положение тела в пространстве в каждый момент времени и является ***уравнением движения*** в динамике в векторной форме. Этому уравнению соответствуют три скалярных уравнения:

$$F_x = \frac{md^2x}{dt^2}, \quad F_y = \frac{md^2y}{dt^2}, \quad F_z = \frac{md^2z}{dt^2}.$$

Если сила F_i определена независимым способом (то есть не по ускорению или изменению импульса тела), то двойным интегрированием уравнения можно определить координаты тела в любой момент времени. При этом должны быть заданы начальные условия для r_0 и υ_0. Из опыта известно, что силы подчиняются принципу суперпозиции (наложения): каждая сила F_i сообщает телу (точке) одно и то же ускорение a_i независимо от того, действуют на это тело другие силы или нет.

3-й закон — закон взаимодействия

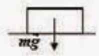
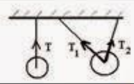
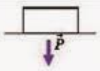
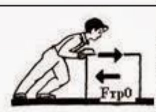
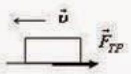
Силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (2.4)$$

.

Силы в природе

Данная таблица взята с ресурса http://ege-legko.blogspot.com/p/blog-page_76.html

Сила	Со стороны какого тела	точка приложения	направление	формула	Пример	Примечание
гравитационная сила	со стороны массивного тела (Земля, Луна, Солнце)	Центр масс данного тела	по прямой, соединяющей тела, в сторону притягивающего тела	$F = \gamma \frac{mM}{R^2}$		
сила тяжести	со стороны Земли	Центр масс данного тела	вертикально вниз	$F = mg$		Сила тяготения со стороны Земли, когда тело находится около поверхности Земли
сила упругости	со стороны деформированного упругого тела (пружины)	Центр масс данного тела	вдоль пружины, в зависимости от характера ее деформации	$F = -kx$		x - деформация (отклонение от положения равновесия) пружины
сила натяжения	со стороны деформированного тела (нити)	Центр масс данного тела	вдоль подвеса, в сторону уменьшения его деформации	нет		
сила реакции опоры	со стороны деформированного тела (опоры)	Центр масс данного тела	перпендикулярно поверхности опоры, в сторону уменьшения ее деформации	нет		
сила Архимеда	со стороны жидкости, в которую погружено тело	Центр масс данного тела	вертикально вверх	$F = \rho_{ж} g V_{погр}$		
вес	со стороны тела, которое лежит, висит на опоре	к опоре	противоположно силе реакции опоры	равен силе реакции опоры или силе натяжения подвеса		
сила трения покоя	со стороны деформированного тела (опоры) при попытке сдвинуть тело	к телу, в точках соприкосновения	параллельно поверхности, противоположно действующей силе	равна действующей силе, но не более $\mu_0 N$		возникает только при воздействии на тело сторонней силы
сила трения скольжения	со стороны деформированного тела (опоры) при движении	к телу, в точках соприкосновения	параллельно поверхности, противоположно неправлению скорости	$F = \mu N$		если тело не вращается, можно рассматривать силу трения, приложенной к центру масс