

2. БІР ӨЛШЕМДІ ОЙТАЛАНДЫРУ

Бір айнымалы функцияны оңтайландыру-оңтайландыру міндеттерінің қарапайым түрі. Алайда, бұл оңтайландыру теориясында маңызды орын алады. Бұл бір параметрлік оңтайландыру проблемалары инженерлік тәжірибеде жиі кездесетіндігіне байланысты, сонымен қатар көп параметрлік оңтайландырудың неғұрлым күрделі интерактивті процедураларын жүзеге асыруда қолданылады.

Бір өлшемді оңтайландыру әдістерінің көбірек саны жасалды біз осындай әдістердің екі тобын қарастырамыз:

- белгісіздік аралығын тарылту әдістері;
- туынды құралдарды пайдалана отырып.

2.1 Белгісіздік аралығын тарылту әдістері.

Минимумды табу қажет болсын функция $f(x)$ онда $[a,b]$. Жуық әдістің міндеті белгісіздік аралығымен тарылту абсцисса жиынтығын табу болып табылады $x_1, x_2, \dots, x_k$, олардың функциялары есептеледі, мысалы, минималды мән f^* кейбір кезде i интервалында $x_{i-1} \leq x^* \leq x_i$. Мұндай кіріспе D белгісіздік аралығымен аталады.

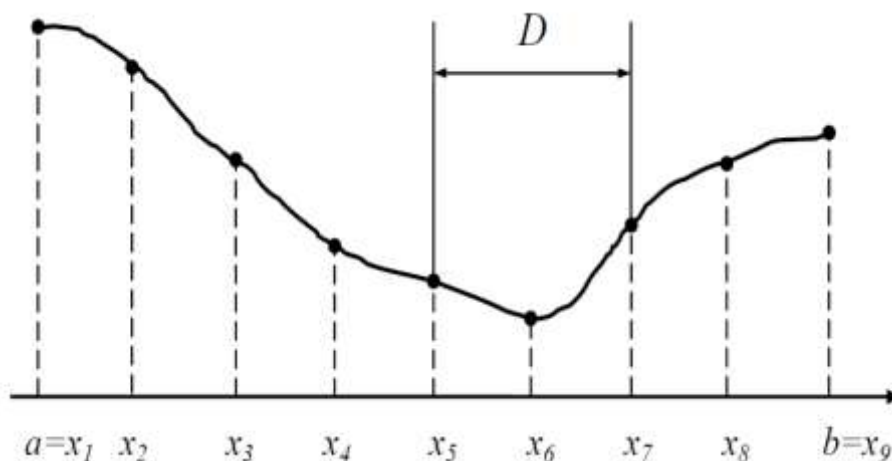
Алдымен белгісіздік интервалы $D [A,b]$ сегментіне сәйкес келетіні анық.

Белгісіздік аралығын жүйелі түрде тарылтудың бірнеше жолы бар. Олардың үшеуін қарастырайық.

2.1.1. Жалпы іздеу.

Белгілі бір аралықта $f(x)$ функциясының минимумын табу қажет болсын $[a,b]$. Егер осы аралықта $f(x)$ функциясы туралы қосымша ақпарат белгісіз болса, онда $[a,b]$ минимумын іздеу үшін қарапайым іздеу әдісін қолдануға болады, әйтпесе жалпы іздеу.

Бұл әдісте $[a,b]$ интервалы бірнеше тең бөліктерге бөлінеді. Минимум ретінде функцияның минималды есептелген мәні бар абсцисса алынады (сурет 4).



Сурет - 4 Жалпы іздеу әдісіне иллюстрация

Нәтижесінде белгісіздік аралығы тордың екі сатысына дейін созылады. Әдетте олар α коэффициентімен сипатталатын белгісіздік аралығын бөлу туралы айтады. Белгісіздік аралығын n тең бөліктерге бөліп, $n + 1$ түйін алды. Сонда $\alpha = \frac{2}{n}$. Бұл жағдайда $N = n + 1$ функциясын бір рет есептеу керек.

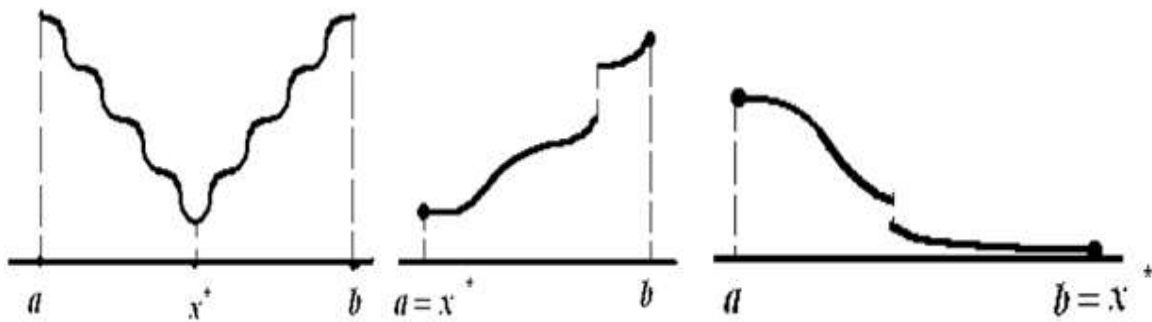
$$\text{Демек} \quad \alpha = \frac{2}{N-1}, \quad N = 3, 4, 5 \dots \quad (2.1)$$

$\alpha = 0,01$ мәнін алу үшін 201 нүктенің функциясын шешу қажет, ал $\alpha = 0,001$, $N = 2001$ болады. Бұл әдістің тиімділігі белгісіздік аралығының төмендеуімен тез төмендейтіні анық.

2.1.2. Унимодальды функциялар

Неғұрлым тиімді әдістерді зерттелетін функцияның қарастырылатын интервалында тек бір минимум болады деп болжауға болады. Дәлірек айтсақ: $[a, b]$ интервалында x^* мәні бар, мысалы, $f(x^*)$ - минимум $f(x)$ $[a, b]$ және $f(x)$ $x \leq x^*$ үшін қатаң өлтіреді және $x \geq x^*$ үшін қатаң өседі (5-сурет). Бұл функция унимодальды деп аталады.

Оның графигі үшін 3 түрлі нысан бар:



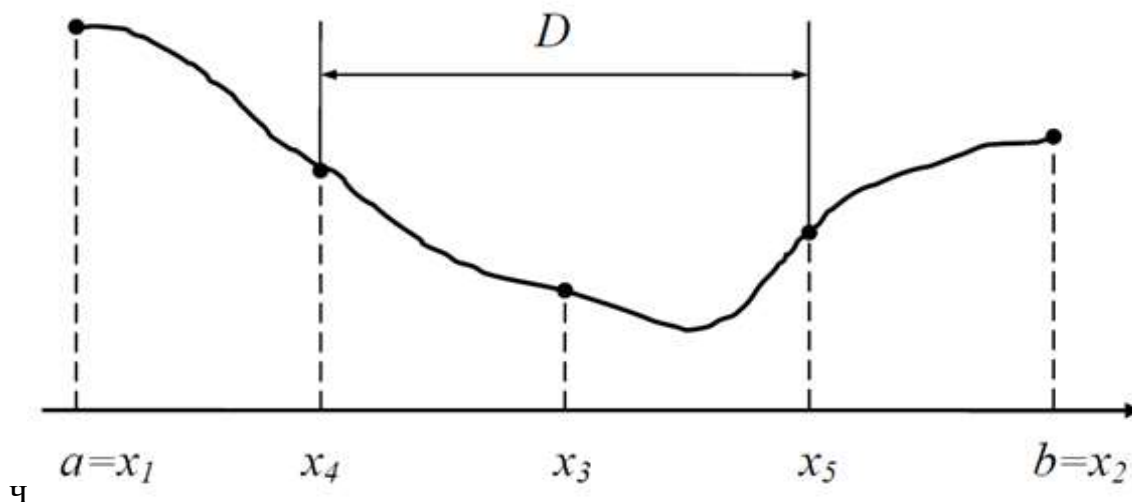
Сурет 5 – унималды функция

Унимодальды функцияның Тегіс немесе тіпті үздіксіз болуы міндетті емес екенін ескеріңіз.

Шығу позициясынан x_1, x_2 кез келген нүктелер үшін $x_1 < x_2 \leq x^*$, әділ $f(x_2) < f(x_1)$ сияқты интервал $[a, b]$ болады. Осыған ұқсас, егер $x^* \leq x_1 < x_2$, онда $f(x_2) > f(x_1)$. Егер кері болса $x_1 < x_2$ және $f(x_1) > f(x_2)$, онда $x_1 \leq x^* \leq b$, сонда $f(x_1) < f(x_2)$, сонда $a \leq x^* \leq x^2$. Әрі қарай, біз зерттелетін функцияны унимодальды деп санаймыз.

2.1.3 Аралықты екіге бөлу әдістері

$[a,b]$ аралығын екі тең бөлікке, содан кейін бөліктердің әрқайсысын тағы екі тең бөлікке бөліміз (6-сурет).



Сурет - 6 Жартылай бөлу әдісі

Бұл минимумды іздеудің 1 кезеңі. Онда функцияның бес есептеуінен кейін белгісіздік аралығы екі есе тарылады, яғни осы кезеңде $\alpha = 0,5$. Жаңа белгісіздік аралығы $[x_4, x_5]$ қайтадан жартысына, содан кейін әр жартысын қайтадан жартысына бөліңіз. Енді функцияның шеттер мен оның ортасындағы мәні бұрыннан белгілі. Сондықтан, осы кезеңде іздеуді аяқтау үшін функцияның тек 2 мәнін есептеу керек, содан кейін белгісіздік аралығы қайтадан екі есе азаяды. Қарастырылғанның бұл артықшылығы болашақта сақталмайды.

N функция есептеулерінен кейін интервалдың ұнтақтау коэффициенті:

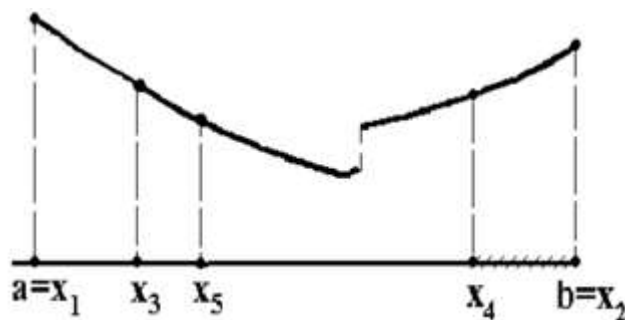
$$\alpha = (0,5)^{\frac{N-3}{2}}, \quad N = 5, 7, 9, \dots \quad 2.2$$

Мұнда $N=5,7,9,\dots$ белгісіздік аралығы екінші кезеңнен бастап функцияны екінші есептеуден кейін ғана азаяды.

(2.1),(2.2) бастап, жартысын бөлу әдісі жалпы іздеуден гөрі тиімді екенін көруге болады.

2.1.4. Алтын бөлім әдісі

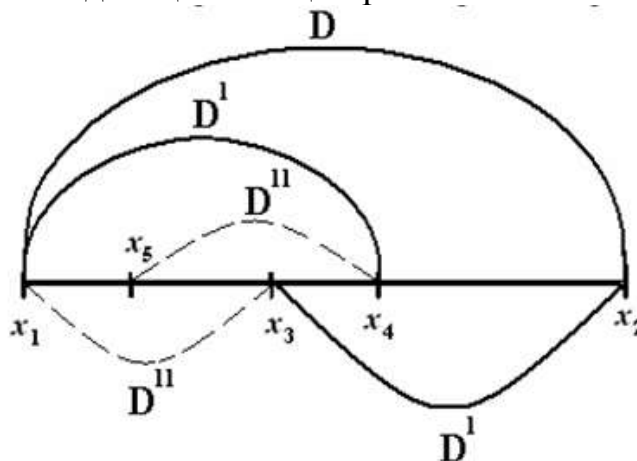
Аралықты тең емес бөліктерге бөлу одан да тиімді әдісті табуға мүмкіндік береді. Біз функцияны кесіндінің ұштарында есептейміз $[a, b]$ және $a = x_1, b = x_2$. Екі ішкі нүктенің x_3, x_4 функциясын да есептейміз. Функцияның барлық төрт мәнін салыстырыңыз және олардың ішіндегі ең кішісін таңдаңыз (7-сурет). Мысалы, ең азы $f(x_3)$ болсын. Минимум оған іргелес сегменттердің бірінде екені анық. Сондықтан кесіндіні $[x_4, b]$ тастауға және $[a, x_4]$ кесіндісін қалдыруға болады.



Сурет 7 Алтын қатынас әдісіне иллюстрация

Бірінші қадам жасалды. $[a, x_4]$ сегментінде тағы екі ішкі нүктені таңдап, олардағы және ұштардағы функцияның мәнін есептеп, келесі қадамды жасау керек. Бірақ алдыңғы есептеу қадамында біз жаңа кесіндінің ұштарында $[a, x_4]$ және оның бір ішкі нүктесінде x_3 функциясын таптық. Сондықтан $[a, x_4]$ ішінде x_5 -тің тағы бір нүктесін таңдап, ондағы функцияның мәнін анықтап, қажетті салыстырулар жасау жеткілікті. Бұл процестің бір қадамындағы есептеу көлемін төрт есе азайтады. Нүктелерді қалай тиімді орналастыру керек? Әр жолы қалған сегмент үш бөлікке бөлінеді, содан кейін экстремалды сегменттердің бірі тасталады.

D арқылы белгісіздіктің бастапқы аралығын белгілеңіз (Сурет 8)



Сурет 8 Алтын бөлім әдісіндегі аралықты бөлу

Жалпы жағдайда x_1, x_3 немесе x_4, x_2 сегменттерінің кез - келгенін алып тастауға болатындықтан, кесіндінің ұзындығы бірдей болатындай етіп x_3 және x_4 нүктелерін таңдаймыз: $x_3 - x_1 = x_2 - x_4$. Шығарғаннан кейін сіз D' ұзындықтың белгісіздігінің жаңа аралығын аласыз.

$\frac{D}{D'}$ қатынасын φ әрпімен белгілеңіз:

$$\varphi = \frac{D}{D'}$$

Әрі қарай, біз процесті осылай жалғастырамыз. Ол үшін D' интервалы D интервалына ұқсас бөлінеді, яғни $\frac{D'}{D''} = \frac{D}{D'} = \varphi$, мұндағы D'' - келесі белгісіздік аралығы. Бірақ D'' ұзындығы алдыңғы кезеңде тасталған сегментке тең, яғни $D'' = D - D'$. Сондықтан:

$$\frac{D}{D'} = \frac{D'}{D - D'} \Rightarrow \frac{D'}{D} = \frac{D}{D'} - 1$$

Бұл $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ теңдеуіне әкеледі немесе сол сияқты

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Бұл теңдеудің оң түбірі $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1,6180$

Соңғы сан математикада алтын қатынас ретінде белгілі, ал сегменттің сипатталған бөлімі алтын қатынас ретінде белгілі. Сондықтан минимумды іздеу әдісі Алтын қатынас әдісі деп аталады.

$$\frac{D}{D'} = \varphi = 1,6180$$

қатынасы функцияның бір қосымша есептеуімен белгісіздік аралығы қанша есе қысқарғанын көрсетеді. Алғашқы үш есептеу белгісіздік аралығын әлі қысқартпайтынын ескеріңіз. Сондықтан функцияны N есептеуден кейін ұсақтау коэффициенті болады

$$\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-3} = 0,6180^{N-3} \quad (2.3)$$

$N \rightarrow \infty$ кезінде белгісіздік аралығының ұзындығы $\frac{1}{\varphi}$ геометриялық прогрессия ретінде нөлге ұмтылады, яғни алтын қатынас әдісі әрқашан біріктіріледі. Бұл әдіс екіге бөлу әдісіне қарағанда тиімді екені анық, өйткені функцияны N есептеуден кейін белгісіздік аралығының ұзындығы алтын бөлімде $\varphi^{N-3} \approx (1,6180)^{N-3}$ рет, ал екіге бөлу әдісінде $2^{\frac{n-3}{2}} \approx (1,4142)^{N-3}$ есе азаяды.

Енді әдістің есептеу сызбасын береміз. Бізде $\frac{D}{D'} = \varphi$, $D = x_2 - x_1$ $D' = x_4 - x_1$ немесе $x_2 - x_3$ бар.

Сол себепті $\varphi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_3}$, $\varphi = \frac{x_2 - x_1}{x_4 - x_1}$ бұл

$$x_3 = x_2 - \frac{1}{4}(x_2 - x_1) = x_2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}(x_2 - x_1) \approx x_2 - 0,6180(x_2 - x_1) \quad (2.4)$$

$$x_3 = x_1 + \frac{1}{4}(x_2 - x_1) = x_1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(x_2 - x_1) \approx x_1 + 0,6180(x_2 - x_1) \quad (2.5)$$

x_1x_3 және x_4x_2 сегменттерінің ұзындығы тең болғандықтан, соңғы теңдікті келесідей қайта жазуға болады:

$$x_4 = x_1 + x_2 - x_3 \quad (2.6)$$

Салыстырудан кейін кез-келген нөмірі бар нүктені алып тастауға болады, сондықтан келесі қадамдарда қалған нүктелер кездейсоқ түрде қайта нөмірленеді. Осы сегментте төрт нүкте болсын, олардың x_i , x_j , x_k , x_l , олардың екеуі сегменттің ұштары.

Функция ең кіші мәнді алатын нүктені таңдаңыз, бұл нүкте x_i нүктесі болсын:

$$f(x_i) < f(x_j), \quad f(x_k), f(x_l) \quad (2.7)$$

Содан кейін x_i - дан неғұрлым алыс нүктені тастаңыз. Бұл нүкте x_l болсын: $|x_l - x_i| > |x_j - x_i|$, $|x_k - x_i|$.

Қалған үш нүктенің сандық осьте таралу ретін анықтаймыз, мысалы $x_k < x_i < x_j$. Біз осы нүктелерді $k=1$, $j=2$ және $i=3$ деп санаймыз. Содан кейін формула бойынша жаңа ішкі нүктені енгіземіз (2.6):

$$x_4 = x_1 + x_2 - x_3.$$

Оның нөмірі қазір -4.

Осы кезде $f(x_4)$ функциясын есептейміз. Салыстыруды орындаймыз, бір нүктені тастаймыз, нүктелердің атын қайта атаймыз, формула бойынша жаңа нүктені енгіземіз (2.6) және т. б.

Минимум соңғы сегменттің ішінде орналасқан: $x^* \in [x_1, x_2]$. Сондықтан, осы белгісіздік аралығының ұзындығы берілген қатеден аз болған кезде процесс тоқтайды: $x_2 - x_1 < \varepsilon$.

Егер $[a, b]$ функциясында бірнеше минимум болса, онда процесс олардың біреуіне сәйкес келеді, бірақ міндетті түрде ең аз емес.

Функцияның N есептеуінен кейін анықталмау аралығын бөлу коэффициентінің мәндеріне сәйкес минимумды іздеу әдістерін салыстыру кестесін береміз

N	Ұсақтау коэффициенті α		
	Жалпы іздеу	Екіге бөлу	Алтын қима
3	1	1	1
4	0,667	-	0,618
5	0,500	0,500	0,382
6	0,400	-	0,25
7	0,333	0,250	0,146
8	0,286	-	0,090
9	0,250	0,125	0,056
10	0,222	-	0,0345
19	0,111	0,00391	0,000453
20	0,105	-	0,000280
21	0,100	0,00195	0,000173

2.1.5. Белгісіздіктің бастапқы аралығын белгілеу

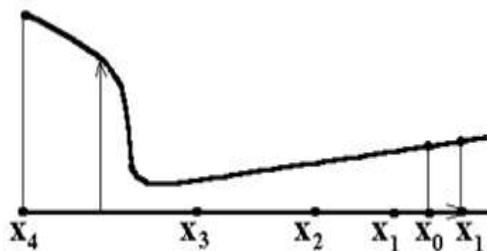
Іздеу аралығын азайту арқылы бір айнымалы функцияның оңтайлы мәнін анықтауға мүмкіндік беретін жоғарыда қарастырылған минималды іздеу әдістері аралықтарды алып тастау әдістері деп аталады.

Интервалдарды алып тастауға негізделген іздеу әдістерін қолдану процесі екі кезеңнен тұрады:

- аралық шекараны белгілеу кезеңі;
- аралықты азайту кезеңі;

Біз аралықты азайту жолдарын қарастырдық. Енді интервал шекараларын белгілеу кезеңін қарастырыңыз. Әдетте эвристикалық әдіс қолданылады, мысалы Свенн әдісі.

Сонымен, $f(x)$ функциясының минимумын сегментте емес, бүкіл x осінде табу керек. Біз x_0 бастапқы жуықтауын тандап, одан h ұзындығына қадам жасаймыз $x_1 = x_0 + h$ (сурет 9). Егер $f(x_1) < f(x_0)$ - ден үлкен болса, онда қадамның бағытын өзгертіп, $x_1 = x_0 + h$ қойыңыз. $h' = 2h$ қадамын екі есе көбейтіп, $x_2 = x_1 + h'$ және т.б. қойыңыз, кейбір қадамда $f(x_n) > f(x_{n-1})$ шарты орындалғанға дейін.



Сурет-9 Свенн әдісіне иллюстрация

Енді унимодальды функцияның минимумы $[x_4, x_3]$ сегментінде болатындығы түсінікті және оны қарастырылған әдістердің бірімен табуға болады.

Іздеу әдістерінің басты артықшылығы - олар тек функцияның мәндерін есептеуге негізделген, сондықтан саралау шарттарын орындауды және целовой функциясын аналитикалық түрде жазуды қажет етпейді. Соңғы қасиет модельдеу кезінде ерекше құнды.

Алайда, іздеу әдістерінің бұл артықшылығы олардың кемшілігі болып табылады - олардың жинақталу жылдамдығы төмен.

Егер $f(x)$ функциясы жеткілікті тегіс болса, мысалы, үздіксіз бірінші және екінші туындылары болса, онда сандық әдістердің конвергенция жылдамдығын туындыларды қолдана отырып әдістерді қолдану арқылы көбейтуге болатындығын ескеріңіз.

Оңтайландыру әдістерін қарастырыңыз тек $f(x)$ функциясының мәндерін қолданыңыз. Мұндай әдістер 0-ші ретті әдістер деп аталады. Егер $f(x)$ функциясы дифференциалданатын болса, онда туындыларды қолданатын жылдам әдістерді болжауға болады. Бірінші туындыны қолданатын әдістер 1 - ші ретті әдістер деп аталады және т. б.

2.2. Ньютон әдістері.

$F(x)$ функциясы екі рет дифференциалды. Математикалық талдаудан белгілі болғандай, мұндай функцияның минимумының шарты-теңдік

$$f'(x^*) = 0 \quad (2.8)$$

Бұл қажетті шарт. Алайда, x^* нүктесі минималды болуы үшін жеткілікті шарт орындалуы керек

$$f''(x^*) > 0 \quad (2.9)$$

Сонымен, теңдеулерді сандық түрде шешеміз

$$f'(x) = 0 \quad (2.10)$$

Кейбір бастапқы x_k жуықтауын орнатыңыз және осы кезде функцияны Тейлор қатарына таратыңыз. Біз тек екінші ретті мүшелермен шектелеміз, яғни функцияның квадрат моделін құрамыз:

$$\hat{f}(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2} f''(x_k)(x - x_k)^2 \quad (2.11)$$

Егер $\hat{f}''(x_k) \neq 0$, $\hat{f}(x)$ жалғыз тұрақты нүкте болса. Біз оны табамыз, ол үшін туынды нөлге теңестіреміз $\hat{f}'(x)$:

$$\hat{f}'(x) = f'(x_k) + f''(x_k)(x - x_k) = 0$$

Біз бұл теңдеуді x -қа қатысты шешеміз және табылған шешімді келесі, $k+1$ -ші минимумға жақындатамыз:

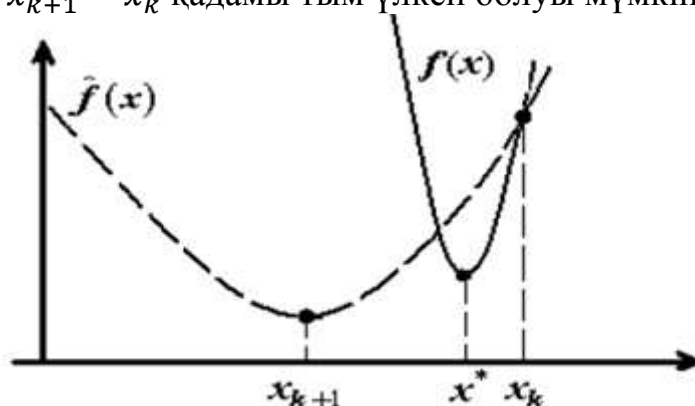
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \quad 2.12$$

(2.12) формуланы Ньютон әдісі деп аталатын $g(x) = 0$ теңдеуін шешудің сандық әдісін қолдану арқылы

$$x_{k+1} = x_k - \frac{g(x_k)}{g'(x_k)}.$$

Енді біз $f'(x) = 0$ теңдеуін шешетінімізді, яғни $g(x) = f'(x)$ қоюымызды ескеру қажет.

2.12 алгоритмінің екі кемшілігі бар. Біріншіден, $f'(x) = 0$ теңдеу минимумды ғана емес, максимумды да анықтай алады. Екіншіден, $f'(x)$ модельдік функциясы оңтайландырылған $f(x)$ функциясынан мүлдем өзгеше болуы мүмкін және $x_{k+1} - x_k$ қадамы тым үлкен болуы мүмкін (10-сурет)



Сурет -10 Ньютон әдісінің иллюстрациясы

Минималды деңгейге жеткенімізге сенімді болу үшін біз әр қадамда $f(x_{k+1}) < f(x_k)$ қатынасын тексереміз. Егер ол орындалса, онда келесі қадамға өтіңіз және т. б. егер $f(x_{k+1}) > f(x_k)$ және $f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ болса, онда $f(x)$ функциясы бастапқыда төмендеуі керек x_k -тен x_{k+1} -ге дейінгі бағытты

табуға болады, сондықтан келесі қолайлы нүктені бөлу арқылы табуға болады қадам кері бағытта, мысалы

$$x'_{k+1} = \frac{x_{k+1} + x_k}{2}$$

2.12 формуласынан $f'(x_k)(x_{k+1} - x_k)$ өрнегі $f''(x_k)$ оң болған кезде теріс болатындығын көруге болады. Бұл дегеніміз, егер ньютондық қадамды алу үшін қолданылатын жергілікті модель максимум емес, минимум болса, онда тиісті қадам бағытының болуына кепілдік беріледі. Екінші жағынан, егер $f''(x_k) < 0$ және $f'(x_k)(x - x_k) > 0$ болса, онда x_k және x_{k+1} -ден ауысқан кезде, $f(x)$ бастапқыда артады, сондықтан қадамды қарама-қарсы бағытта жасау керек.

Оңтайландыру кезінде итерацияны тоқтату критерийін келесі түрде таңдауға болады

$$\left| \frac{f'(x_{k+1})}{f(x_{k+1})} \right| < \varepsilon \quad (2.13)$$

мұндағы, ε - алдын-ала анықталған дәлдік.

Негізгі қадаммен сипатталған әдіс 2.12 келтірілген нақтылауларда әдетте Ньютон немесе Ньютон-Рафсон әдісі деп аталады

Кейбір мәселелерде $f(x)$ туынды функциялары қол жетімді емес және Ньютон әдісін өзгертуге болады. Бастапқы x_k жуықтауын және кіші h қадамын таңдаңыз $x_k - h$, x_k , $x_k + h$. Содан кейін туындылар $f'(x_k)$ және $f''(x_k)$ келесідей жуықтауға болады

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k+h) - f(x_k-h)}{2h},$$

$$f''(x_k) = \frac{f'(x_k+h) - f'(x_k-h)}{2h} = \frac{\frac{f(x_k+h) - f(x_k)}{h} - \frac{f(x_k) - f(x_k-h)}{h}}{2h} = \frac{f(x_k+h) - 2f(x_k) + f(x_k-h)}{2h^2}.$$

2.14 формуласы алгоритмнің негізгі қадамын береді, оны квази-Ньютон әдісі немесе өзгертілген Ньютон әдісі деп атайды. Ньютон Рафсон әдісін шығару кезінде келтірілген $x_{k+1} - x_k$ қадамына қатысты барлық ойлар күшінде қалады.