

$$x_{m+1}=0, \quad x_{m+2}=0, \dots; \quad x_n=0,$$

онда сәйкес негізгі айнымалылар мәндерді қабылдайды

$$x_1 = \beta_1; \dots; x_n = \beta_n.$$

$$= \beta_1; \dots; \beta_n$$

Осындай компоненттері бар x векторы мультиктің бұрыштық нүктесі болып табылады

$b \neq 0$ болған жағдайда (рұқсат етілген) шешімдер Δ (негізгі жоспар).

Енді функционалдық мәні кішірек басқа бұрыштық нүктеге өту керек. Мұны істеу үшін кейбір негізгі емес айнымалыларды таңдау керек, сонда біз оларды «ауыстырғаннан» кейін мақсат функциясының мәні төмендейді. Мұндай бағытталған іздеу ақыр соңында бізді мәселені шешуге жетелейді

Мысал 1. Келіңіздер

$$Q(\bar{x}) = \xi_4 - \xi_{\text{бес}} \rightarrow \min,$$

$$x_1 + \xi_4 - 2\xi_{\text{бес}} = 1, \quad |$$

$$x - 2\xi_4 + \xi_{\text{бес}} = 2, \quad |$$

$$x_3 + 3\xi_4 + \xi_{\text{бес}} = 3. \quad |$$

Келесі айнымалыларды негізгі ретінде таңдайық $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ және

біз осы айнымалыларға қатысты жүйені тігеміз. Шектеу жүйесі келесі формада болады:

$$x_1 = 1 - \xi_4 - 2\xi_{\text{бес}}, \quad |$$

$$x = 2 + 2\xi_4 - \xi_{\text{бес}}, \quad |$$

$$x_3 = 3 - 3\xi_4 - \xi_{\text{бес}}, \quad |$$

Айнымалылар $\{x_4,$ негізгі емес. Егер сіз алсаңыз

$x_5\}$

$$\begin{aligned} x_4 &= 0, \quad x_{\text{бес}} = 0, \\ \sum & \quad | \end{aligned}$$

бұрыштық нүктені алыңыз (анықтама жоспары)

$$\bar{x}^1 = [1 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0]^T,$$

сәйкес келеді $Q(\bar{x}^1) = 0.$

Мақсатты функция мәнін жоғарылату арқылы төмендетуге болады

$x_{\text{бес}} \dots$
Қашан

Ұлғаюда $x_{\text{бес}}$ шамасы x_1 өседі, және

x_1 x_3 - төмендеу.

жән

е

Сонымен қатар, x_1 ертерек жағымсыз болуы мүмкін. Сондықтан, негізге енгізу құндылық

айнымалы $x_{\text{бес}}$, бір уақытта x_1 негізден алып тастау. Нәтижесінде, кейін

көрінетін түрлендірулерден, біз негізгі айнымалылардың жаңа жүйесі және мақсаттық функция үшін келесі өрнектер аламыз:

$$x_{\text{бес}} = 2 - \xi_1 \in 2J_4, \mathbb{R}$$

$$x = 5 - 2J_1 + 3J_4, \mathbb{R}$$

$$x_3 = 1 + \xi_1 \in 5J_4, \mathbb{R}$$

$$Q(\bar{x}) = -2 - \xi_4 + \xi_2 \rightarrow \mathbb{R} \cdot \nabla \wedge \mathbb{R}$$

$$\sum \langle \otimes \rangle \square \diamond \square \diamond \square \diamond \square \diamond \square \quad \bar{x}^{-1} = [\text{бес } 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T \text{ және } Q(x^1) = \mathbb{R}1 \dots$$

Мақсатты функцияны ұлғайту арқылы азайтуға болады $x_4 \dots$ Үлкейту

x_4 тек төмендеуіне әкеледі $x_3 \dots$ Сондықтан біз айнымалыны негізге x_4 , енгіземіз

а x_3 негізден алып тастау. Нәтижесінде біз келесі өрнектерді аламыз:

негізгі айнымалылар жүйесі және мақсаттық функция:

$$x = 1 + \frac{1}{4} \xi - \frac{1}{28} \xi, \quad \left| \begin{array}{l} \text{бес}^1 \quad \text{бес}^3 \\ 28 \quad 7 \quad 3 \\ \hline -x, \end{array} \right|$$

$$x_1 = \frac{1}{\text{бес}} - \frac{x_1}{\text{бес}} - \frac{3}{\text{бес}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{бес} \quad \text{бес} \quad \text{бес} \end{array} \right|$$

$$x = \frac{12}{\text{бес}} - \frac{3}{\text{бес}} \xi - \frac{2}{\text{бес}^1} \xi, \quad \left| \begin{array}{l} \text{бес}^1 \quad 3^3 \\ \hline \end{array} \right|$$

$$Q(x) = -11 + 4 \xi + 1 \xi \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{бес} \quad \text{бес} \quad \text{бес}^1 \quad \text{бес}^3 \end{array} \right|.$$

Сәйкес анықтамалық жоспар

$$\bar{x}^3 = \begin{bmatrix} 28 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ \hline \text{бес} & \text{бес} & \text{бес} & \text{бес} & \text{бес} \end{bmatrix} \quad \text{және баға мәні} \quad T$$

сол жақ функция

$$Q(\bar{x}^3) = \frac{1}{6} \dots \text{Негізгі емес трансферттердің барлық}$$

коэффициенттері болғандықтан

мақсат функциясындағы айнымалылар теріс емес, содан кейін мақсат ұлғайту арқылы функция оңтайландырылады.

x_1 x_3 , демек, алынған жоспар немес е

$\frac{3}{x}$ Мен ... ішінд е-

Мысал 2. Бізде мәселе бар

$$Q(x) = -\xi_1 - \xi_1 \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{бес} \quad \text{бес} \end{array} \right|,$$

$$\begin{array}{l} x_3 = 1 + \xi_1 - \xi_1, \quad \left| \begin{array}{l} \text{бес}^1 \quad \text{бес}^1 \\ \hline \end{array} \right| \\ x = 2 - \xi + 2\xi, \quad \left| \begin{array}{l} \text{бес}^1 \quad \text{бес}^1 \\ \hline \end{array} \right| \\ \bar{x} \geq 0. \quad \left| \begin{array}{l} \text{бес}^1 \quad \text{бес}^1 \\ \hline \end{array} \right| \end{array}$$

Айнымалы $\{x_3, x_4\}$ - негізгі, және $\{x_1, x_1\}$

— негізгі емес айнымалылар.

Негізгі жоспар $\bar{x} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1]^T$, —

0

$$Q(x^0) = 0 \dots$$

Енді біз айнымалыны негізге
енгіземіз

$x_1, \dots, x_4$ негізден алып тастау. Қайтадан
жән
е

Нәтижесінде негізгі айнымалылар мен мақсат функциясы үшін келесі өрнектерді
аламыз:

$$x_1 = 2 + 2\xi_1 - \xi_4, \quad \xi_1 \in \mathbb{R}$$

$$x = 3 + \xi_1 - \xi_4, \quad \xi_1 \in \mathbb{R}$$

$$\xi_1 \in \mathbb{R}$$

$$Q(x) = -2 - 3\xi_1 + \xi_4 \dots$$

Негізгі жоспар $\bar{x}$

$$^1=[1 \quad 0 \quad 3 \quad 0]^T$$

, Q x мақсатты функциясының мәні

$$)= -2.$$

$$\left(\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix} \right)$$

Енді сіз x_2 ұлғайған сайын айнымалылардың мәндерін көре аласыз

x_1
және

—

x_3 жоғарылайды, яғни рұқсат етілген аймақта x_2 ☐ ☐ үшін

$$Q(x) \rightarrow -\infty \text{ (форт)}$$

саяжайда ешқандай шешім жоқ).

Түсініктеме. Рұқсат етілген жоспарды іздеу барысында шектеулер жүйесінің сәйкессіздігі анықталуы мүмкін.

7.1. Қарапайым әдіс алгоритмі

Симплекс әдісінің формаланған алгоритмі екі негізгі кезеңнен тұрады:

1) анықтамалық жоспар құру;

2) оңтайлы жоспар құру.

Алгоритмді бұрын қарастырылған мысал арқылы көрсетейік:

$$Q(x) = \xi_4 - \xi_{\text{бес}} \rightarrow \max,$$

$$x_1 + \xi_4 - 2\xi_{\text{бес}} = 1, \quad |$$

$$x - 2\xi_1 + \xi_4 = 2, \quad |$$

$$x_3 + 3\xi_4 + \xi_{\text{бес}} = 3, \quad |$$

--

$$x \geq 0.$$

бастапқы симплекс кестесі

Негізгі айнымалылар жағдайында

$$\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$$

бұл мысал келесідей болады:

	$-\xi_4$	$-\xi_{\text{бес}}$	1
$x_1 =$	1	-2	1
$x_1 =$	-2	1	1
$x_3 =$	3	1	3
$Q(x) =$	-1	1	0

Ол қазірдің өзінде бос мүшелердің бастапқы сызығына сәйкес келеді).

$$\bar{x}^1 = [1 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0]^T \text{ (баған)}$$

Оңтайлы жоспар құру. Бастапқы жоспар болу үшін

минималды, максат функциясын минимизациялау кезінде максат функциясының жолындағы коэффициенттердің оң болмауы қажет (максимум жағдайында, теріс емес). Анау. минимумды іздеген кезде біз өзімізді босатуымыз керек

қатардағы оң коэффициенттер $Q \leq x \leq$.

Ажыратымдылық элементін таңдау... Егер мақсат функциясы қатарында минимумды іздеу кезінде нөлден үлкен коэффициенттер болса, онда бағананы таңдаймыз

мақсат функциясының жолындағы рұқсат етілген коэффициент ретінде. Бұл 1 бағанына айналсын.

Резолюциялық бағанның оң коэффициенттерінің арасынан шешуші сызықты (шешуші элементті) таңдау үшін еркін мүшелер бағанындағы коэффициенттің шешуші бағандағы коэффициентке қатынасы минимум болатын біреуін (жолды) таңдаңыз:

$$\frac{b_p}{a_{rl}} = \min \left\{ \frac{b_p}{a_{il}} \mid a_{il} > 0 \right\},$$

a_{rl} - рұқсат етуші (бағыттаушы) элемент, r сызығы - рұқсат етілген.

Келесі симплекстік кестеге көшу үшін (мақсат функциясының төмен мәні бар келесі бастапқы жоспар) модификацияланған қадам орындалады
Иорданиядағы ерекшелік $a_{rl} \dots$

Егер шешуші бағанда оң коэффициенттер болмаса, онда мақсат функциясы төменнен шектелмейді (максимизация кезінде ол жоғарыдан шектелмейді).

Симплекс кестесі бойынша Иорданияны модификациялау кезеңі.

1. Шешуші элементтің орнына 1 қойылады және шешуші элементпен бөлінеді.
2. Резолюциялық бағанның қалған элементтері керісінше болып, шешуші элементке бөлінеді.
3. Рұқсат етуші сызықтың қалған элементтері рұқсат етілетін элементке бөлінеді.
4. Симплекс кестесінің барлық басқа элементтері келесі формула бойынша есептеледі:

$$a_{ij} = \frac{a_{uj} \cdot \alpha_{rl} - a_{rj} \cdot \alpha_{il}}{a_{ul} - \alpha_{il} \cdot \alpha_{rl}}$$

	$-\xi_4$	$-\xi_{\text{бес}}$	1
x_1	1	-2	1
$x_{2018-04-21}$	-2	1	2018-04-21
Аттеста			21

Негізгі айнымалыны ауыстыруға сәйкес келетін рұқсат етуші элемент x_1 x_5 негізгі емес айнымалысына.

Негізгі айнымалыны ауыстыруға сәйкес келетін рұқсат етуші элемент x_3 x_4 негізгі емес айнымалыға.

Мақсат функциясы сызығындағы барлық коэффициенттер теріс; біз оңтайлы шешімді таптық.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \beta_1 - \alpha_{1,1} \cdot \xi_1 - \alpha_{1,n} \cdot \xi_n, \\ \dots \\ 0 \leq \beta_m - \alpha_{m,1} \cdot \xi_1 - \alpha_{m,n} \cdot \xi_n, \end{array} \right. x = \langle -\alpha_{n+1,1} \cdot \xi - \dots - \alpha_{n+1,v} \cdot \xi, \dots \rangle$$

$$\left| \begin{array}{ccccccc} x & = & \langle & -\alpha & \cdot & \xi - \dots - \alpha & \cdot & \xi, \\ n+\bar{\alpha} & & m+\bar{\alpha} & & m+\bar{\alpha}, 1 & & 1 & & m+\pi, \vee & n \end{array} \right|$$

$$x_{n,l} \geq 0, \quad l = 1, \dots, \langle$$

Біз негізгі айнымалылар ретінде қосымша енгізілген айнымалылар жүйесін аламыз. Сонда түрлендірілген мәселеге арналған симплекс кестесі келесідей болады:

	$-\xi_1$	$-\xi_1$		$-\xi_S$	...	$-\xi_n$	1
0	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$		$a_{1, C.}$		$a_{1, n}$	$\bar{b}_1$
....		...		...	...	...	...
0	$a_{\mathcal{M}, 1}$	$a_{\mathcal{M}2}$		$a_{\mathcal{M}, S}$		$a_{\mathcal{M}, n}$	$\bar{b}_{\mathcal{M}}$
$x_{\mathcal{M}+1}$	$a_{\mathcal{M}+1,1}$	$a_{\mathcal{M}+1.2}$		$a_{\mathcal{M}+1, \rangle}$		$a_{\mathcal{M}+1, \vee}$	$\bar{b}_{\mathcal{M}+1}$
....							...
$x_{\mathcal{M}+\langle}$	$a_{\mathcal{M}+\langle, 1}$	$a_{\mathcal{M}+\langle, 2}$		$a_{\mathcal{M}+\pi, \Sigma}$		$a_{\mathcal{M}+\pi, \vee}$	$\bar{b}_{\mathcal{M}+\langle}$
$Q(\bar{x})$	$-\chi_1$	$-\chi_1$		$-c_S$		$-\chi_n$	0

Анықтама жоспарын іздеу кезінде ажыратымдылық элементін таңдау ережелері

1. Егер «0-жолдар» (теңдік шектеулері) және «еркін» айнымалылар (яғни, теріс емес талапқа бағынбайтын айнымалылар) болмаса.

- Егер симплекс кестесінің еркін мүшелерінде теріс элементтер болмаса, онда сілтеме жоспары табылған.
- Мысалдың еркін бағанында теріс элементтер бар, мысалы
- ша $b_i < 0$. $\leftarrow \pm \{ \text{TM} \diamond \rceil \gg \rfloor \square \int \diamond \langle \geq \rfloor \Sigma \square \geq \rangle | \wr | | \backslash \backslash (\Sigma \{ \rfloor \geq \text{TM} \Sigma \rfloor \geq \}$ рал a_{ij} және, осылайша ар

шешуші бағанды анықтаңыз 1. Егер біз теріс деп таппасақ a_{ii} содан
шектеулер жүйесі сәйкес келмейді (қарама-қайшы). кейін -

- Сәйкес келетін жолды таңдаңыз
 минималды коэффициент: $b_p = m$ жылы $b_{мен} > 0$ | қайда p - рұқсат беру саны
 | $b_{мен}$

$$a_{pl} \quad \text{---} \quad \text{мен} \quad \left(\begin{array}{c|c} \{ \text{---} & \text{---} \\ a_{менл} & a_{менл} \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right\}$$

жіптер. Осылайша, $a_{r/l}$ – рұқсат етуші элемент.

- Шешуші элемент табылғаннан кейін, біз өзгерту қадамын жасаймыз келесі симплекстік кестеге бағыттаушы элементі бар Иорданияны a_{rl} және өтпелі жоюды келтірді. кезең

2. Теңдік шектеулері мен «еркін» айнымалылар болған жағдайда келесі әрекеттерді орындаңыз.

- «0-жолдағы» шешуші элемент таңдалып, Иорданияны модификациялау қадамы жасалады, содан кейін бұл шешуші баған жойылады. Бұл әрекеттер тізбегі симплекс кестесінде кем дегенде бір «0-қатар» қалғанша жалғасады (осылайша кесте қысқартылады).

- Егер еркін айнымалылар болса, онда бұл айнымалылар негізгі болуы керек. Еркін айнымалы негізгіге айналғаннан кейін, анықтамалық және оңтайлы жоспарларды іздеу кезінде шешуші элементті анықтау барысында бұл жол есепке алынбайды (бірақ түрлендіріледі).

7.2. Сызықтық бағдарламалау мәселелеріндегі деградация

Симплекс әдісін қарастыра отырып, сызықтық бағдарламалау мәселесі деградацияланбаған деп қабылдадық, яғни. әрбір бастапқы жоспар нақты m оң компоненттерден тұрады, мұндағы m - проблемадағы шектеулер саны. Дистрофиялық анықтамалық жобалау кезінде оң компоненттер саны шектеулер санынан аз болады: берілген сілтеме дизайнына сәйкес келетін кейбір негізгі айнымалылар нөлдік мәндерді қабылдайды. Геометриялық қарапайым жағдайды түсіндіру (38-сурет), қашан

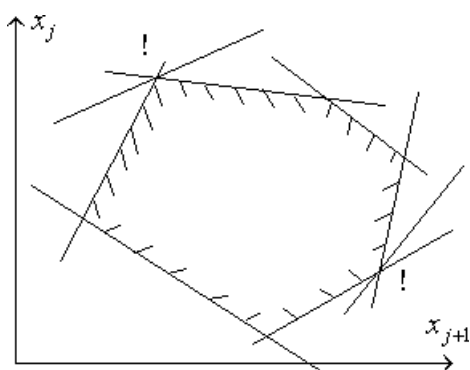
$$n - \mu = 2 \text{ (нөмір)}$$

базис емес айнымалылардың 2-ге тең), дегенеративті мәселені жаман емес проблемадан ажырату оңай. Дегенеративті мәселеде, полиэдрдің бір шыңында, жағдайлар

екіден көп түзулер пішін теңдеулерімен қиылысады

$$x_i = 0, \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$$

Бұл шарттар полигонының бір немесе бірнеше жағы нүктеге дейін қысқаратынын білдіреді.



Сурет: 38. Азғындау ұғымына

Сол сияқты $n - \mu = 3$ дегенеративті мәселеде бір шың қиылысады

3-тен астам ұшақ

$$x_{мен} = 0.$$

Мәселе түсініксіз болды деген болжаммен, біреу ғана белгілі болды
оқу $\theta = \min_{мен} \{b_{мен} \mid b_{мен} > 0\}$, ол бойынша мәліметтер базасынан шығудың индексі анықталды
 $\{a_{менл} \mid a_{менл} > 0\}$

шарт векторы (негізгі айнымалылар санынан алынған).

$$\text{Азғындаған проблемада } \min \{b_i \mid a_{ij} x_j \geq b_i\}$$

$$b_{мен} > 0 \square \square$$

бірнеше қол жеткізуге болады

мен

$$[a_{менл} a_{менл}]$$

бірден индекстер (бірнеше қатар үшін). Бұл жағдайда табылған сілтеме жоспарында бірнеше негізгі айнымалылар нөлге тең болады.

Егер сызықтық бағдарламалау есебі дегенеративті болып шықса, онда базистен алынған шарттар векторын нашар таңдау кезінде сол сілтеме жоспары негізінде шексіз қозғалыс пайда болуы мүмкін. Бұл цикл құбылысы деп аталады. Сызықтық про практикалық есептерінде

грамматикалық цикл өте сирек кездеседі, оның мүмкіндігі жоққа шығарылмайды.

Дегератизммен күресу әдістерінің бірі - қоршау жүйесінің оң жақ векторын өзгерту арқылы мәселені «елеусіз» өзгерту.

□ і шамалары бойынша проблема деградацияланбайтын етіп, және өзгереді

сонымен қатар, бұл өзгеріс шынымен проблеманың оңтайлы жоспарына әсер етпеуі үшін.

Алгоритмдерге кеңінен енгізілген кейбір қарапайым ережелер кіреді, олар циклдің пайда болу немесе жеңу ықтималдығын азайтады.

Айнымалы болсын x_j негізгі болуы керек. Жинақты қарастырайық

мемлекет E_0 , тұратын туралы анау мен, үшін
индексте қайсысы қол жеткізілді
р

$$\theta_0 \leq \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ a_{ii} > 0}} \{ \frac{b_i}{a_{ii}} \} \dots \text{Берілген индекстер жиынтығы}$$

шартпен белгіленеді $E_0 \dots E_0$ бір элементтен тұрады, содан кейін негізден
Егер а

шарттар векторын қоспайды $A_{мен}$ хінегізгі емес болады).
(айнымалы

Егер E_0 бірнеше элементтерден, содан кейін жиынтықтан тұрады
а

$$E \text{ ол } \min_{1 \leq i \leq n} \{ a_{ii} \} \text{ болатын } i \text{ } E\text{-ден тұрады. Егер } E = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{ a_{ii} \}$$

бір индекстен тұрады k , содан кейін айнымалы негізден алынады $x_k \dots$ Қарсы

әйтпесе жиынтық E_1 және т.б.

Іс жүзінде ереже цикл бұрыннан анықталған болса қолданылуы керек.

7.3. Сызықтық бағдарламалау мәселесінің қосарлылығы

Сызықтық форманы ұлғайтуға арналған (7.1) және сонымен бірге азайтуға арналған (7.2) есепті қарастырайық:

— — —

$$Q(x) = \begin{cases} \xi \rightarrow \mu\alpha\xi, & | \\ A \cdot \bar{x} \leq \beta, & | \\ & x \geq 0, \end{cases} \quad (7.1)$$

$$W(\tau_{sen}) = \begin{cases} \nu \rightarrow [\backslash,] & | \\ A \square \cdot \bar{\xi} \geq \bar{\pi}, & | \\ - & x \in \mathbb{R} \\ & sen \geq 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

(7.2) есеп (7.1) жолына қатысты қосарланған деп аталады (және керісінше).

Мысал: Кәсіпорын өнімнің үш түрін шығарады. Әр өнім үш түрлі өсімдіктерде өңдеуді қажет етеді. Орнатудың әр түрінің уақыт ресурсы шектеулі. Өнімнің әр түрінің бірлігіне келетін пайда белгілі.

тақ b_1, p_2, p_3 . Егер әр түрдегі өнім саны болса
ыры
пта
р:

x_1, x_2, x_3 , содан кейін пайда формула бойынша анықталады

$$Q(x) = \langle_1 \cdot \xi_1 + \langle_1 \cdot \xi_1 + \langle_3 \cdot \xi_3 \rightarrow \{ \} \rangle$$

келесі шектеулермен:

$$a_{\text{он бір}} \cdot \xi_1 + \alpha_{12} \cdot \xi_1 + \alpha_{13} \cdot \xi_3 \leq \langle_1, a_{21} \cdot \xi_1 + \alpha_{22} \cdot \xi_1 + \alpha_{23} \cdot \xi_3 \leq \langle_1, a_{31} \cdot \xi_1 + \alpha_{32} \cdot \xi_1 + \alpha_{33} \cdot \xi_3 \leq \langle_3, x \in \mathbb{R}_0,$$

Қа $b_1, b_1, \dots$ – бірінші, екінші және үшінші типтегі қондырғылардың уақыт
йд b_3 – ресурстары. $\forall$ -
а

маскир a_u i -ші типті орнатудың уақыттық ресурсының мөлшерін анықтаңыз, ол
овка ж

үйір j -ші типті өндірістің бір бірлігін шығару үшін қажет.

Оған қосарланған тапсырма келесідей болады:

$$W(\text{сен}) = \langle_1 \cdot \nabla \geq |_1 + \langle_1 \cdot \nabla \geq |_1 + \langle_3 \cdot \nabla \geq |_3 \rightarrow \{ \setminus \}$$

шектеулермен:

$$\begin{cases} a_{\text{он бір}} \cdot \nabla \geq |_1 + \alpha_{21} \cdot \nabla \geq |_1 + \alpha_{31} \cdot \nabla \geq |_3 \geq \langle_1, \\ a \cdot v + \alpha \cdot v + \alpha \cdot v \geq \pi, \\ \left\{ \begin{array}{l} 12 \quad 1 \quad 22 \quad 1 \quad 32 \quad 3 \quad 1 \quad \dots \\ a \cdot v + \alpha \cdot v + \alpha \cdot v \geq \pi, \\ 13 \quad 1 \quad 23 \quad 1 \quad 33 \quad 3 \quad 3 \end{array} \right. \\ \text{сен} \geq 0. \end{cases}$$

Мұндағы u_1 - шектеулі бірлікке сәйкес келетін баға (баға)
бірінші қондырғыға сәйкес келетін ресурс. Егер бұл шектеулі ресурстардың мөлшері
бір-біріне көбейсе және егер бұл өсім болса, онда жалпы пайданың артуы мүмкін
сомаға тең.

оңтайлы қолданылады. Басқа сөздермен сен_1 Пайда мөлшері, кем
айтқанда,

шектеулі ресурстық блоктың болмауына байланысты алынған $b_1 \dots$ Ұқсас

Осылайша, u_2 және u_3 шамаларының мағынасын түсіндіруге болады.

Тұра және қосарланған есептерді шешуде түрлендірулер

Төмендегідей тікелей және қосарлы есептер болсын:

Тікелей тапсырма:

$$Q(\bar{x}) = \bar{c}^T \cdot \bar{x} \rightarrow \max,$$

$$A \cdot \bar{x} \leq \bar{b}, \quad \bar{x} \geq 0.$$

Шектеуді келесі түрде көрсетейік:

$$\bar{z} = -A \cdot \bar{x} + \bar{b} \geq 0,$$

$$\bar{x} \geq 0.$$

Оған екі жақты тапсырма:

$$W(\overline{sen}) = \beta \cdot \overline{v} \rightarrow 1 \{,$$

$$AT \cdot \overline{v} \geq \overline{\pi}, \overline{v} \geq 0.$$

$$\overline{v} = AT \cdot \overline{v} - \overline{\pi} \geq 0,$$

$$\overline{sen} \geq 0.$$

Тікелей есептің шектеулері үшін симплекс кестесінің келесі формасы бар:

	$-\xi_1$	...	$-\xi_S$	...	$-\xi_n$	1
$\mathcal{K}_1 =$	$a_{\text{он бір}}$	...	a_{1S}	...	a_{1n}	$\bar{b}_1$
...	...	...	...	...	...	...
$\mathcal{K}_p =$	a_{p1}	...	a_{rS}	...	a_{pn}	$\bar{b}_p$
...	...	...	...	...	...	...
$\mathcal{K}_M =$	a_{M1}	...	$a_{Xаны}$	...	a_{Mn}	$\bar{b}_M$
	M					
$Q(\overline{x}) =$	$-\bar{b}_1$	...	$-\bar{b}_S$	...	$-\bar{b}_n$	0

Болс a_{rs} - рұқсат етуші элемент, модификацияланған қадамды жасайық
ын

Иорданиядан ерекше жағдайлар:

	$-\xi_1$	...	Ψ_p	...	$-\xi_n$	1
$\mathcal{K}_1 =$	$\bar{b}_{\text{он бір}}$	...	$\cdot A_{1S}$	...	$\bar{b}_{1n}$	$\bar{b}_{1, n \square 1}$
...	...	...	...	...	...	...
$x_S =$	a_{p1}	...	1	...	a_{pn}	$\bar{b}_p$
...	...	...	...	...	...	...
$\mathcal{K}_M =$	$\bar{b}_{M1}$	...	$\cdot A_{Xаны}$	...	$\bar{b}_{Mn}$	$\bar{b}_{M, n \square 1}$
	M					
$Q(\overline{x}) =$	$\bar{b}_{M+1, 1}$	...	$\bar{b}_S$	...	$\bar{b}_{M+1, v}$	$\bar{b}_{M+1, v+1}$

Мұн да $\bar{b}_{иж} = \alpha_{иж} \cdot \alpha_{rS} - \alpha_{rj}$ және осы кестені одан әрі қарай бөлу керек
 $a_{rS} \cdot \alpha_{rS}$
...

Екіге арналған есептің симплексті кестесін оны кеңейту арқылы жазамыз
90° ... Біз алып жатырмыз:

	$v_1 =$	...	$v_c =$	...	$v_n =$	$W =$
sen_1	$a_{\text{он бір}}$	...	a_{1S}	...	a_{1n}	$\bar{b}_1$

...	...	...	...	...	...	...
$ce\eta_p$	a_{p1}	...	a_{rS}	...	a_{pn}	$\bar{b}_p$
...	...	...	...	...	...	...
$ce\eta_m$	a_{m1}	...	$a_{\text{Ханы}}$	...	a_{mn}	$\bar{b}_m$
			m			
1	$-\bar{b}_1$	...	$-\bar{b}_S$	...	$-\bar{b}_n$	0

Болс a_{rs} – бағыттаушы элемент. Қарапайым жорданың қадамын жасайық ын

жаңа ерекшеліктер (өзгертілгеннен айырмашылығы - шешуші сызықтағы элементтер белгілерді өзгертеді, ал бағандағы белгілер сақталады; әйтпесе түрлендіру өзгеріссіз қалады):

	$v_1 =$	...	$sen_p =$	...	$v_n =$	$W =$
sen_1	$\bar{b}_{он\ бір}$	...	A_{1S}	...	$\bar{b}_{1n}$	$\bar{b}_{1, n \square 1}$
...	...	...	...	...	...	...
v_c	a_{p1}	...	1	...	a_{pn}	$\bar{b}_p$
...	...	...	...	...	...	...
sen_m	$\bar{b}_{m1}$	...	$A_{Ханы}$	...	$\bar{b}_{mn}$	$\bar{b}_{m, n \square 1}$
m						
1	$\bar{b}_{m+1,1}$	...	$\bar{b}_S$	...	$\bar{b}_{m+1, v}$	$\bar{b}_{m+1, v+1}$

Мұн да $\bar{b}_{uj} = \alpha_{uj} \cdot \alpha_{rs} - \alpha_{rj} \cdot \alpha_{is}$ және осы кестені де бөлу керек

әлі де $a_{rs} \dots$

Пікір: Түрлендірулер кезінде ұмытпаңыз, бұл жағдайда кесте кеңейеді.

Осылайша, тікелей есептің симплекс кестесі бойынша Иорданияны модификациялау кезеңі қарапайым есептің екі жақты есеп бойынша қарапайым символдық кесте бойынша жою қадамымен сәйкес келетінін байқау қиын емес. Бұл өзара екі тапсырманы бір симплекс кестесінде біріктіруге болады:

	$v_1 =$	...	$v_c =$	...	$v_n =$	$W =$
	$-\xi_{S1}$		$-\xi_{S}$		$-\xi_{Sn}$	1
$sen_1 ж_1 =$	$a_{он\ бір}$	...	a_{1S}	...	a_{1n}	$\bar{b}_1$
...	...	...	...	...	...	...
$sen_p ж_p =$	a_{p1}	...	a_{rS}	...	a_{pn}	$\bar{b}_p$
...	...	...	...	...	...	...
$sen_m ж_m =$	a_{m1}	...	$a_{Ханы}$	...	a_{mn}	$\bar{b}_m$
m						
$1 Q(\bar{x}) =$	$-\bar{b}_1$	...	$-\bar{b}_S$	...	$-\bar{b}_n$	0

Негізгі сызықтық бағдарламалау есебін шеше отырып, біз оған қосарлы шешетінімізді де көрсетуге болады. Және керісінше. Сонымен, максималды $Q \square$ мин Вт.

Дуализм теоремалары

Сызықтық бағдарламалаудың негізгі қосарлық теоремасы

Қос проблеманың жұбын қарастырайық:

$$\begin{aligned}
 Q(\bar{x}) = \begin{cases} \bar{b}^T \cdot \bar{x} \rightarrow \max, \\ A \cdot x \leq \beta, \\ \bar{x} \geq 0, \end{cases} & \quad (7.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W = \min_{x \in \mathbb{R}^n} & \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i \\
 \text{с.т.б.} & \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq b_j, \quad j=1, \dots, m \\
 & \quad x_i \geq 0, \quad i=1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Егер осы есептердің бірінде оңтайлы шешім болса, онда оның қосарланған есебінде де оңтайлы шешім болады. Сонымен, сәйкес сызықтық формалардың шекті мәндері тең: $\max Q = \min W$.

Егер осы есептердің бірі үшін сызықтық форма шектелмеген болса, онда оған қосарланған есеп қайшы келеді.

Дәлелдер: Негізгі есепте (7.1) ақырғы шешім болсын және соңғы симплекс кестесі алынады:

		sen_1		sen_c	$v_{c+1} =$		$v_n =$	$W =$
		Ψ_1		Ψ_c	$-\xi_{c+1}$		$-\xi_n$	1
v_1	$x_1 =$	$\bar{b}_{1,1}$		$\bar{b}_{1,c}$	$\bar{b}_{1,s+1}$		$\bar{b}_{1,n}$	$\bar{b}_{1,n+1}$
....								
v_c	$x_c =$	$\bar{b}_{c,1}$		$\bar{b}_{c,s}$	$\bar{b}_{c,s+1}$		$\bar{b}_{c,n}$	$\bar{b}_{c,n+1}$
sen_{c+1}	$ж_{c+1} =$	$\bar{b}_{c+1,1}$		$\bar{b}_{c+1,s}$	$\bar{b}_{c+1,s+1}$		$\bar{b}_{c+1,n}$	$\bar{b}_{c+1,n+1}$
1								
sen_M	$ж_M =$	$\bar{b}_{M,1}$		$\bar{b}_{M,s}$	$\bar{b}_{M,s+1}$		$\bar{b}_{M,n}$	$\bar{b}_{M,n+1}$
1	$Q =$	q_1		q_c	q_{c+1}		q_n	q_0

Бұл кесте, болжам бойынша, оңтайлыға сәйкес келеді есепті шешу (7.1), содан кейін $\bar{b}_{1,n+1} \geq 0, \dots, \bar{b}_{M,n+1} \geq 0, q_1 \geq 0, \dots, q_n \geq 0$.

макс $Q = \theta$ қол жеткізілді $ж_1 = \dots = \Psi_c = \xi_{c+1} = \dots = \xi_n = 0$.

Қос есептің нәтижелік кестесін қарастырайық. Сол жақтағы (негізгі емес) айнымалылардың мәндерін нөлге тең деп алсақ:

$$v_1 = \dots = v_c = 0, v_{c+1} = \dots = v_M = 0, \dots$$

$$sen_1 = \theta_1 \geq 0, \square, v_c = \theta_c \geq 0, \int_{c+1} = \theta_{c+1} \geq 0, \square, \int_n = \theta_n \geq 0.$$

Сондықтан біз қолдау шешімін алдық

$$sen_1 = \theta_1, \dots, U_c = \theta_c, \text{ сіз}_{c+1} = 0, \square, v_m = 0. \nabla \lfloor \leq \square \rfloor \langle \diamond \square \diamond \rangle \{ \diamond \} \langle \geq \rfloor \{ \pm \} \rfloor \int \diamond \langle \diamond \{ \rfloor$$

$$W = \langle_{1, n \lfloor \square \rfloor} \varsigma_1 + \dots + \langle_{c, n \lfloor \square \rfloor} \varsigma_c + \langle_{c+1, v+1} \cdot \nabla \geq \rfloor_{c+1} + \dots + \langle_{m, n \lfloor \square \rfloor} \cdot \nabla \geq \rfloor_m + \theta_0$$

және нүктесінде

$$v_1 = \dots = \varpi_c \cdot \nabla \geq \rfloor_{c+1} = \dots = v_m = 0$$

$$a_{мен1} \cdot \xi^* + \alpha \cdot \xi^* + \dots + \alpha \cdot \xi^* \leq \beta \quad меH=1, \dots, n$$

$$x_j^* \geq 0, \quad j=1, \dots, n \quad (7.5)$$

,

$$a_{1j} \cdot v_1^* + \alpha v_2^* + \dots + \alpha v_m^* \geq \langle_j, \quad j=1, \dots, n$$

$$c_{en}^* \geq 0, \quad e=1, \dots, m$$

Біз (7.5) сәйкесінше өрнектерге c_{en}^* және алынған мәліметтерді қорытындылау

$$\sum_{j=1}^n b_j \cdot x^* \leq \sum_{j=1}^n \sum_{мен=1}^m a_{менj} \cdot c_{en}^* \cdot x^* \leq \sum_{мен=1}^m b_{мен} \cdot c_{en}^* \dots \quad (7.6)$$

Негізгі қосарлық теоремасы көздейді

$$\sum_{j=1}^n b_j \cdot x^* = \sum_{мен=1}^m b_{мен} \cdot c_{en}^* \dots \quad (7.7)$$

(7.6) ескере отырып:

$$\sum_{j=1}^n b_j \cdot x^* = \sum_{j=1}^n \sum_{мен=1}^m a_{менj} \cdot c_{en}^* \cdot x^*,$$

$$\sum_{мен=1}^m b_{мен} \cdot c_{en}^* = \sum_{мен=1}^m \sum_{j=1}^n a_{менj} \cdot x^* \cdot c_{en}^* \dots$$

Осы өрнектердің біріншісі келесідей жазылуы мүмкін

$$\sum_n x^* \left(\sum_{j=1}^m a_{nj} (u_j^* - \beta_j) \right) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^m a_{nj} (u_j^* - \beta_j) = 0,$$

және
бәрінен
бастап x^* және жақшаның ішіндегі өрнектер теріс емес, содан кейін қосындыдан бас тартады

Біз алып жаттырмаймыз:

$$x^* \cdot \sum_{j=1}^m a_{nj} (u_j^* - \beta_j) = 0, \quad j = 1, \dots, v.$$

$$\sum_{j=1}^m a_{nj} (u_j^* - \beta_j) = 0,$$

Сол сияқты, біз мынаны табамыз:

$$x^* \cdot \sum_{j=1}^m a_{nj} (u_j^* - \beta_j) = 0, \quad n = 1, \dots, l$$

$$\sum_{j=1}^m a_{nj} (u_j^* - \beta_j) = 0, \quad n = 1, \dots, l$$

Q.E.D. Керісінше теорема да дұрыс.

7.4. Бағалауларды дәйектілікпен нақтылау

Бұл әдісті кейде екі жақты симплекс әдісі деп те атайды. Бұрын тікелей мәселені шешумен бір уақытта қос мәселе де шешіледі деп айтылған. Егер сіз қосарланған түрлендірулерді ұстанатын болсаңыз -

кесте және айнымалылар u_i және x_j және кестені екіге жазыңыз

есептер әдеттегі формада, содан кейін біз жаңа әдіс - бағалаудың дәйекті нақтылау әдісі сипаттамасын аламыз.

Тапсырма берілсін:

$$W(\text{сен}) = \langle_1 \cdot \nabla \geq |_1 + \dots + \langle_p \cdot \nabla \geq |_p + \dots + \langle_m \cdot \nabla \geq |_m \rightarrow \{ \},$$

$$v_1 = \alpha_{\text{он бір}} \cdot \nabla \geq |_1 + \dots + \diamond_{p1} \cdot \nabla \geq |_p + \dots + \diamond_{m1} \cdot \nabla \geq |_m - \langle_1 \geq 0,$$

.....

$$v_c = \alpha_{1c} \cdot \nabla \geq |_1 + \dots + \diamond_{rs} \cdot \nabla \geq |_p + \dots + \diamond_{\text{ханым}} \cdot \nabla \geq |_m - \langle_p \geq 0,$$

.....

$$v_n = \alpha_{1n} \cdot \nabla \geq |_1 + \dots + \diamond_{pn} \cdot \nabla \geq |_1 + \dots + \diamond_{m,n} \cdot \nabla \geq |_m - \langle_n \geq 0,$$

$$\bar{v} \geq 0.$$

Осы тапсырмаға арналған қарапайым кесте келесідей болады:

	сен_1		сен_p		сен_m	1
$v_1 =$	$a_{\text{он бір}}$		a_{1p}		a_{1m}	$-\bar{b}_1$
....						
$v_c =$	a_{c1}		a_{cep}		a_{cm}	$-\bar{b}_c$
....						
$v_n =$	a_{n1}		a_{nr}		a_{nm}	$-\bar{b}_n$
$W =$	$\bar{b}_1$		$\bar{b}_p$		$\bar{b}_m$	0

Бағалауды дәйектілікпен нақтылау әдісінде алдымен W-жолындағы негативтен арылуға болады (псевдо-жоспар алынады), содан кейін псевдо-жобалар бойынша сұрыптау кезінде оңтайлы жоспар ізделінеді (бірінші табылған тірек).

Шешімді таңдау ережесі W қатарындағы негативтен арылу үшін:

1) Егер W қатарының барлық коэффициенттері теріс емес болса, онда 0 мақсаттық функцияның төменгі шегі болып табылады және біз оңтайлы табуға кірісе аламыз

шағын шешім. Әйтпесе, бағанды таңдаңыз.

$\bar{b}_p$ және үшінші орынды
 < 0 қарастырыңыз

2) R-ші бағаннан кез-келген теріс элементтерді табыңыз,

мысалы, $a_{rc} < 0. \nabla \{ \text{TM} \} \mid \Sigma \geq \{ \sigma \} \mid \{ \geq \square \geq \langle \diamond \square$

a_{rs} , ка- дан таңдаңыз

шешуші сызық ретінде. Егер r бағанының барлық коэффициенттері теріс емес болса, онда W төменнен шектелмеген ($W \geq 0$), немесе шектеулер жүйесі сәйкес келмейді. (Екіұштылықтың сәйкес келмеуі тікелей мәселенің шексіздігін білдірмейді).

3) W қатары коэффициентінің шешуші (st-ші) қатарының коэффициенттеріне теріс емес қатынасын табамыз. Шешуші элемент ретінде біз осы қатынас оң және болатын шешуші сызықтың s элементін аламыз минималды, яғни кейбір коэффициентті таңдаңыз a_{sk} , ол үшін

$$\frac{b_k}{a_{sk}} = \min_j \left\{ \frac{b_j}{a_{sj}} \mid \frac{b_j}{a_{sj}} > 0 \right\} \dots$$

Шешуші элементті таңдап, біз Иорданияны қарапайым жоюдың қадамын жасаймыз. Бұл әрекеттер тізбегі W қатарының барлық коэффициенттері теріс болмайынша орындалады. Мысалы, келесі кесте алынады

	v_1		v_c	sen_{c+1}		sen_m	1
$sen_1 =$	$b_{он\ бір}$		b_{c1}	$b_{c+1,1}$		b_{m1}	q_1
....							
$sen_c =$	b_{1c}		b_{cc}	$b_{c+1,c}$		$b_{Ханым}$	q_c
$v_{c+1} =$	$b_{1, s+1}$		$b_{c, s+1}$	$b_{c+1, \sigma+1}$		$b_{m, s+1}$	q_{c+1}
....							
$v_n =$	$b_{1, n}$		$b_{c, n}$	$b_{c+1, v}$		b_{mn}	q_n
$W =$	b_1		b_c	b_{c+1}		b_m	q_0

Егер $q_1, \dots, q_n$ теріс емес, онда кесте оңтайлыға сәйкес келеді бәрі

шешім және q_0 – W. үшін төменгі шекара
 $= \{ \mathcal{R}, \mathcal{L} \} \mid \Sigma \theta_0$

Оңтайлы шешімді іздеу кезінде рұқсат ету элементін таңдау ережесі:

1) Шешуші сызық ретінде біз теріс мәнді аламыз
 тив коэффициенті, мысалы, ю. $qs < 0, (\wedge \sum \sigma) \diamond \rfloor \langle \square (\ll \square \diamond \square \pm \square) \diamond \rfloor \sum \rfloor \geq \sum^{\text{TM}} \geq$

2) Біз оң коэффициентті шешуші коэффициент ретінде таңдаймыз.
 ent b_{ks} ол үшін жолдар

$$\frac{b_k}{b_{sk}} = \min_j \left\{ \frac{b_j}{b_{sj}} \mid \frac{b_j}{b_{sj}} > 0 \right\} \dots$$

Егер s саны бар қатарда оң коэффициенттер болмаса, онда есептің шектеулері қайшылықты болады.

Шешуші элементті таңдағаннан кейін, біз қарапайым иорданиялық алып тастау қадамын жасаймыз.

Шекті қадамдардан кейін не оңтайлы шешім табамыз, не проблеманың шектеулері сәйкес келмейтініне көз жеткіземіз.

Пікір: Егер симплекс әдісінде тірек жоспарлар бойынша қозғалғанда, жоғарыдан минимум іздеу кезінде оңтайлы шешімге жақындайтын болсақ, онда төменнен оңтайлы шешімге минимум іздеу кезінде сметаларды дәйекті нақтылау әдісінде, ал аралық жоспарлар (жалған жоспарлар) болмайды

тіреу (ерітінділер политопының сыртында жату). Бірінші мүмкін шешім (бастапқы) оңтайлы болады.

Мысал... Бағалауды дәйекті нақтылау әдісімен келесі мәселені шешіңіз:

$$L(x) = -2x_1 - \xi_1 \rightarrow \min,$$

$$x_1 \in 2J_1 + 3 \geq 0,$$

$$\in 3J_1 \in 7J_1 + 21 \geq 0,$$

$$-\xi_1 + \xi_1 + 2 \geq 0,$$

$$\in 5J_1 \in 4J_1 + 20 \geq 0,$$

$$x_{мен} \quad мен = 1, 2.$$

$$\geq 0,$$

	x_1	x_1	1
$Ж_1 =$	1	-2	3
$Ж_1 =$	-3	-7	21
$Ж_3 =$	-1	1	1
$Ж_4 =$	-бес	-4	20
$L =$	-2	-1	0

	$Ж_3$	x_1	1
$Ж_1 =$	-1	-1	бес
$Ж_1 =$	3	-тен	он бес
$x_1 =$	-1	1	1
$Ж_4 =$	бес	-тоғыз	он
$L =$	1	-3	-4

	$Ж_3$	$Ж_1$	1
$x_1 =$	-1	-1	бес
$Ж_1 =$	13	он	-35
$x_1 =$	-2	-1	7
$Ж_4 =$	он төрт	тоғыз	-35
$L =$	бес	3	- он тоғыз

	$Ж_3$	$Ж_1$	1
$x_1 =$	0,3	-0,1	1.5
$Ж_1 =$	-1.3	0,1	3.5
$x_1 =$	-0.7	-0.1	3.5
$Ж_4 =$	2,3	0.9	-3.5
$L =$	1.1	0,3	-8.5

	$Ж_3$	$Ж_4$	1
$x_1 =$	5/9	-1/9	10/9
$Ж_1 =$	14/9	1/9	35/9
$x_1 =$	4/9	-1/9	28/9
$Ж_1 =$	-23/9	10/9	35/9
$L =$	1/3	1/3	-22/3

Жауап:

$$L_{мин} = -7 \frac{1}{3}; \quad x \left(\begin{pmatrix} 31 \\ 9 \end{pmatrix}, 11 \frac{1}{9} \right).$$

7.5. Көлік мәселесін шешу әдістері

Көліктік сызықтық бағдарламалау мәселесі келесідей тұжырымдалған.

Тасымалдау шығындарын барынша азайту қажет

$$Q(x) = \sum_{мен=1}^n \sum_{φ=1}^m c_{менj} \cdot x_{менj} \rightarrow \text{мжылы}$$

шектеулермен

$$\sum_{мен=1}^m x_{уж} = \begin{cases} j = 1, \dots, l \\ \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{уж} = \begin{cases} мен = 1, \dots, l, \\ \end{cases}$$

$$x_{уж} \geq 0, \quad мен = 1, \dots, l, \quad j = 1, \dots, l$$

Қа c_{ij} – өндіріс бірлігін i пункттен j нүктеге дейін тасымалдау құны; $x_{уж}$ –
 йд j
 а

i нүктесінен j нүктесіне дейін тасымалдаудың жоспарланған мөлшері (X тасымалдау жоспары $m \times n$ өлшемді матрицасы);
 b_j – j нүктесіндегі өнімнің қажеттілігі;
 a_i – акциялар i .

$$R \text{ модель жабық типтегі деп болжанады, яғни. } \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{мен=1}^m a_{мен} \dots$$

$$\text{Егер модель } \sum_{j=1}^n b_j \neq \sum_{мен=1}^m a_{мен} \text{ ашық болса, онда оны әрқашан азайтуға болады}$$

жалған өндіріс нүктесін немесе жалған тұтыну нүктесін енгізу арқылы жабық түрі:

$$\text{Егер } \sum_{j=1}^n b_j < \sum_{мен=1}^m a_{мен}, \text{ содан кейін } b_{n+1} = \sum_{мен=1}^m a_{мен} - \sum_{j=1}^n b_j,$$

$$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{мен=1}^m a_{мен} \quad j=1, \dots, n$$

$$\text{сода } \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{мен=1}^m a_{мен}, \text{ және } c_{мен, n+1} = 0. \text{ I.}$$

$$j=1, \dots, n \quad мен=1, \dots, m$$

Егер $\sum_{j=1}^n b_j > \sum_{m=1}^m a_{m\eta}$ содан кейін $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{m=1}^m a_{m\eta}$ және $c_{m+1,j} = 0 \quad \forall \varphi$.

$$Q(x) = c_{m+1} * x_{m+1} + c_{m+2} * x_{m+2} + \dots + c_n * x_n + c_0 \rightarrow \min.$$

Егер негізгі емес айнымалыларды нөлге теңесек

$$x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0 \dots; x_n = 0,$$

онда сәйкес негізгі айнымалылар мәндерді қабылдайды.

$$x_1 = b_1; x_2 = b_2; \dots; x_m = b_m.$$

Егер $b \geq 0$ (тірек дизайны) болса Осындай векторы бар x векторы ерітінділер политопының бұрыштық нүктесі болып табылады Енді функционалдық мәні кішірек басқа бұрыштық нүктеге өту керек. Мұны істеу үшін кейбір негізгі емес айнымалыларды таңдау керек, сонда біз оларды «ауыстырғаннан» кейін мақсат функциясы төмендейді. Мұндай бағытталған іздеу ақыр соңында бізді мәселені шешуге жетелейді.

1-ші мысал:

$$Q(x) = x_4 - x_5 \rightarrow \min,$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_4 - 2x_5 &= 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 &= 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3. \end{aligned} \right\}$$

Келесі x_1, x_2, x_3 айнымалыларды таңдаймыз

біз осы айнымалыларға қатысты жүйені құрамыз. Шектеу жүйесі келесі формада болады:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 &= 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 &= 3 - 3x_4 - x_5. \end{aligned} \right\}$$

$\{x_4, x_5\}$ айнымалылары негізгі емес. Егер $x_4 = 0$ және $x_5 = 0$ алсақ, онда біз бұрыштық нүктені аламыз.

$$x^{-1} = [1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0]^T$$

Және ол жүйе $Q(x^{-1})=0$ мәніне сәйкес келеді. Мақсатты функция мәнін x_5 ұлғайту арқылы азайтуға болады. x_5 артқан сайын 1 мәні де өседі, ал x_2 және x_3 азаяды. Сонымен қатар, x_2 мәні ертерек теріс айналуы мүмкін. Сондықтан x_5 айнымалысын негізге енгізе отырып, біз бір мезгілде x_2 -ді негізден шығарамыз. Нәтижесінде айқын түрлендірулерден кейін біз негізгі айнымалылардың жаңа жүйесі мен мақсаттық функция үшін келесі өрнектер аламыз:

$$\left. \begin{aligned} x_5 &= 2 - x_2 + 2x_4, \\ x_1 &= 5 - 2x_2 + 3x_4, \\ x_3 &= 1 + x_2 - 5x_4, \end{aligned} \right\}$$

$$Q(x) = -2 - x_4 + x_2 \rightarrow \min.$$

Сәйкес келетән өрнек $x^{-2} = [5 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2]^T \quad Q(x^{-2}) = -2$

Мақсатты функцияны x_4 ұлғайту арқылы азайтуға болады. x_4 ұлғайту тек x_3 -ті азайтады. Сондықтан x_4 айнымалысын негізге енгіземіз, және x_3 негізден алынып тасталды. Нәтижесінде біз негізгі айнымалылардың жаңа жүйесі және мақсаттық функция үшін келесі өрнектер аламыз:

$$\left. \begin{aligned} x_4 &= \frac{1}{5} + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{5}x_3, \\ x_1 &= \frac{28}{5} - \frac{7}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_3, \\ x_5 &= \frac{12}{5} - \frac{3}{5}x_2 - \frac{2}{3}x_3, \end{aligned} \right\}$$

$$Q(x) = -\frac{11}{5} + \frac{4}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 \rightarrow \min.$$

Сәйкес келетін негізгі жоспар $x^{-3} = \left[\frac{28}{3} \ 0 \ 0 \ \frac{1}{5} \ \frac{12}{5} \right]^T$ және бұл функция мәні $Q(x^{-3}) = -\frac{11}{5}$

Функциясындағы негізгі емес айнымалыларға арналған барлық коэффициенттер теріс емес болғандықтан, x_2 немесе x_3 ұлғайту арқылы мақсат функциясын төмендету мүмкін емес, сондықтан алынған x_3 жоспары оңтайлы болады.

$$Q(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \min,$$

2Мысал. Бізге берілген есептің шешімін табу қажет.

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= 1 + x_1 - x_2, \\ x_4 &= 2 - x_1 + 2x_2, \\ \overline{x} &\geq 0. \end{aligned} \right\}$$

$$x^{-0} = [0 \ 0 \ 1 \ 2]^T, Q(x^{-0}) = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 2 + 2x_2 - x_4, \\ x_3 &= 3 + x_2 - x_4, \end{aligned} \right\}$$

$$Q(\overline{x}) = -2 - 3x_2 + x_4,$$

$\{x_3, x_4\}$ айнымалылар негізгі, ал $\{x_1, x_2\}$ айнымалылар негізгі емес.

Тұрақты жоспар $x^{-1} = [2 \ 0 \ 3 \ 0]^T$ $Q(x^{-1}) = -2$.

Енді біз 1 айнымалысын негізге енгіземіз және x_4 -ті негізден шығарамыз. Нәтижесінде негізгі айнымалылар мен мақсат функциясы үшін келесі өрнектер алынады:

Енді x өскен сайын x және x_3 айнымалыларының мәндері де өсетіндігін көруге болады, яғни $x_2 \rightarrow \infty$ үшін $Q(x) \rightarrow -\infty$ рұқсат етілген аймағында (үшін саяжайда ешқандай шешім жоқ).

Түсініктеме. Рұқсат етілген жоспарды іздеу барысында шектеулер жүйесінің сәйкессіздігі анықталуы мүмкін.

Қарапайым әдіс алгоритмі

Симплекс әдісінің формаланған алгоритмі екі негізгі кезеңнен тұрады:

1) анықтамалық жоспар құру;

2) оңтайлы жоспар құру.

Алгоритмді бұрын қарастырылған мысал арқылы көрсетейік:

$$Q(\bar{x}) = x_4 - x_5 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$$\bar{x} \geq \bar{0},$$

$\{x_2, x_3\}$ негізгі айнымалылар жағдайында осы мысалға арналған бастапқы симплекс кестесі келесідей болады:

	$-x_4$	$-x_5$	1
--	--------	--------	---

$x_1 =$	1	-2	1
$x_2 =$	-2	1	2
$x_3 =$	3	1	3
$\overline{Q(x)} =$	-1	1	0

$Q(x)$;

Оңтайлы жоспар құру. Бастапқы жоспар оңтайлы болуы үшін мақсат функциясын минимизациялау кезінде мақсат функциясы сызығындағы коэффициенттер оң болмауы керек (максимизация жағдайында теріс емес). Анау. минимумды іздеген кезде біз өзімізді босатуымыз керек Q х қатарындағы жалған коэффициенттер. Шешуші элементті таңдау. Егер мақсат функциясы жолында минимумды іздеу кезінде нөлден жоғары коэффициенттер болса, онда біз бағанды таңдаймыз

Резолюциялық бағанның оң коэффициенттерінің арасынан шешуші сызықты (шешуші элементті) таңдау үшін еркін мүшелер бағанындағы коэффициенттің шешуші бағандағы коэффициентке қатынасы минимум болатын біреуін (жолды) таңдаңыз:

$$\frac{b_r}{a_{rl}} = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \mid a_{il} \geq 0 \right\};$$

a_{rl} - рұқсат етуші (бағыттаушы) элемент, r сызығы - рұқсат етілген. Келесі симплекс кестесіне өту үшін (келесі сілтеме) мақсат функциясының кіші мәнімен жоспар), шешуші элемент a_{rl} -мен Иордания модификацияланған элиминация қадамы жасалады. Егер шешуші бағанда оң коэффициенттер болмаса, онда мақсат функциясы төменнен шектелмейді (максимизация кезінде ол жоғарыдан шектелмейді). Симплекс кестесі бойынша Иорданияны модификациялау кезеңі.

1. Шешуші элементтің орнына 1 қойылып, шешуші элементке бөлінеді.
2. Шешуші бағанның қалған элементтері керісінше өзгереді және шешуші элемент бойынша бөлінеді.
3. Рұқсат ету сызығының қалған элементтері рұқсат етуші элементке бөлінеді.

4. Симплекс кестесінің барлық басқа элементтері келесі формула бойынша есептеледі:

$$a_{ij} = \frac{a_{ij} * a_{rl} - a_{rj} * a_{il}}{a_{rl}} = a_{ij} - \frac{a_{rj} * a_{il}}{a_{rl}}.$$

Негізгі айнымалыны ауыстыруға сәйкес келетін рұқсат етуші элемент x_2 негізгі емес айнымалыға x_5 .

	$-x_4$	$-x_5$	1
x_1	1	-2	1
x_2	-2	1	2
x_3	3	1	3
Q(x)	-1	1	0

	$-x_4$	$-x_2$	1
x_1	-3		5
x_5	2		2
x_3	-2		1
	1		
	5		
	-1		
Q($\bar{x}$)	1		-2
	-1		

Негізгі айнымалыны ауыстыруға сәйкес келетін рұқсат етуші элемент x_3 негізгі емес айнымалыға x_4 .

	$-x_3$ $-x_2$	1
x_1	3/5	28/5
x_2	7/5	12/5
x_3	2/5 3/5 1/5 -1/5	1/5
Q(x)	-1/5 -4/5	-11/5

Мақсаттық функция сызығындағы барлық коэффициенттер теріс, яғни. біз оңтайлы шешімді таптық.

Анықтамалық жоспар құру.

Мәселені шешу қажет болсын:

$$Q(x) = c_1 * x_1 + c_2 * x_2 + \dots + c_n * x_n \rightarrow \min(\max),$$

$$\begin{cases} a_{1,1} * x_1 + \dots + a_{1,n} * x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{m,1} * x_1 + \dots + a_{m,n} * x_n = b_m, \\ a_{m+1,1} * x_1 + \dots + a_{m+1,n} * x_n \leq b_{m+1}, \\ \dots \\ a_{m+p,1} * x_1 + \dots + a_{m+p,n} * x_n \leq b_{m+p} \end{cases}$$

Біз теңсіздік шектеулерін теңдікке айналдыру үшін қосымша айнымалылар енгіземіз. Теңдік шектеулерінде қосымша айнымалылар нөлге тең болуы керек. Содан кейін шектеулер жүйесі келесі түрге ие болады:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = b_1 - a_{1,1} * x_1 - \cdots \cdots \cdots - a_{1,n} * x_n, \\ \cdots \cdots \cdots \\ 0 = b_m - a_{m,1} * x_1 - \cdots \cdots \cdots - a_{m,n} * x_n, \\ x_{n+1} = b_{m+1} - a_{m+1,1} * x_1 - \cdots - a_{m+1,n} * x_n, \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_{n+p} = b_{m+p} - a_{m+p,1} * x_1 - \cdots \cdots \cdots - a_{m+p,n} * x_n \end{array} \right.$$

$$x_{n+1} \geq 0, i = 1, \dots, p$$

Біз негізгі айнымалылар ретінде қосымша енгізілген айнымалылар жүйесін аламыз. Сонда түрлендірілген мәселеге арналған симплекс кестесі келесідей болады:

	$-x_1$	$-x_2$		$-x_s$		$-x_n$	1
0	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$		a_{1s}		$a_{1,n}$	b_1
....							
0	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$		$a_{m,s}$		$a_{m,n}$	b_m
x_{m+1}	$a_{m+1,1}$	$a_{m+1,2}$		$a_{m+1,s}$		$a_{m+1,n}$	b_{m+1}
....							
x_{m+p}	$a_{m+p,1}$	$a_{m+p,2}$		$a_{m+p,s}$		$a_{m+p,n}$	b_{m+p}
Q(x)	$-c_1$	$-c_2$		$-c_s$		$-c_n$	0

Анықтамалық жоспарды іздеу кезінде шешімді таңдау ережелері 1. «0-жолдар» (теңдік шектеулері) және «еркін» айнымалылар (яғни теріс емес

талапқа бағынбайтын айнымалылар) болмайтын жағдайда. • Егер симплекс кестесінің бос мүшелерінде теріс элементтер болмаса, онда сілтеме жоспары табылған. • Еркін терминдер бағанында теріс элементтер бар, мысалы, $b < 0$. Мұндай қатарда біз теріс коэффициентті іздейміз және сол арқылы l бағанын анықтаймыз. Егер біз жағымсыз ауруды таппасақ, онда шектеулер жүйесі сәйкес келмейді (сәйкес келмейді).

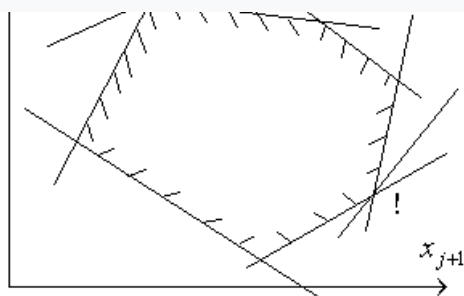
Шешуші элемент табылғаннан кейін, жетекші элемент арқылы көмегімен модификацияланған Иордания элиминациясының қадамын жасаймыз және келесі симплекс кестесіне барамыз.

2. Егер теңдік шектеулері және «еркін» айнымалылар болса, келесі әрекеттерді орындаңыз.

- «0-қатардағы» шешуші элементті таңдап, өзгертілген Иорданияға ерекше жағдай жасаңыз, содан кейін осы шешуші бағанды жойыңыз. Бұл әрекеттер тізбегі симплекс кестесінде кем дегенде бір «0-қатар» қалғанша жалғасады (осылайша кесте қысқартылады).

Егер еркін айнымалылар болса, онда бұл айнымалылар негізгі болуы керек. Еркін айнымалы негізгіге айналғаннан кейін анықтамалық және оңтайлы жоспарларды іздеу кезінде шешуші элементті анықтау барысында бұл жол есепке алынбайды (бірақ өзгертіледі). 7.2. Сызықтық бағдарламалау мәселелеріндегі деградация

Симплекс әдісін қарастыра отырып, сызықтық бағдарламалау мәселесі деградацияланбаған деп қабылдадық, яғни. әрбір бастапқы жоспар нақты m оң компоненттерден тұрады, мұндағы m - проблемадағы шектеулер саны. Дистрофиялық анықтамалық жобалау кезінде оң компоненттер саны шектеулер санынан аз болады: берілген сілтеме дизайнына сәйкес келетін кейбір негізгі айнымалылар нөлдік мәндерді қабылдайды. Ең қарапайым жағдайға арналған геометриялық интерпретацияны қолдана отырып (38-сурет), $n-m=2$ болғанда (негізгі емес айнымалылар саны 2-ге тең), дегенеративті есепті бұзылмайтыннан ажырату қиын емес. Азғындаған есептерде шарттардың полиэдрінің бір төбесінде $x = 0$ түріндегі теңдеулермен сипатталған екіден астам түзулер қиылысады. Бұл белгі шарттардың көпбұрышының бір немесе бірнеше жағы нүктеге жиырылғанын алдау.



Сурет: 38. Азғындау ұғымы туралы

Сол сияқты, дегенеративті есептегі $n-m=3$ үшін бір шыңда 3-тен артық $x=0$ жазықтық қиылысады.

$\Theta = \min \left\{ \frac{b_i}{a_{il}} \mid \frac{b_i}{a_{il}} > 0 \right\}$ ол бойынша өнімінің индексі анықталды. Бұл жағдайда табылған сілтеме жоспарында бірнеше негізгі айнымалылар нөлге тең болады.

Егер сызықтық бағдарламалау есебі дегенеративті болып шықса, онда базистен алынған шарттар векторын нашар таңдау кезінде сол сілтеме жоспары негізінде шексіз қозғалыс пайда болуы мүмкін. Бұл цикл құбылысы деп аталады.

Сызықтық практикалық есептерінде 81 грамматикалық цикл өте сирек кездеседі, оның мүмкіндігі жоққа шығарылмайды. Дегенеративтімен күресу әдістерінің бірі шектеулер жүйесінің оң жақ векторын інсі шамаларына «елеусіз» өзгерту арқылы мәселені трансформациялаудан тұрады, бұл проблема деградацияланбайтын, сонымен бірге бұл өзгеріс шынымен әсер етпейтін болады. мәселенің оңтайлы жоспары.

7.3. Сызықтық бағдарламалау есептерінің қосарлылығы

Сызықтық форманы максимизациялау мәселесін (7.1) және минимизациялау мәселесін (7.2) қарастырайық:

$$Q(x) = \left. \begin{array}{l} p^{-T} * \bar{x} \rightarrow \max, \\ A * \bar{x} \leq \bar{b} \\ \bar{x} \geq 0, \end{array} \right\}$$

$$W(u) = \left. \begin{array}{l} b^T * u \rightarrow \min, \\ A^T * \bar{x} \geq \bar{p} \\ \bar{u} \geq 0, \end{array} \right\}$$

Егер осы есептердің бірінде оңтайлы шешім болса, онда оған қосарланған есепте оңтайлы шешім де болады. Сонымен, сәйкес сызықтық формалардың шекті мәндері тең: $\max Q = \min W$.

Егер осы есептердің бірі үшін сызықтық форма шектелмеген болса, онда оған қосарланған есеп қайшы келеді.

Дәлелдеу: Негізгі есепте (7.1) ақырлы шешім болсын және соңғы симплекс кестесі алынады:

		$u_1 =$		$u_s =$	$v_{s+1} =$		$v_n =$	$W =$
		$-y_1$		$-y_s$	$-x_{s+1}$		$-x_n$	1
v_1	$x_1 =$	$b_{1,1}$		$b_{1,s}$	$b_{1,s+1}$		$b_{1,n}$	$b_{1,n+1}$
....								
v_s	$x_s =$	$b_{s,1}$		$b_{s,s}$	$b_{s,s+1}$		$b_{s,n}$	$b_{s,n+1}$
u_{s+1}	$y_{s+1} =$	$b_{s+1,1}$		$b_{s+1,s}$	$b_{s+1,s+1}$		$b_{s+1,n}$	$b_{s+1,n+1}$
....								
u_m	$y_m =$	$b_{m,1}$		$b_{m,s}$	$b_{m,s+1}$		$b_{m,n}$	$b_{m,n+1}$
1	$Q =$	q_1		q_s	q_{s+1}		q_n	q_0

Екінші қосарлық теоремасы:

Егер қос есептердің біріне ең болмағанда бір оңтайлы шешім осы есептің i -ші шектеуін қатаң теңсіздікке айналдырса, онда екінші қос есептердің әрбір оңтайлы шешімінің i -ші компоненті (яғни, x_i немесе u_i) нөлге тең болады.

Егер қос есептердің біріне ең болмағанда бір оңтайлы шешімнің i -компоненті оң болса, онда басқа қос есептердің әрбір оңтайлы шешімі i -ші шектеуді қатаң теңдікке айналдырады.

Басқа сөзбен айтқанда, қос есептердің оңтайлы шешімдері x^* және u^* шарттарды қанағаттандырады

$$x_j^* \cdot \left[\sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot u_i^* - p_j \right] = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (7.3)$$

$$u_i^* \cdot \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j^* - b_i \right] = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (7.4)$$

Дәлелдер:

x^* және u^* қос есептердің оңтайлы шешімдері болсын. Содан кейін

$$Q(x) = \sum_{j=1}^n p_j x_j \rightarrow \max,$$

$$W(\pi) = \sum_{i=1}^m b_i \mu_i \rightarrow \min$$

Болады. асымалдау мәселесін потенциалды әдіспен шешу үшін $v_j - u_i = c_j, \forall x_j > 0$ потенциалдар жүйесі құрылды. Егер қолдау шешімі жақсы емес болса, онда таза

теңдеулер санынан 1 белгісіз артық. Бұзылған тірек шешімімен бұл теңдеулер саны одан да аз болады. Симплекс әдісімен ұқсастығы бойынша деградацияланбаған шешімде $x_j > 0$ негізгі айнымалылар, ал $x_j = 0$ негізгі емес. Егер тірек шешімі деградацияланған болса, онда кейбір негіздер

белдеу нөлдік мәндерді қабылдайды.

Солтүстік-батыс бұрыш әдісімен немесе минималды элемент әдісімен табылған алғашқы қолдау шешімі деградацияға ұшырайды. Содан кейін, мәселені потенциалдар әдісімен шешу үшін $x_j = 0$ тасымалдауларын негізгі айнымалылар ретінде таңдау керек және олар үшін теңдеулер де құру керек $v_j - u_i = c_j$ теореманың (2) шарты бойынша. X_j включать 0 типті

тасымалдаудың қандай түрін негізгіге қосу керек? $X_j = 0$ кестенің ұяшықтары таңдалатын етіп таңдалады бір циклды ұйымдастыру мүмкін емес еді!

Мәселенің жаңа жетілдірілген жоспарына көшу кезінде жанында орналасқан теріс жартылай шеңберде тасымалдау келесідей, $\theta = \min x_j$. Солтүстік-батыс бұрыш әдісімен салынған анықтама жоспары ретінде (алдын-ала кезеңнің 1-ші қадамы) есептің потенциалдар әдісі бойынша оңтайлы шешімін табайық.

v_j					
	v_1	v_2	v_3	v_4	
	2 30	4 80	2 10	3	8
u_2	3	5	6	— 6	+ 2
	6	8	7	+ 4 10	— 5 30
	3	4	2	1	4 60

2. Біз потенциалдар жүйесін құрамы

$$\begin{array}{lll} v_1 - u_1 = 2, & v_2 - u_1 = 4, & v_3 - u_1 = 2, \\ v_3 - u_2 = 6, & v_4 - u_2 = 6, & v_4 - u_3 = 4, \\ v_5 - u_3 = 5, & v_5 - u_4 = 4. & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
v_1 - u_2 = 6 \leq \cancel{7}, & v_1 - u_3 = 4 \leq 6, & v_1 - u_4 = 3 \leq 3, \\
v_2 - u_2 = 8 \leq \cancel{8}, & v_2 - u_3 = 6 \leq 8, & v_2 - u_4 = 5 \leq \cancel{4}, \\
v_3 - u_3 = 4 \leq \cancel{7}, & v_3 - u_4 = 3 \leq \cancel{2}, & v_4 - u_1 = 2 \leq 3, \\
v_4 - u_4 = 3 \leq \cancel{1}, & v_5 - u_1 = 3 \leq 8, & v_5 - u_2 = 7 \leq \cancel{2},
\end{array}$$

Біздің мысалда

v_j					
	v_1	v_2	v_3	v_4	
	2 30	4 80	2 10	3	8
	3	5	- 6 10	6 0	+ 2 20
	6	8	7	4 30	5 10
	3	4	+ 2	1	- 4 60

Құрылған жоспар бойынша көлік шығындары:

$$Q = 30 \cdot 2 + 4 \cdot 80 + 2 \cdot 10 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 60 = 910$$

Анықтама 4. Тасымалдау проблемасының рұқсат етілген базалық жоспары, егер тасымалдау кестесіндегі толтырылған ұяшықтардың саны, яғни. оң тасымалдаулар саны $x_j > 0$ $m+n+1$ -ге тең, мұндағы m - нүктелер саны жөнелту, n - бағыттардың саны. Анықтама 5. Егер рұқсат етілген қолдау жоспарында $m+n+1$ $x_j > 0$ элементтері аз болса, онда ол деградация деп аталады, ал тасымалдау мәселесі деп аталады деградациялық көлік проблемасы болып табылады. Келесі теорема мәселенің шешілуіне дейін