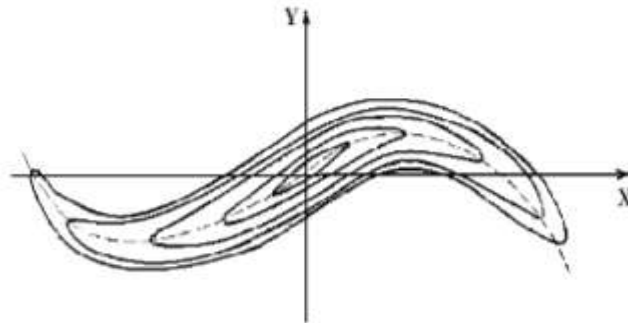


3. КӨПТЕГЕН АЙНЫМАЛЫЛАР ФУНКЦИЯСЫНЫҢ МИНИМУМЫ

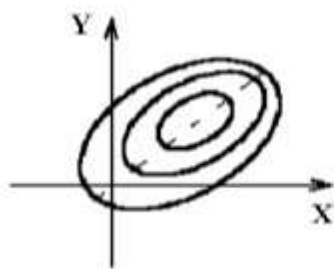
3.1. Функция рельефі

«Функцияның рельефі» ұғымын $z = F(x, y)$ екі айнымалы функцияның мысалында қарастыруға ыңғайлы. Бұл функция x, y, z координаттары бар үш өлшемді кеңістіктегі белгілі бір бетті сипаттайды. $F(x, y) \rightarrow \min$ беттің төменгі нүктесін іздеуді білдіреді.

Топографиядағыдай, біз осы беттің рельефін деңгей сызықтарымен бейнелейміз. $z = \text{const}$ тең



жазықтықтарды сызамыз және олардың $F(x, y)$ бетімен қиылысу сызықтарын табамыз. x, y проекциялар жазықтығын деңгей сызықтары деп атайды. Төмендеу бағытының функциясын сызық деңгейінің қасында тұрған штрихтармен көрсетеміз. Деңгей сызықтарының түріне сәйкес біз шартты түрде рельефті үш түрге бөлеміз: шұңқыр, жыра және тәртіпсіз (сурет 11–15).



Сурет. 11. Шұңқыр рельефі



Сурет. 12. Жартас рельефі

Сурет. 13. Шешілетін жыра

Шұңқыр рельефте деңгейлік сызықтар эллиптерге ұқсас (11-сурет).

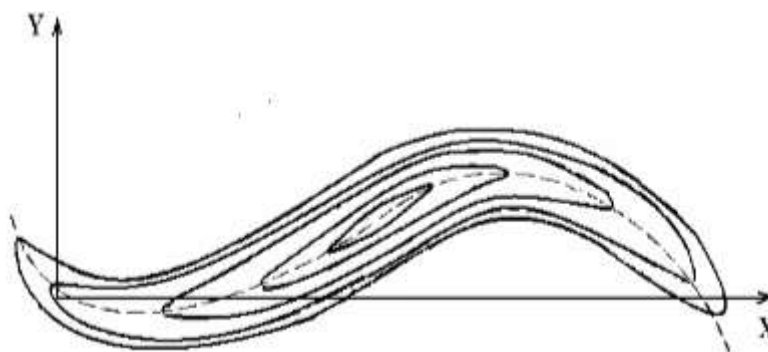
Жердің рельефтік түрін қарастырайық. Деңгей сызықтары бөлік-тегіс болса (12-сурет), онда олардың әрқайсысында үзіліс нүктесін таңдаймыз. Егер бұрыш функцияның өсуіне бағытталған болса үзіліс нүктелерінің геометриялық орнын **нағыз жыра** деп, ал егер ол кему бағытында болса **жоталар** деп атаймыз.

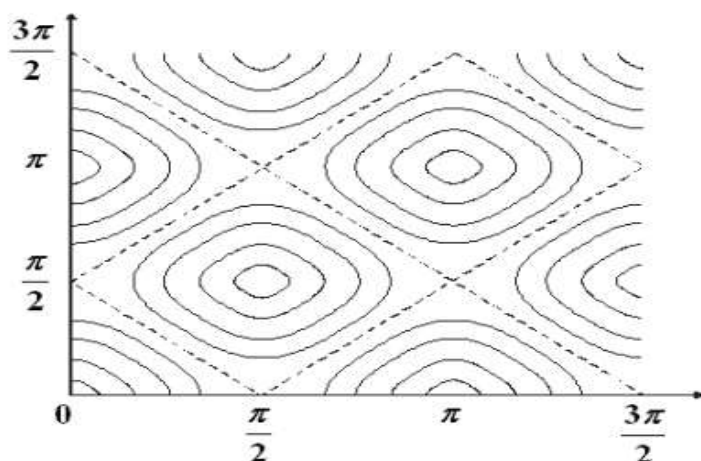
Көбінесе деңгей сызықтары барлық жерде тегіс, бірақ оларда үлкен қисықтығы бар аймақтар бар. Ең үлкен қисықтығы бар нүктелердің геометриялық орындары **рұқсат етілген жартас** немесе **жоталар** деп аталады (сурет. 13).

Мысалы, $F(x, y) = 10(y - \sin x)^2 + 0,1x^2$ (сурет. 14) функциясының рельефі айқын шешілетін жырасы бар, оның "түбі" синусоид, ал төменгі нүктесі – координаталардың бастамасы болып табылады.

Сурет-14 $F(x, y) = 10(y - \sin x)^2 + 0,1x^2$ функциясының рельефі

Рельефтің **реттелмеген** түрі көптеген биіктіктер мен минимумдардың болуымен сипатталады. Сонымен, $F(x, y) = (1 + \sin^2 x)(1 + \sin^2 y)$ (сурет. 15) функциясы $x_k^* = \pi k$, $y_l^* = \pi l$ нүктелерде минимумдар бар және әр координат бойынша $\frac{\pi}{2}$ минимумдарға қатысты жылжытылған нүктелердегі максимумдар.





Сурет-15 $F(x, y) = (1 + \sin^2 x)(1 + \sin^2 y)$ функциясының рельефі

Минимумды іздеудің барлық тиімді әдістері траекторияларды құруға дейін азаяды, олардың бойында функция азаяды; әртүрлі әдістер мұндай траекторияларды құру тәсілдерімен ерекшеленеді. Рельефтің бір түріне бейімделген әдіс басқа типтегі рельефте нашар болуы мүмкін.

3.2. Координаталық түсіру әдісі (Гаусс әдісі)

Біз бұл әдісті $F(x, y, z)$ үш айнымалы функцияның мысалында келтіреміз.

x_0, y_0, z_0 нөлдік жуықтауды таңдаймыз. $y = y_0, z = z_0$ осы екі координатаның мәнін белгілейміз. Содан кейін функция тек бір x айнымалысына байланысты болады; оны $f_1(x) = F(x, y_0, z_0)$ арқылы белгілеңіз. Бір өлшемді оңтайландырудың кез-келген әдісін қолдана отырып, біз $f_1(x)$ функциясының минимумын табамыз және оны x_1 арқылы белгілейміз. Біз (x_0, y_0, z_0) нүктесінен (x_1, y_0, z_0) нүктесіне x осіне параллель бағытта қадам жасадық; бұл қадамда функцияның мәні төмендеді.

Енді жаңа нүктеден біз түсуді y осіне параллель бағытта жасаймыз, яғни $f_2(y) = F(x_1, y, z_0)$ функциясын қарастырамыз, оның минимумын тауып, оны y_1 арқылы белгілейміз. Екінші қадам бізді (x_1, y_1, z_0) нүктесіне жеткізеді. Осы сәттен бастап біз үшінші қадамды z өсіне параллель түсеміз және $f_3(z) = F(x_1, y_1, z)$ функциясының минимумын табамыз. (x_1, y_1, z_1) нүктесіне жету төмендеу циклін немесе бірінші қайталануды аяқтайды.

Әрі қарай циклдарды қайталаймыз. Функция әр түскен сайын өспейді, ал функция мәні төменнен оның минимум $F^* = F(x^*, y^*, z^*)$ мәнімен шектеледі. Демек, итерациялар $(\tilde{F}) \geq F^*$ шекарасына жақындайды. Мұнда теңдік бола ма, яғни түсулер ең төменгі деңгейге жақындай ма және қаншалықты тез? Бұл функцияға және нөлдік жуықтауды таңдауға байланысты.

Екі айнымалының функциясын мысалға келтіре отырып, координаталар бойынша түсудің минимумға жақындау жағдайлары және бұл түсу минимумға жақындамайтын жағдайлар бар екенін байқау қиын емес.

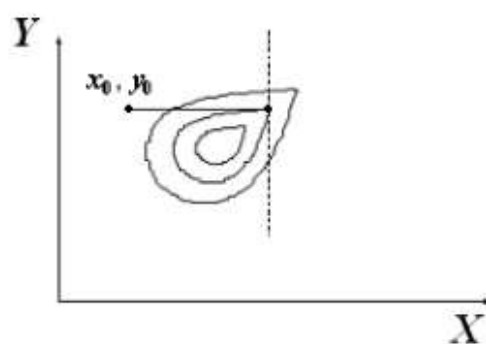
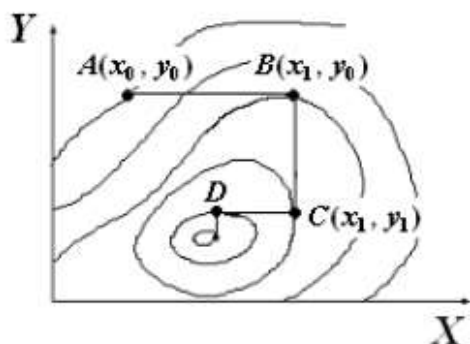
Шынында да, осы әдістің геометриялық интерпретациясын қарастырамыз (16 және 17-суреттер):

Сурет -16 Шұңқырлы рельефке арналған Гаусс әдісі

Сурет – 17 Нағыз жыраға арналған Гаусс әдісі

Біз таңдалған бағытта, яғни жазықтықтағы кейбір x, y түзу бойымен қозғаламыз.

Түзу сызық деңгей сызықтарымен қиылысатын жерлерде біз қозғалыс



кезінде бір деңгейден екінші деңгейге ауысамыз, сол кезде бұл қозғалыс кезінде функция өзгереді (өседі немесе азаяды, жүру бағытына байланысты). Осы түзу деңгей деңгейіне тиген жерде ғана (16-сурет) функция осы бағыт бойынша экстремумға ие болады. Осындай нүктені тапқаннан кейін, біз оған түсуді бірінші бағытта аяқтаймыз, ал екіншісімен түсуді бастауымыз керек.

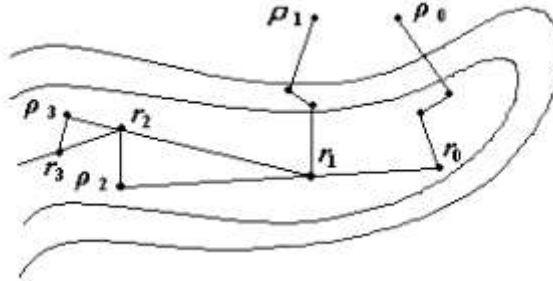
Деңгей сызықтары нағыз шатқал құрсын. Сонда жағдай болуы мүмкін (17-сурет), егер бір координат бойымен түсу бізді «сайдың түбіне» әкелсе, ал келесі координат бойынша кез-келген қозғалыс (нүктелік сызық) бізді өрлеуге жетелейді. Координаталар бойымен бұдан әрі түсу мүмкін емес, бірақ минимумға әлі қол жеткізілмеген. Бұл жағдайда координаталар бойымен түсу процесі минимумға жақындамайды.

Керісінше, егер функция жеткілікті түрде тегіс болса, онда минимумның кейбір маңында координаттар бойымен түсу процесі осы минимумға жақындайды. Алайда конвергенция жылдамдығы деңгей сызықтарының формасына байланысты. Сонымен, егер функцияның рельефі «шешілетін жыра» типіне жатса, онда түсу траекториясы осындай сайға соғылған кезде, конвергенция соншалықты баяулайды, сондықтан есептеу іс жүзінде мүмкін емес.

Әдетте минимумды табудың алғашқы әрекеті ретінде координаталық түсу әдісі қолданылады.

3.3 Жыра әдісі

Еркін ρ_0 нүктесін таңдап, одан бірнеше қадамдар жасай отырып, яғни жоғары дәлдікті талап етпей, төмен қарай (мысалы, координаталар бойымен) түсейік. Түсудің соңғы нүктесі r_0 арқылы белгіленеді. Егер рельеф жыра болса, бұл жер сайдың түбіне жақын болады (18-сурет).



Сурет: 18. Жыра әдісі үшін иллюстрация

Енді бірінші нүктеден алыс емес тағы бір нүктені ρ_1 таңдайық. Сонымен, біз одан түсіп, r_1 нүктесіне жетеміз. Бұл нүкте де жыраның түбіне жақын орналасқан. Жырдың түбіндегі 0 және 1 нүктелері арқылы түзу жүргізейік - жыра түбінің жуық сызығы, осы сызық бойымен кему функциясы бағытында қозғаламыз және осы сызықтан r_1 нүктесінен h қашықтықта жаңа ρ_2 нүктесін таңдаймыз. h мәні шатқал сатысы деп аталады және есептеу кезінде әр функция үшін таңдалады.

Жыраның түбі түзудің кесіндісі емес, сондықтан ρ_2 нүктесі жыраның түбінде емес, оның беткейінде жатыр. Осы сәттен бастап біз тағы да төменге түсіп, r_2 нүктесіне жетеміз. Содан кейін біз r_1 және r_2 нүктелерді тікелей жалғап, жыраның түбінің жаңа сызығын сызып, жыраның бойымен жаңа қадам жасаймыз. Процесті функцияның мәні жыра түбінде, яғни $r_0, r_1, \dots, r_n$ нүктелерінде азайғанға дейін жалғастырайық.

$F(r_{n+1}) > F(r_n)$ жағдайында процесс тоқтатылып, r_{n+1} нүктесін қолдануға болмайды. Жыра әдісі жыраның бойымен жүруге және шұңқырға минимумға дейін жетуге арналған. Бұл шұңқырда минималды мәнді басқа әдістермен көрсеткен дұрыс.