

**НАО «Карагандинский технический университет имени Абылкаса Сагинова»**

**Кафедра АПП**

# **МООК: Математические задачи и компьютерное моделирование в электроэнергетике**

## **5. МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

5.1. Физические процессы и их характеристики

5.1.1. Классификация физических процессов

5.1.2. Детерминированные процессы

5.1.3. Случайные процессы

Разработчик: PhD Югай В.В.

**Караганда**

# План

## 5. МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

- 5.1. Физические процессы и их характеристики
  - 5.1.1. Классификация физических процессов
  - 5.1.2. Детерминированные процессы
  - 5.1.3. Случайные процессы
- 5.2. Методологические основы прогнозирования
- 5.3. Экспоненциальная модель прогнозирования
- 5.4. Логистическая модель прогнозирования
- 5.5. Прогнозирование случайных процессов
- 5.6. Прогнозирование суточных графиков нагрузки
- 5.7. Анализ временных рядов

## 5.1. Физические процессы и их характеристики

### 5.1.1. Классификация физических процессов

Все наблюдаемые процессы, характеризующие физические явления и изменения состояний объектов, можно классифицировать в самом общем виде как детерминированные и недетерминированные. К детерминированным относятся процессы, которые могут быть описаны точными математическими соотношениями. Рассмотрим, например, твердое тело, подвешенное на упругой пружине (рис. 5.1, *a*).

Пусть  $m$  – масса тела, а  $k$  – коэффициент жесткости пружины. Предположим, что тело получает начальное смещение  $X_m$  из положения равновесия (рис. 5.1, *б*) и освобождается в момент времени  $t = 0$ . На основе фундаментальных законов механики или с помощью повторных наблюдений можно установить справедливость следующего соотношения:

$$x(t) = X_m \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \quad t \geq 0. \quad (5.1)$$

Формула (5.1) достаточно точно описывает положение тела в любой момент времени в недалеком будущем. Для более точного предсказания положения тела в течение длительного времени требуется учесть затухание колебаний. Следовательно, физический процесс, характеризующий движение данного тела, относится к детерминированным.

На практике встречается много физических процессов, которые с высокой точностью могут быть описаны математическими соотношениями. Например, движение спутника по околоземной орбите, изменение напряжения на конденсаторе, который разряжается через сопротивление, вибрация несбалансированного ротора генератора или изменение температуры воды при охлаждении. Детерминированные процессы можно классифицировать, как показано на рис. 5.2.

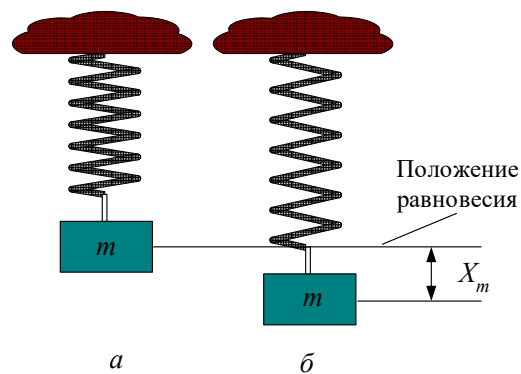


Рис. 5.1. Тело, подвешенное на пружине

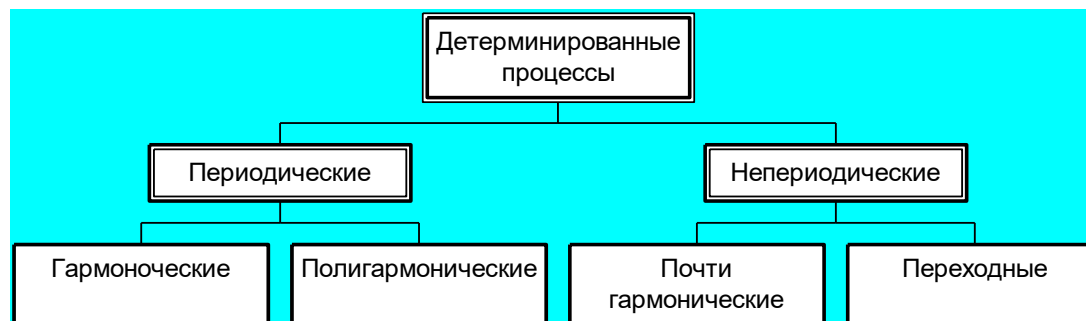


Рис. 5.2. Классификация детерминированных процессов

Существует много процессов, имеющих недетерминированный, т. е. случайный характер. Например, изменение уровня сигнала в канале связи, температура воздуха, мощность, потребляемая из сети в заводском цехе. Точное значение такого процесса в некоторый момент времени в будущем предсказать невозможно. Эти процессы случайны по своей природе и должны описываться не точными уравнениями, а при помощи осредненных

статистических характеристик. Будем обозначать случайный процесс  $x(t)$  случайной функцией от независимой переменной  $t$ .

Случайные процессы можно классифицировать, как показано на рис. 5.3.

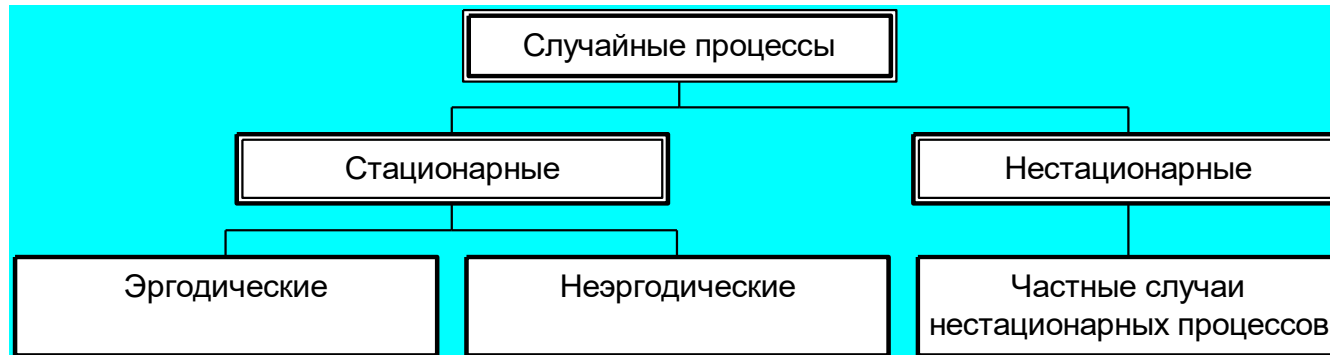


Рис. 5.3. Классификация случайных процессов

Во многих случаях трудно решить, относится рассматриваемый физический процесс к детерминированному или случайному. Можно, например, считать, что в действительности ни один физический процесс не является строго детерминированным, поскольку всегда существует возможность того, что в будущем какое-либо непредвиденное событие изменит течение процесса таким образом, что полученные данные будут носить характер иной, чем предполагалось ранее. С другой стороны, можно утверждать, что в действительности ни один физический процесс не имеет строго случайной природы, так как если достаточно хорошо знать механизм изучаемого процесса, его можно описать точными математическими соотношениями.

Практически решение о детерминированном или случайном характере процесса принимается исходя из возможности либо невозможности воспроизведения его при заданных

условиях. Если многократное повторение опыта дает одинаковые результаты (с точностью до ошибки измерения), то можно, вообще говоря, считать процесс детерминированным. Если же повторение опыта в идентичных условиях приводит к разным исходам, то природа процесса полагается случайной.

### 5.1.2. Детерминированные процессы

Детерминированные периодические процессы подразделяются на гармонические и полигармонические. Гармоническими называют процессы, которые могут быть описаны функцией

$$x(t) = X_m \sin(2\pi f_0 t + \theta), \quad (5.2)$$

где  $X_m$  – амплитуда;

$f_0$  – циклическая частота, измеряемая в циклах в единицу времени;

$\theta$  – начальная фаза, рад.

Соотношение (5.2) может быть представлено графически в функции времени и в амплитудно-частотном изображении (спектре), как показано на рис. 5.4.

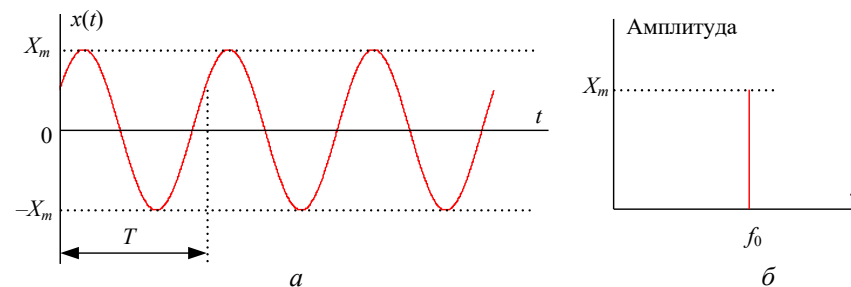


Рис. 5.4. Гармонический процесс и его спектр

Циклическая частота  $f_0 = \frac{1}{T}$ , где  $T$  – период гармонических колебаний.

Полигармонические процессы описываются функцией времени, точно повторяющей свои значения через одинаковые интервалы:

$$x(t) = x(t \pm iT), \quad i = 1, 2, 3... \quad (5.3)$$

Число циклов в единицу времени называется основной частотой  $f_1$ .

Полигармонический процесс может быть представлен рядом Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos 2\pi f_1 t + b_i \sin 2\pi f_1 t), \quad (5.4)$$

где  $f_1 = \frac{1}{T}$ ,  $f_i = if_1$ ,  $i = 2, 3, \dots$ ;

$$a_i = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos 2\pi f_1 t dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots;$$

$$b_i = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin 2\pi f_1 t dt, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Возможен и другой способ записи ряда Фурье для полигармонического процесса:

$$x(t) = X_0 + \sum_{i=1}^{\infty} X_i \cos(2\pi f_1 t - \theta_i), \quad (5.5)$$

где  $X_0 = \frac{a_0}{2}$ ;  $X_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\theta = \arctg\left(\frac{b_i}{a_i}\right)$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots$ .

Как видно из (5.5), полигармонические процессы состоят из постоянной составляющей  $X_0$  и бесконечного числа синусоидальных составляющих, называемых гармониками, с амплитудами  $X_i$  и начальными фазами  $\theta_i$ . Частоты всех гармоник кратны основной частоте  $f_1$ .

Полигармонический процесс может иметь вид, показанный на рис. 5.5, а, и соответствующий формуле (5.5) дискретный спектр, показанный на рис. 5.5, б.

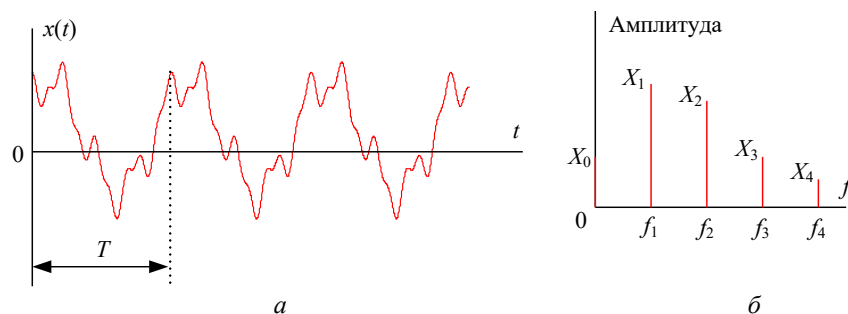


Рис. 5.5. Полигармонический процесс и его спектр

В других случаях составляющая с основной частотой может отсутствовать. Предположим, например, что периодический процесс формируется в результате сложения трех синусоидальных функций с частотами 60, 75 и 100 Гц. Наибольший общий делитель этих чисел равен 5 Гц, поэтому период результирующего периодического процесса составляет 0,2 с. Следовательно, при разложении в ряд Фурье значения  $X_i$  будут равны нулю при всех  $i$ , кроме  $i = 12, i = 15, i = 20$ .

Физические процессы полигармонического типа встречаются гораздо чаще простых гармонических процессов. В действительности, когда тот или иной процесс относят к типу гармонических, то зачастую при этом имеют в виду только приближенное представление процесса, который на самом деле является полигармоническим. Например, напряжение на выходе генератора переменного тока содержит небольшие колебания с частотами высших гармоник.

Однако процессы, образованные при суммировании двух или более гармонических функций с произвольными частотами, не будут, вообще говоря, периодическими. Сумма двух

или более синусоидальных функций образует периодический процесс только в том случае, если отношение всех возможных пар частот представляет собой рациональные числа. Это означает, что существует некоторый основной период, удовлетворяющий формуле (5.3). Так, процесс

$$x(t) = X_1 \sin(2\pi 2t + \theta_1) + X_2 \sin(2\pi 3t + \theta_2) + X_3 \sin(2\pi 7t + \theta_3) \quad (5.6)$$

является периодическим, поскольку  $2/3$ ,  $3/7$  и  $2/7$  – рациональные числа (с основным периодом, равным единице). С другой стороны, процесс

$$x(t) = X_1 \sin(2\pi 2t + \theta_1) + X_2 \sin(2\pi 3t + \theta_2) + X_3 \sin(2\pi \sqrt{50}t + \theta_3) \quad (5.7)$$

не является периодическим, поскольку числа  $2/\sqrt{50}$  и  $3/\sqrt{50}$  иррациональные и основной период равен бесконечности. В этом случае процесс является почти периодическим, но соотношение (5.3) не удовлетворяется при любых конечных значениях  $T$ .

Таким образом, к почти периодическим относятся такие процессы, которые могут быть описаны функцией времени:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \sin(2\pi f_i t + \theta_i), \quad (5.8)$$

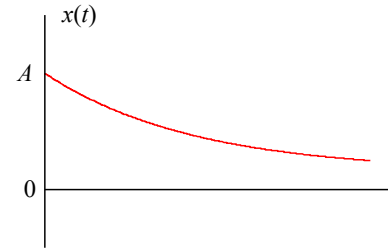
имеющей хотя бы одно отношение  $f_i/f_j$ , которое не является рациональным числом.

Дискретный спектр почти периодического процесса аналогичен спектру полигармонического процесса.

К переходным относятся все непериодические процессы, не являющиеся почти периодическими процессами, описанными выше. Другими словами, переходные процессы

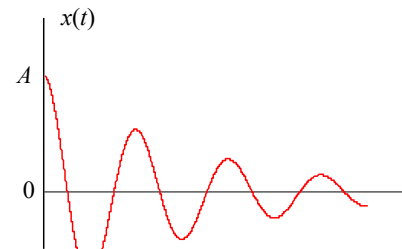
включают в себя все не рассмотренные ранее процессы, которые могут быть описаны подходящими функциями времени. Три примера распространенных переходных процессов приведены на рис. 5.6.

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



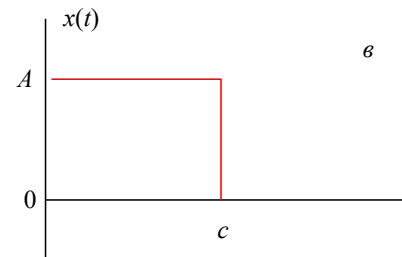
*a*

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} \cos bt & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



*б*

$$x(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq c \\ 0 & 0 < t < c \text{ и } t > c \end{cases}$$



*в*

Рис. 5.6. Примеры переходных процессов

Физические переходные процессы весьма многочисленны и разнообразны. Например, процесс, изображенный на рис. 5.6, *а*, может описывать изменение во времени температуры проводника после отключения протекавшего по нему тока. Кривая на рис. 5.6, *б* может характеризовать свободные колебания инерционной механической системы после прекращения действия вынуждающей силы. График

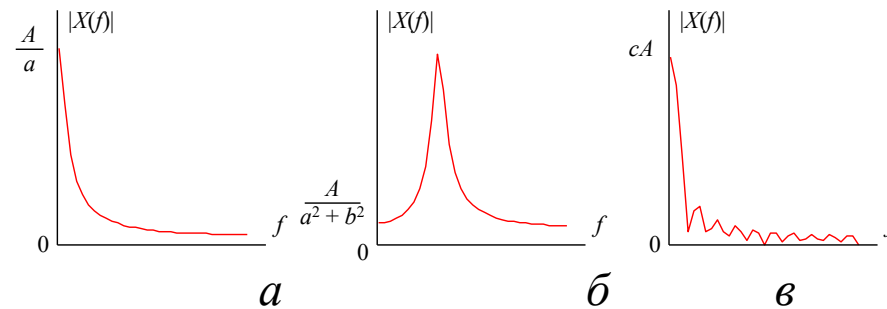


Рис. 5.7. Спектры переходных процессов

на рис. 5.6, *в* может описывать изменение во времени механического напряжения в тросе, который подвешен на опорах линии электропередачи и разрывается в момент *c*.

Важное отличие переходных процессов от периодических и почти периодических состоит в том, что их невозможно представить с помощью дискретного спектра. Однако в большинстве случаев получают непрерывное спектральное представление переходных процессов, используя интеграл Фурье

$$x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{2\pi it} dt.$$

Спектр Фурье  $X(f)$  в общем случае является комплексной функцией, которая может быть записана в показательной форме:

$$X(f) = |X(f)|e^{-j\theta(f)}. \quad (5.9)$$

Здесь  $|X(f)|$  – модуль, а  $\theta(f)$  – аргумент. Модули  $|X(f)|$  преобразования Фурье трех переходных процессов, изображенных на рис. 5.6, показаны на рис. 5.7.

### 5.1.3. Случайные процессы

Функция  $X(t)$  называется случайной, если ее значение при любом аргументе  $t$  является случайной величиной. Случайные функции времени называют случайными процессами.

Реализацией случайной функции  $X(t)$  (выборочной функцией) называется конкретный вид, который она принимает в результате опыта. Реализация случайного процесса может рассматриваться как элемент множества возможных физических реализаций случайного процесса (рис. 5.8). Совокупность реализаций случайного процесса называется ансамблем реализаций. Совокупность значений реализаций в фиксированный момент времени (выборка случайных значений) называется сечением случайного процесса.

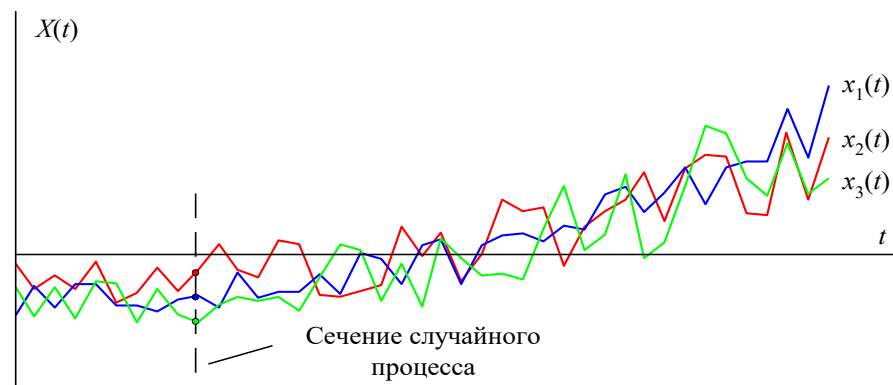


Рис. 5.8. Реализации случайного процесса

В любом сечении случайный процесс есть случайная величина.

Математическое ожидание случайного процесса есть функция времени

$$m_X(t) = M[X(t)]. \quad (5.10)$$

Второй центральный момент для двух сечений случайного процесса называется ковариационной функцией

$$R_X(t, t') = M \left[ \overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t') \right], \quad (5.11)$$

где  $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_X(t)$  — центрированный случайный процесс.

При  $t = t'$  ковариационная функция равна дисперсии случайного процесса

$$R_X(t, t) = D_X(t) = D[X(t)]. \quad (5.12)$$

Математическое ожидание и ковариационная функция случайного процесса могут быть найдены по реализациям случайного процесса — осреднением по реализациям:

$$m_X(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t), \quad (5.13)$$
$$R_X(t, t') = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \overset{\circ}{x}_k(t) \overset{\circ}{x}_k(t'),$$

где  $N$  — число реализаций случайного процесса.

Если математическое ожидание и ковариационная функция не зависят от времени  $t$ , то процесс является стационарным:

$$m_X(t) = m_X, \quad R_X(t, t') = R_X(\tau), \quad (5.14)$$

где  $\tau = t' - t$ . В (5.14) ковариационная функция зависит только от величины  $\tau$ , а не от места его расположения на оси времени (рис. 5.9).

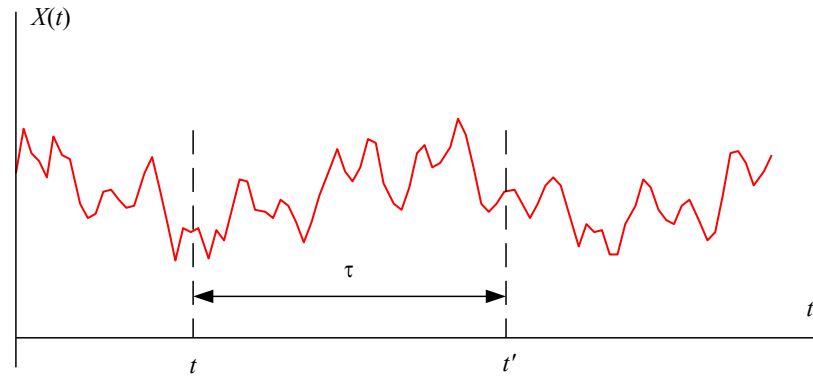


Рис. 5.9. Время между двумя сечениями случайного процесса

Возможный вид ковариационной функции показан на рис. 5.10.

Во многих случаях используется нормированная ковариационная (или корреляционная) функция. Для стационарного случайного процесса

$$r_X(\tau) = \frac{R_X(\tau)}{D_X}. \quad (5.15)$$

Величина корреляционной функции  $|r_X(\tau)| \leq 1$ .

Возможно осреднение по времени отдельных выборочных функций (реализаций). Для  $k$ -й выборочной функции имеем:

$$m_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt, \quad (5.16)$$

$$R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} x_k(t) x_k(t + \tau) dt.$$

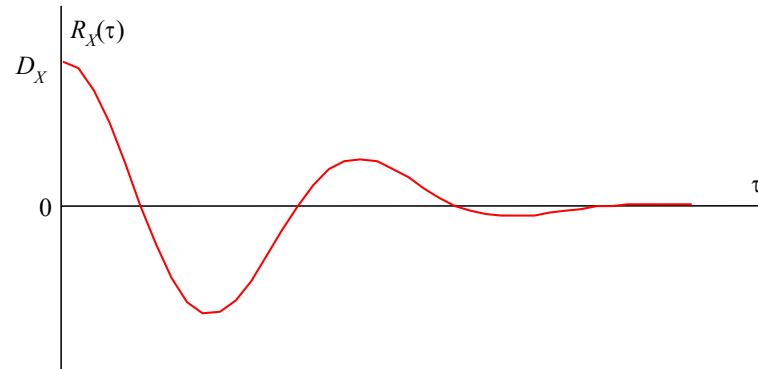


Рис.5.10. Ковариационная функция случайного процесса

Если случайный процесс  $X(t)$  стационарен и характеристики  $m_X$  и  $R_X(\tau)$  одинаковы для различных выборочных функций, то такой процесс называют *эргодическим*.

Эргодические процессы представляют важный класс случайных процессов.

*Нестационарными случайными процессами* являются все случайные процессы, не обладающие свойствами стационарности. Эти процессы сложны в исследованиях, и зачастую в задачах по анализу их разбивают на интервалы стационарности или приближенно аппроксимируют стационарными процессами.

## 5.2. Методологические основы прогнозирования

**Прогноз** – научно обоснованное суждение о возможных состояниях объекта в будущем и/или об альтернативных путях и сроках их осуществления.

Можно выделить два вида прогнозируемых характеристик системы, зависящих от времени: *переменные состояния* и *переменные интенсивности*.

Переменная состояния определяется периодически, и ее значение в течение небольшого интервала времени не зависит от времени, прошедшего с начала наблюдения. Переменная интенсивности также определяется периодически, но ее значение пропорционально времени, прошедшему с момента предыдущего наблюдения. Такие характеристики системы, как температура, скорость, число подписчиков на журнал или цена, являются примерами переменных состояния. В качестве примеров переменной интенсивности можно привести количество выпавших осадков, количество переданной электроэнергии, количество проданных экземпляров или спрос. Если переменная состояния характеризует количество, то переменная интенсивности – скорость его изменения.

Если прогноз делается в момент времени  $t_0$ , то используются данные о течении процесса до этого момента. Такие данные называются ретроспективой и могут быть описаны какой-либо математической моделью физического процесса. Время, в течение которого были собраны данные о процессе, называется временем ретроспективы –  $L_{\text{рет}}$ . Время, на которое делается прогноз, называется временем упреждения –  $L_{\text{упр}}$  (рис. 5.11).

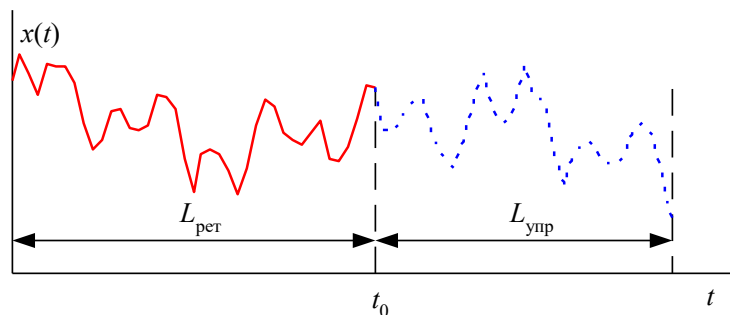


Рис. 5.11. Время ретроспективы и упреждения

Процессы прогнозирования переменных состояния и интенсивности отличаются друг от друга следующими особенностями:

- если измерения характеристик системы проводятся через равные интервалы времени, то величину интервала необходимо учитывать при оценке переменных интенсивности, в то время как при оценке переменных состояния эта величина не имеет значения;
- так как прогнозы обычно осуществляются для нескольких последовательных интервалов времени в пределах некоторого времени упреждения, по истечении которого становятся важными результаты реализации принятых решений, то правильный прогноз переменной состояния должен определять ее значение в конце времени упреждения, а прогноз переменной интенсивности должен представлять собой сумму прогнозов на протяжении времени упреждения;
- функция распределения во времени вероятностей ошибок прогноза для переменной состояния должна соответствовать функции распределения вероятностей ошибок в исходных данных, тогда как для переменной интенсивности закон распределения вероятностей ошибок прогноза во времени стремится к нормальному при любом законе распределения вероятностей ошибок в исходных данных, поскольку эти ошибки представляют собой сумму ошибок прогноза в отдельные интервалы времени.

Объектами прогнозирования могут быть процессы, явления, события.

Здесь рассматриваются вопросы прогнозирования физических процессов.

Прогноз разделяют на текущий, краткосрочный и долгосрочный. Сравнительная характеристика этих прогнозов дана в табл. 5.1.

Методы прогнозирования можно подразделить на три вида:

- статистические (описательные);
- причинно-следственные;
- комбинированные.

Статистические методы не вскрывают внутренних связей в системе и влияния внешней среды и по существу экстраполируют детерминированный или стохастический процесс по подобранной математической модели.

Причинно-следственные модели прогноза учитывают влияние окружающей среды и позволяют выделить причины изменений в системе. Прогноз, полученный по такой модели, объясняет будущее системы.

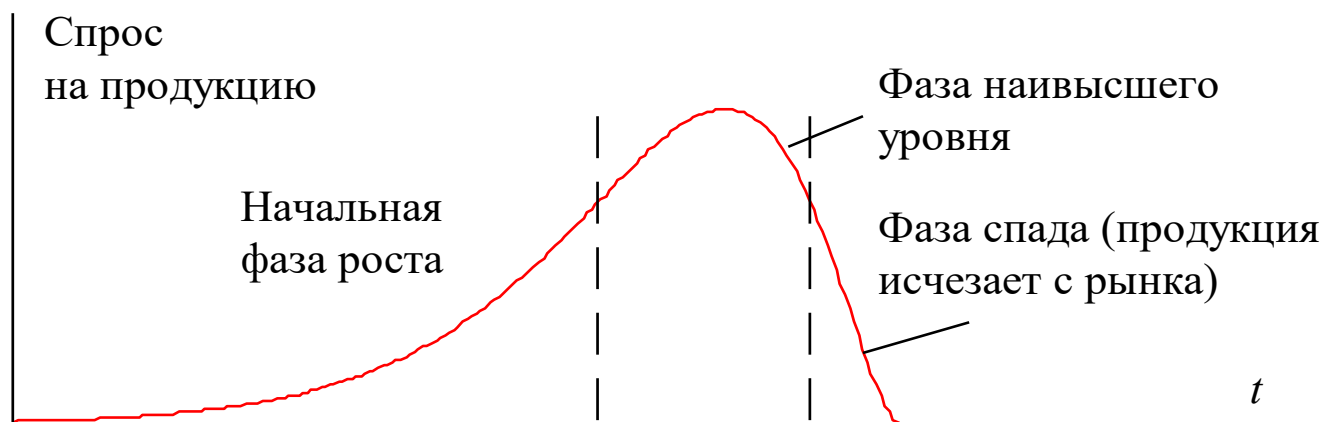
Таблица 5.1

### Характеристика различных видов прогноза

Признак	Вид прогноза		
	оперативный	краткосрочный	долгосрочный
Время упреждения	1...2 суток	До 1...2 лет	На 5...20 лет
Соотношение $L_{упр}$ и $L_{рет}$			
Тип используемой информации	Непрерывные процессы	Интервальная	Интервальная качественная
Основные гипотезы	Стационарность, эргодичность, устойчивость средних	Устойчивость тенденций	Неустойчивость и неравномерность развития
Определяющие законы функционирования	Физические, вероятностные	Системные, причинно-следственные	Эволюционные

Если процесс является периодическим, то частота наблюдений должна быть, по крайней мере, вдвое больше частоты изучаемого процесса.

Важное значение имеет анализ исходных данных для прогнозирования. Данные являются результатами выборочных наблюдений, в которых возможны выбросы, т. е. значения, которые появились в результате аномальных эффектов (чрезвычайно большая температура в помещении вследствие поломки кондиционера, большой спрос на продукцию во время забастовок, изменение потребления электроэнергии



*Рис. 5.12.* Кривые жизненного цикла продукции

в период экономических и социальных перемен и т. п.). Поэтому не всякая совокупность является подходящим временным рядом, и перед построением модели прогноза необходимо из данных исключить выбросы, которые не характеризуют прогнозируемый процесс.

Некоторые процессы поддаются графоаналитическому описанию в силу некоторых физических, экологических и даже экономических закономерностей. Так, например, замечена закономерность появления и спада спроса на некоторую продукцию на рынке (рис. 5.12). Известны и хорошо подтверждаются на практике экологические модели размножения и гибели популяций.

### 5.3. Экспоненциальная модель прогнозирования

Во многих случаях в качестве математического описания физических процессов используется экспоненциальная функция. Рассмотрим такую модель на примере процесса распада радиоактивного элемента.

Известно, что скорость распада любого радиоактивного элемента прямо пропорциональна наличной его массе:

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad k > 0. \quad (5.17)$$

Знак минус указывает на убывание массы.

Разделим переменные в дифференциальном уравнении (5.17):

$$\frac{dx}{x} = -kdt \quad (5.18)$$

и после интегрирования получим

$$\ln x = -kt + C. \quad (5.19)$$

При  $t = 0$  из (5.19) будем иметь  $C = \ln x_0$ , где  $x_0$  – количество массы в начальный момент времени, тогда

$$\ln x - \ln x_0 = -kt \quad \text{и} \quad \ln \frac{x}{x_0} = -kt, \quad (5.20)$$

откуда

$$x(t) = x_0 e^{-kt}, \quad t \geq 0, \quad (5.21)$$

где  $k$  – константа, которая может быть определена экспериментальным путем.

Пусть за время  $\Delta t = t - t_0$  распалось  $\alpha$  % радиоактивного элемента, тогда остаток (рис. 5.14).

$$\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) x_0 = x_0 e^{-k\Delta t} \quad \text{и} \quad \left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) = e^{-k\Delta t}. \quad (5.22)$$

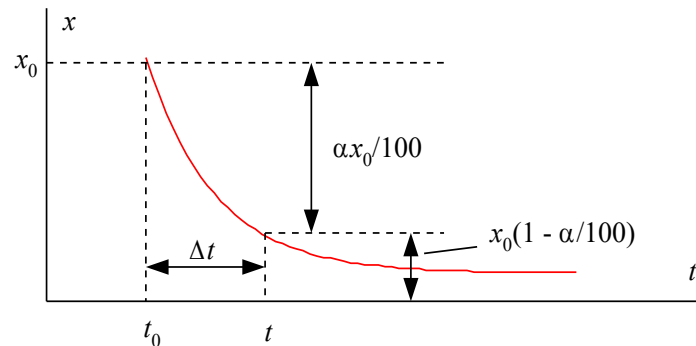


Рис. 5.14. Определение параметра модели распада радиоактивного элемента

Логарифмируя полученное выражение и выражая коэффициент  $k$ , получим

$$k = -\frac{1}{\Delta t} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right). \quad (5.23)$$

Для элемента радия  $k = 0,00044$  1/год.

Во многих случаях экспоненциальная модель зарекомендовала себя очень хорошо как в случае убывания некоторой субстанции, так и для роста субстанции. В общем случае модель формулируется следующим образом: скорость изменения некоторой субстанции (роста, спада) пропорциональна уже имеющемуся количеству. Так, например, скорость увеличения выработанной электрической энергии

$$\frac{dW}{dt} = \alpha W, \quad \alpha > 0, \quad (5.24)$$

т. е. прирост показателя в единицу времени пропорционален уже имеющемуся количеству (достигнутому уровню) с неизменным коэффициентом пропорциональности  $\alpha = \text{const}$ .

В логарифмических координатах зависимость  $\ln W(t)$  – прямая линия.

$$\ln W(t) = \alpha t + \ln C. \quad (5.25)$$

В случае начала отсчета  $t = t_0$  ( $t_0 \neq 0$ ),  $W = W_0$  и

$$\ln W_0 = \alpha t_0 + \ln C, \quad (5.26)$$

откуда

$$\ln C = \ln W_0 - \alpha t_0 \quad (5.27)$$

и

$$\ln W(t) = \ln W_0 + \alpha(t - t_0). \quad (5.28)$$

Окончательно получаем модель

$$W(t) = W_0 e^{\alpha(t-t_0)}. \quad (5.29)$$

В некоторых случаях оказывается более удобной модель с постоянным коэффициентом  $\beta$ :

$$W(t) = W_0 e^{\alpha(t-t_0)} + \beta. \quad (5.30)$$

## 5.4. Логистическая модель прогнозирования

Экспоненциальная модель достаточно хорошо описывает процесс на этапах развития без влияния каких-либо мешающих внешних факторов, при этом темп роста (спада) остается неизменным. Однако во многих случаях на протяжении достаточно большого времени темп процесса не может считаться постоянным.

Рассмотрим модель процесса производства электроэнергии. Замечено, что темп роста производства электроэнергии непостоянен и с увеличением времени снижается. Это связано со многими факторами, среди которых главные: стремление к экономии электроэнергии, появление новых энергосберегающих технологий и ограничение энергетических ресурсов (рис. 5.14).

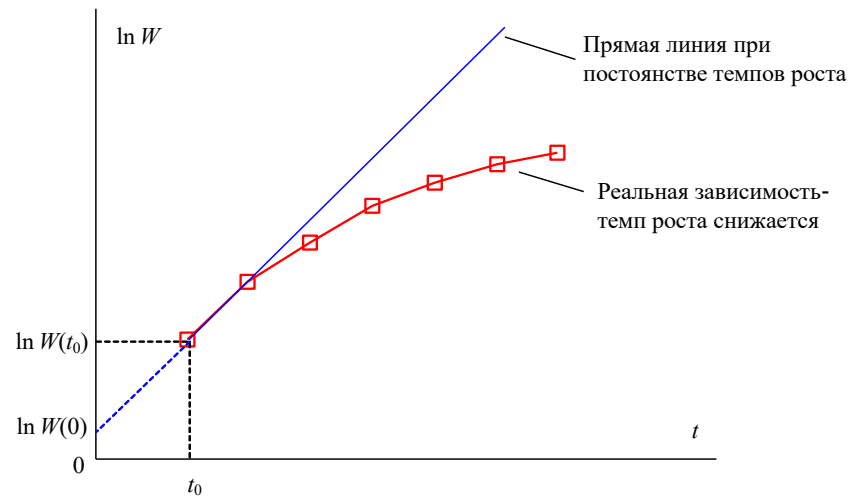


Рис. 5.14. Процесс выработки электроэнергии в логарифмических координатах

Для описания целого ряда массовых явлений, где одна группа факторов способствует развитию процесса, а другая, напротив, его тормозит, причем тем значительнее, чем дальше продвинулся процесс, используется так называемая логистическая (*s*-образная) кривая.

В случае, когда  $\alpha = \text{const}$ , процесс производства электрической энергии выражается формулой (5.29) и в логарифмических координатах записывается как

$$\ln W(t) = \ln W_0 + \alpha(t - t_0). \quad (5.31)$$

Возьмем производную от (5.31) по времени

$$\frac{d \ln W(t)}{dt} = \alpha. \quad (5.32)$$

Если на всем рассматриваемом интервале времени производная (5.32) постоянна, то это экспоненциальная модель, в противном случае

$$\frac{d \ln W(t)}{dt} = \alpha(t). \quad (5.33)$$

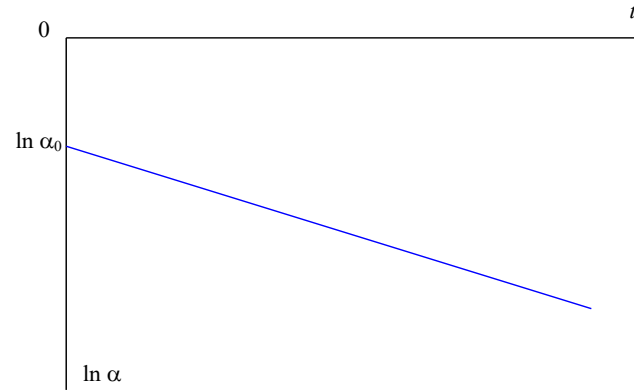
Так как со временем темп роста уменьшается, то можно предположить, что  $\alpha(t)$  есть монотонно убывающая функция, и также использовать для нее экспоненциальную модель

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\gamma t}, \quad \gamma > 0. \quad (5.34)$$

Логарифмируя выражение (5.34), получаем

$$\ln \alpha = \ln \alpha_0 - \gamma t. \quad (5.35)$$

Таким образом, в логарифмических координатах (5.35) есть прямая линия (рис. 5.15).



*Рис. 5.15.* Зависимость темпа роста процесса в логарифмических координатах

Эта модель также могла быть получена из решения дифференциального уравнения (скорость уменьшения темпа  $\alpha$  пропорциональна имеющейся величине)

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\gamma\alpha. \quad (5.36)$$

При начальных условиях  $t = t_0$  и  $\alpha(t_0) = \alpha_0$  уравнение (5.36) имеет решение:

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\gamma(t-t_0)}. \quad (5.37)$$

Подставляя (5.37) в (5.32), будем иметь дифференциальное уравнение

$$\frac{d \ln W(t)}{dt} = \alpha_0 e^{-\gamma(t-t_0)}, \quad (5.38)$$

решить которое можно разделением переменных

$$d \ln W(t) = \alpha_0 e^{-\gamma(t-t_0)} dt \quad (5.39)$$

и интегрированием от момента времени  $t_0$  до момента  $t$ :

$$\int_{\ln W(t_0)}^{\ln W(t)} d \ln W(t) = \alpha_0 \int_{t_0}^t e^{-\gamma(t-t_0)} dt \quad (5.40)$$

и

$$\ln W(t) - \ln W(t_0) = -\frac{\alpha_0}{\gamma} \left( e^{-\gamma(t-t_0)} - e^{-\gamma(t_0-t_0)} \right). \quad (5.41)$$

Имея в виду, что  $W_0 = W(t_0)$  и  $e^{-\gamma(t_0-t_0)} = 1$ , получаем

$$W(t) = W_0 e^{-\frac{\alpha_0}{\gamma} \left( e^{-\gamma(t-t_0)} - 1 \right)}. \quad (5.42)$$

Полученное выражение (5.42) является логистической моделью процесса. С помощью этой модели достаточно хорошо описывается процесс годовой выработки электроэнергии во многих странах мира за последние десятилетия.

В СССР в 1960-е годы прирост электроэнергии составлял 5...6 % в год, в 80-е годы он снизился до 2...3 % в год. Аналогичная картина имеется и в некоторых других странах.

В тех случаях, когда зависимость  $\ln \alpha(t)$  не является прямой линией, логистическая модель не может быть использована.

**Пример 1.** Выполним прогноз годовой выработки электроэнергии по данным, приведенным в табл. 5.2, на 2000 и 2005 годы.

Таблица 5.2

Годовая выработка электроэнергии в СССР, млрд. кВт·ч

Годы ( $t_i$ )	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
$W_i$	292	506	740	1038	1293	1544	1726

Для прогнозирования выберем экспоненциальную и логистическую модель

Для определения  $\alpha$  в (5.29) найдем логарифмы  $W_i$  и найдем коэффициенты линейной функции  $\ln W(t) = \ln W_0 + \alpha(t - t_0)$ .

Таблица 5.3

### Логарифмы $W_i$

$(t_i - t_0)$	0	5	10	15	20	25	30
$\text{Ln } W_i$	5,677	6,227	6,607	6,945	7,165	7,342	7,454

Здесь  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$  ( $n = 7$ ).

Все расчеты и графические построения выполним в Mathcad.

Начальные значения:

Обозначения: Years – годы,  $W$  – годовое электропотребление,  $t_n$  – первый год ретроспективы.

ORIGIN := 1    n := 7    tn := 1960

i := 1..n

Years :=	$\begin{pmatrix} 1960 \\ 1965 \\ 1970 \\ 1975 \\ 1980 \\ 1985 \\ 1990 \end{pmatrix}$	W :=	$\begin{pmatrix} 292 \\ 506 \\ 740 \\ 1038 \\ 1293 \\ 1544 \\ 1726 \end{pmatrix}$	Y := Years - t <sub>0</sub>	Y =	$\begin{pmatrix} 0.000 \\ 5.000 \\ 10.000 \\ 15.000 \\ 20.000 \\ 25.000 \\ 30.000 \end{pmatrix}$
----------	--------------------------------------------------------------------------------------	------	-----------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------	-----	--------------------------------------------------------------------------------------------------

## 1. Экспоненциальная модель

$\text{Ln}W := \ln(W)$	$\alpha := \text{slope}(Y, \text{Ln}W)$	$\alpha = 0.058$	$\text{Ln}W =$	5.677
				6.227
				6.607
				6.945
				7.165
				7.342
				7.454

В логарифмических координатах – линейная зависимость:

$$\text{Ln}W_{\text{exp}}(t) := \text{Ln}W_0 + \alpha \cdot (t - t_0)$$

Экспоненциальная функция:

$$W_0 := \exp(\text{Ln}W_0) \quad W_0 = 366.377$$

$$W_{\text{exp}}(t) := W_0 \cdot \exp[\alpha \cdot (t - t_0)]$$

## 2. Логистическая модель 1

Для получения параметров логистической модели требуется дифференцирование функции  $\ln W(t)$ . Для функции, заданной дискретными значениями, получим  $n - 1$  точек ее производной

$$j := 0..n-1 \quad \alpha_j := \frac{\text{Ln}W_{j+1} - \text{Ln}W_j}{\text{Years}_{j+1} - \text{Years}_j}$$

Прологарифмируем значения  $\alpha_j$  и запишем их в табл. 5.4.

$$\text{Years}\alpha_j := \text{Years}_j \quad \text{Ln}\alpha_j := \ln(\alpha_j)$$

(значений  $\alpha$  на единицу меньше, чем значений  $W$ )

Таблица 5.4

### Значения $\alpha$ и логарифмы $\alpha$

$(t_i - t_0)$	0	5	10	15	20	25
$\alpha_t$	0,11	0,076	0,068	0,044	0,035	0,022
$\ln\alpha_t$	-2,208	-2,577	-2,693	-3,125	-3,339	-3,804

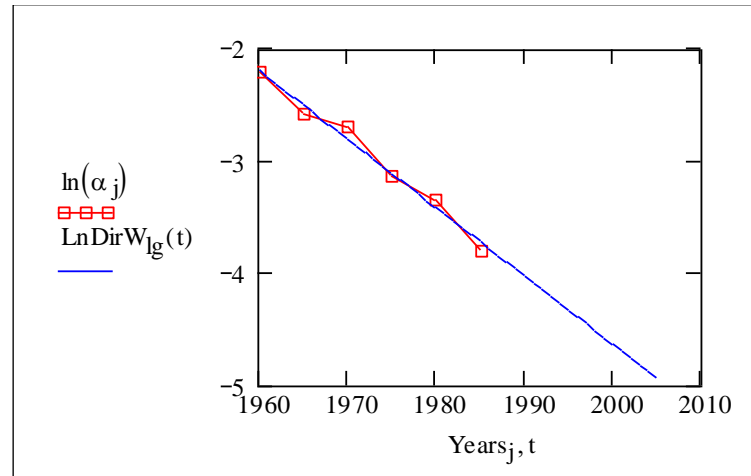
$$\gamma := \text{slope}(\text{Years}\alpha - t_0, \text{Ln}\alpha) \quad \gamma = -0.061$$

$$\text{Ln}\alpha_0 := \text{intercept}(\text{Years}\alpha - t_0, \text{Ln}\alpha) \quad \text{Ln}\alpha_0 = -2.193$$

$$\text{LnDirW}_{\text{Ig}}(t) := \text{Ln}\alpha_0 + \gamma \cdot (t - t_0)$$

Построим график логарифма производной от энергии  $W$  (квадратиками обозначены дискретные значения из табл. 5.4). На графике показано, как ломаная кривая дискретных значений аппроксимируется прямой линией.

t := 1960 .. 2005



Запишем функции для логистической модели:

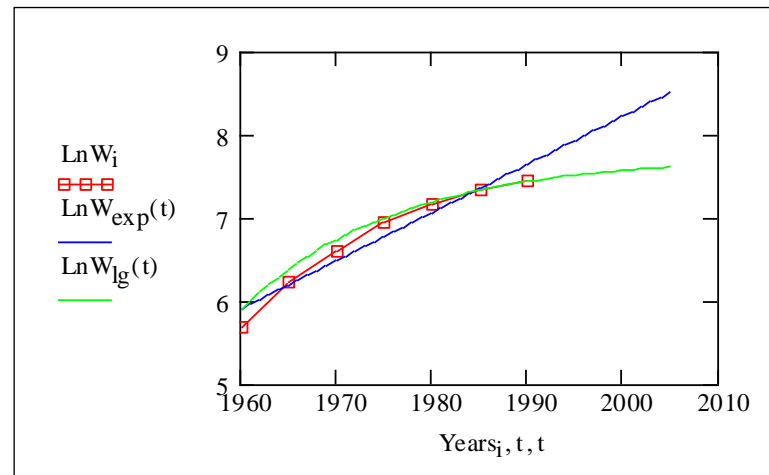
$$\alpha_0 := e^{\text{Ln}\alpha_0} \quad \alpha_0 = 0.112$$

С учетом знака минус  $\gamma$ :

$$\text{Ln}W_{\text{lg}}(t) := \text{Ln}W_0 + \frac{\alpha_0}{\gamma} \cdot [\exp[\gamma \cdot (t - t_0)] - 1]$$

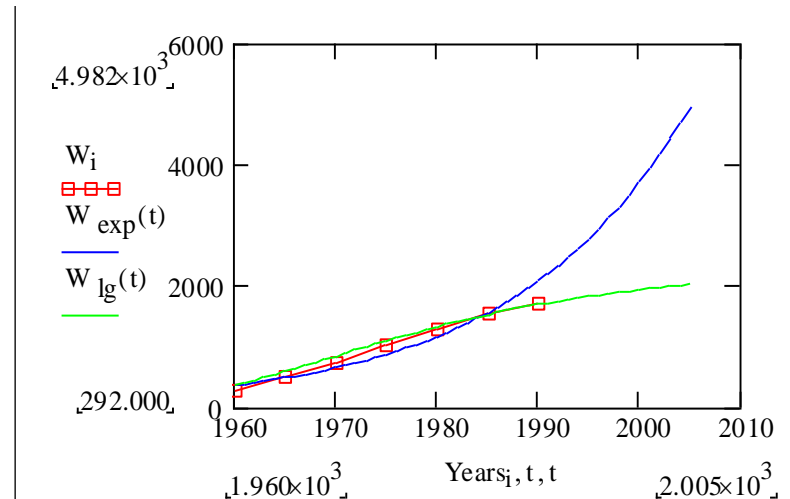
$$W_{\text{lg}}(t) := W_0 \cdot \exp\left[\frac{\alpha_0}{\gamma} \cdot [\exp[\gamma \cdot (t - t_0)] - 1]\right]$$

Построим графики логарифмов экспоненциальной и логистической модели:



На графике видно, что логистическая зависимость дает более точные совпадения с экспериментальными данными.

Построим графики самих математических моделей:



В системе Mathcad имеются специальные функции проведения регрессии для некоторых наиболее распространенных моделей, в том числе для экспоненциальной и логистической модели:

$\text{expfit}(vx, vy, vg)$  – возвращает вектор, содержащий коэффициенты  $(a, b$  и  $c)$  аппроксимирующего выражения экспоненциальной модели вида  $y = ae^{bx+c}$ , график которого лучшим образом приближается к точкам, координаты которых хранятся в векторах  $vx$  и  $vy$  (вектор  $vg$  содержит первое приближение к решению);

$\text{lgfit}(vx, vy, vg)$  – возвращает вектор, содержащий коэффициенты  $(a, b$  и  $c)$  аппроксимирующего выражения логистической модели вида  $y = \frac{a}{(1+be^{-cx})}$ , график которого лучшим образом приближается к точкам, координаты которых хранятся в векторах  $vx$  и  $vy$  (вектор  $vg$  содержит первое приближение к решению).

Выполним моделирование по указанным функциям.

Экспоненциальная модель 2

$$C := \begin{pmatrix} 366 \\ 0.051 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_e \\ b_e \\ c_e \end{pmatrix} := \text{expfit}(Y, W, C) \quad \begin{pmatrix} a_e \\ b_e \\ c_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.063 \times 10^4 \\ 2.316 \times 10^{-3} \\ -2.034 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$W_{\text{exp2}}(t) := a_e \cdot e^{b_e \cdot (t - t_0)} + c_e$$

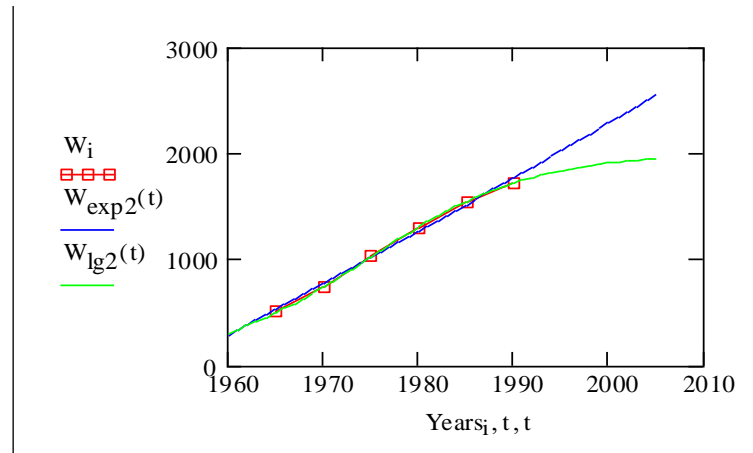
## Логистическая модель 2

$$C := \begin{pmatrix} 2000 \\ 20 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} := \text{lgsfit}(Y, W, C) \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2007.10 \\ 5.49 \\ 0.12 \end{pmatrix}$$

$$W_{\text{lg2}}(t) := \frac{a_1}{\left[ 1 + b_1 \cdot \exp[-c_1 \cdot (t - t_0)] \right]}$$

## Графические построения по обеим моделям

$$i := 1 .. n \quad t := 1960 .. 2005$$



В системе Mathcad есть функция линейного алгебраического предсказания predict. Она применяется для гладких и периодических функций и является разновидностью экстраполяции.

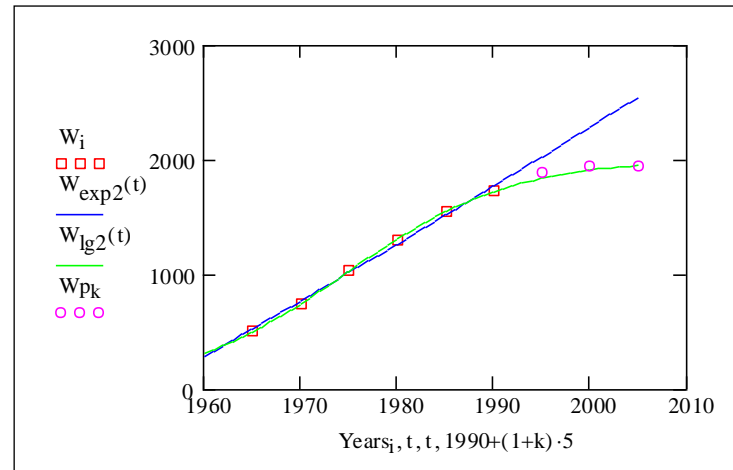
$\text{predict}(v, m, n)$  – возвращает  $n$  предсказанных значений, основанных на  $m$  последовательных значениях вектора данных  $v$ .  $v$  – представляет собой вектор равномерно расположенных данных (через равные интервалы по аргументу).

Функция predict использует последние  $m$  исходных значений данных, чтобы вычислить коэффициенты предсказания. Как только это сделано, она использует последние  $m$  точек, чтобы предсказать координаты  $m + 1$ -й точки, фактически создавая скользящее окно шириной в  $m$  точек.

Выполним прогноз выработки электроэнергии с помощью этой функции:

$$\begin{array}{l}
 W_p := \text{predict}(W, 6, 3) \quad n = 6 \quad W_p = \begin{pmatrix} 1.886 \times 10^3 \\ 1.938 \times 10^3 \\ 1.939 \times 10^3 \end{pmatrix} \\
 k := 0..2
 \end{array}$$

# Графическая сравнительная иллюстрация моделей из инструментальных средств Mathcad.



Оценка погрешностей моделей и численные значения прогноза на 2000 и 2005 годы.

$$\xi := \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (W_j - W_{\text{exp}}(\text{Years}_j))^2}{n}} \quad \xi = 173.498 \quad \begin{array}{l} W_{\text{exp}}(2000) = 3727.798 \\ W_{\text{exp}}(2005) = 4981.876 \end{array}$$

$$\varepsilon := \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (W_j - W_{\text{lg}}(\text{Years}_j))^2}{n}} \quad \varepsilon = 63.029 \quad \begin{array}{l} W_{\text{lg}}(2000) = 1939.330 \\ W_{\text{lg}}(2005) = 2021.827 \end{array}$$

$$\xi_2 := \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (W_j - W_{\text{exp2}}(\text{Years}_j))^2}{n}} \quad \xi_2 = 29.907 \quad \begin{array}{l} W_{\text{exp2}}(2000) = 2287.455 \\ W_{\text{exp2}}(2005) = 2551.096 \end{array}$$

$$\varepsilon_2 := \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (W_j - W_{\text{lg2}}(\text{Years}_j))^2}{n}} \quad \varepsilon_2 = 9.739 \quad \begin{array}{l} W_{\text{lg2}}(2000) = 1907.947 \\ W_{\text{lg2}}(2005) = 1950.490 \end{array}$$

## 5.5. Прогнозирование случайных процессов

Прогнозирование случайных процессов использует статистические характеристики процессов, такие как математическое ожидание  $M[X(t)]$  и ковариационная функция  $R_X(\tau)$ . Особое значение имеет время, в течение которого между сечениями случайного процесса сохраняется статистическая связь –  $\tau_0$ .

Иногда  $\tau_0$  – это половина ширины основания прямоугольника единичной высоты, площадь которого равна площади под кривой модуля  $r_X(\tau)$  – корреляционной функции случайного процесса:

$$\tau_0 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |r_X(\tau)| d\tau. \quad (5.43)$$

Если  $\tau_0 = 0$ , то процесс представляет собой «белый шум».

Для тепловой электростанции можно оценить время  $\tau_0$  некоторых процессов:

- флуктуация яркости факела в топке – доли секунды;
- температура перегретого пара – минуты;
- нагрузка генератора и расход топлива – десятки минут;
- теплотворная способность твердого топлива – десятки суток.

Время  $\tau_0$  называют еще интервалом корреляции процесса.

Ошибка прогноза есть разница действительного и прогнозного значений процесса:

$$e(\theta) = X(t_0 + \theta) - \hat{X}(t_0 + \theta). \quad (5.44)$$

Дисперсия ошибки прогноза может быть получена как математическое ожидание квадрата ошибки процесса, так как математическое ожидание стационарного случайного процесса неизменно во времени:

$$\sigma_e^2(\theta) = M \left\{ \left[ X(t_0 + \theta) - \hat{X}(t_0 + \theta) \right]^2 \right\}, \quad (5.45)$$

где  $t_0$  – момент времени, в который выполняется прогноз;

$\theta$  – время упреждения;

$X(t_0 + \theta)$  – истинное значение процесса на момент прогноза;

$\hat{X}(t_0 + \theta)$  – прогнозное значение.

Существует три основных метода прогнозирования случайного процесса:

- по последнему значению,
- по математическому ожиданию,
- по условному математическому ожиданию (статистический прогноз).

*Прогноз по последнему значению*

Прогнозное значение принимается равным последнему значению

$$\hat{X}(t_0 + \theta) = X(t_0). \quad (5.46)$$

Ошибка прогноза

$$e(\theta) = X(t_0 + \theta) - X(t_0). \quad (5.47)$$

Дисперсия ошибки

$$\begin{aligned} \sigma_e^2 &= M \left\{ [X(t_0 + \theta) - X(t_0)]^2 \right\} = \\ &= \sigma_X^2 - 2R_X(\theta) + \sigma_X^2 = 2[\sigma_X^2 - R_X(\theta)]. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Дисперсия ошибки растет от 0 при  $\theta = 0$  до удвоенной дисперсии процесса при  $\theta \rightarrow \infty$ , но на отдельных, близких к начальному моменту времени интервалах, может превышать

удвоенную дисперсию процесса, что объясняется возможной отрицательной корреляцией сечений процесса.

### *Прогноз по математическому ожиданию*

Прогнозное значение принимается равным математическому ожиданию процесса

$$\hat{X}(t_0 + \theta) = m_X. \quad (5.49)$$

Ошибка прогноза равна

$$e(\theta) = X(t_0 + \theta) - m_X. \quad (5.50)$$

Дисперсия ошибки

$$\sigma_e^2 = M \{ [X(t_0 + \theta) - m_X]^2 \} = \sigma_X^2. \quad (5.51)$$

### *Статистический прогноз*

В качестве прогнозного значения берется условное математическое ожидание процесса в сечении на момент времени  $t_0 + \theta$ .

Обозначим случайный процесс в сечении на момент времени  $t_0$  через  $X$ , а в момент времени  $t_0 + \theta$  через  $Y$  и рассмотрим их как систему двух случайных величин  $(X, Y)$ . Таким образом,

$$\hat{X}(t_0 + \theta) = m_{Y/X}. \quad (5.52)$$

Ошибка прогноза

$$e(\theta) = X(t_0 + \theta) - m_{Y/X}. \quad (5.53)$$

Дисперсия ошибки есть условная дисперсия случайной величины  $Y$ :

$$\sigma_e^2 = M \{ [Y - m_{Y/X}]^2 \} = \sigma_{Y/X}^2. \quad (5.54)$$

Условное математическое ожидание случайной величины  $Y$ :

$$m_{Y/X} = m_Y + r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - m_X), \quad (5.55)$$

где  $r_{X,Y}$  – коэффициент корреляции между случайными величинами  $X$  и  $Y$ ;  
 $m_X$  и  $m_Y$  – безусловные математические ожидания случайных величин  $X$  и  $Y$ ;  
 $\sigma_X$  и  $\sigma_Y$  – среднеквадратические отклонения случайных величин  $X$  и  $Y$ .

Таким образом, с учетом  $m_X = m_Y = m$  и  $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$  имеем прогнозное значение

$$\hat{X}(t_0 + \theta) = m + r_X(\theta) [X(t_0) - m] \quad (5.56)$$

и дисперсию ошибки прогноза

$$\sigma_e^2 = \sigma^2 [1 - r_X^2(\theta)], \quad (5.57)$$

где  $\sigma = \sigma_X$  – среднеквадратическое отклонение процесса.

### *Сопоставление методов прогноза*

Сравнивая методы прогноза, можно сделать следующие заключения.

- Прогнозное значение не зависит от времени упреждения для первого и второго методов.
- Ошибка прогноза в методе по последнему значению в сильной мере зависит от времени упреждения. При малом  $\theta$  дисперсия ошибки невелика (рис. 5.16, кривая 1), но с ростом  $\theta$  стремится к удвоенному значению дисперсии процесса и при отрицательной корреляции между сечениями процесс может превышать удвоенное значение дисперсии процесса.

Поэтому первый метод хорошо использовать для прогнозирования на малые периоды времени.

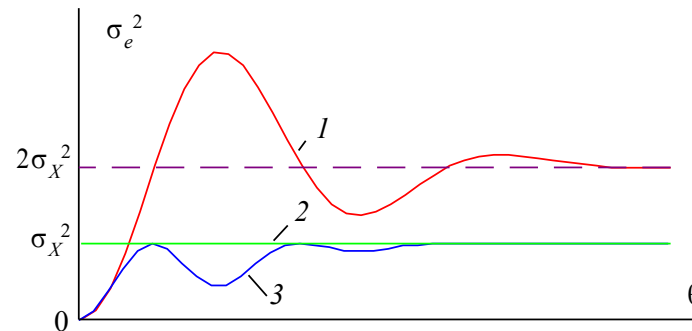


Рис. 5.16. Погрешности трех методов прогноза

• Третий, статистический, метод при малом времени упреждения приближается к методу по последнему значению (рис. 5.16, кривая 3), а с ростом  $\theta$  имеет наименьшую погрешность из всех рассмотренных методов. С ослаблением статистической связи между сечениями процесса ошибка статистического прогноза приближается к ошибке метода по математическому ожиданию (рис. 5.16, кривая 2). Поэтому для краткосрочного и долгосрочного прогноза случайная составляющая процесса никак не влияет на прогноз.

**Пример 2.** Вычислить значение стационарного случайного процесса через 3 с после регистрации последнего значения, если известно значение процесса на момент регистрации (текущее значение) и его характеристики: математическое ожидание, дисперсия и ковариационная функция, заданная аналитическим выражением  $R_X(\tau) = D_X e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau$ . Для прогноза использовать все три метода: по последнему значению, по математическому ожиданию и статистический метод.

Расчеты выполним в системе Mathcad.

## ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

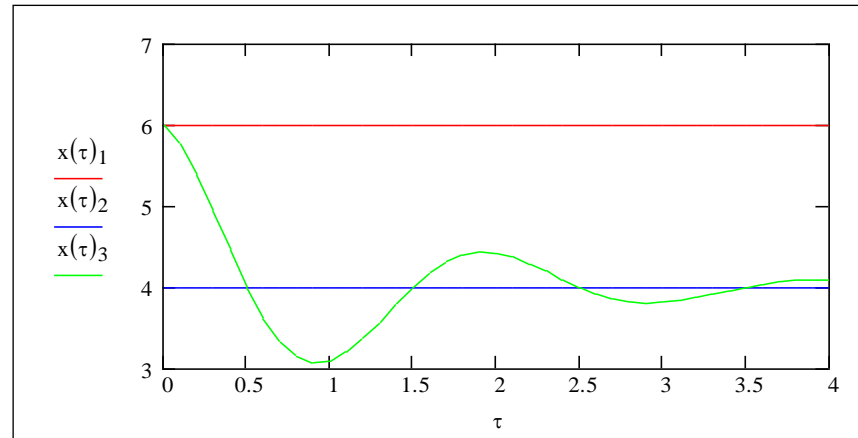
$\tau := 0, 0.1 \dots 4$	$\alpha := \frac{\pi}{4}$	$\beta := \pi$
$x_{t0} := 6$	$m_x := 4$	$D_x := 3$

## ВЫЧИСЛЕНИЯ

Определение функций прогноза и прогнозные значения по всем трем методам:

$$x(\tau) := \begin{bmatrix} x_{t0} \\ m_x \\ m_x + \exp(-\alpha \cdot |\tau|) \cdot \cos(\beta \cdot \tau) \cdot (x_{t0} - m_x) \end{bmatrix} \quad x(5) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3.961 \end{pmatrix}$$

Графики функций прогноза:



Функции дисперсий ошибок прогноза по трем методам и значения дисперсий ошибок со временем упреждения 3 с:

$$D(\tau) := \begin{bmatrix} 2 \cdot (D_x - D_x \cdot \exp(-\alpha \cdot |\tau|) \cdot \cos(\beta \cdot \tau)) \\ D_x \\ D_x \cdot [1 - (\exp(-\alpha \cdot |\tau|) \cdot \cos(\beta \cdot \tau))^2] \end{bmatrix} \quad D(3) = \begin{pmatrix} 6.569 \\ 3 \\ 2.973 \end{pmatrix}$$

## 5.6. Прогнозирование суточных графиков нагрузки

Оперативный прогноз суточных графиков нагрузки энергосистемы выполняется на следующие сутки и на несколько суток вперед. На режим потребления электрической энергии огромное влияние оказывают состав потребителей ЭЭС, продолжительность рабочей недели (количество смен в сутки), степень загрузки смен промышленных предприятий, метеорологические факторы, а также некоторые другие.

Существенное значение в составе нагрузки имеет соотношение между промышленными потребителями и коммунально-бытовым сектором (рис. 5.17).

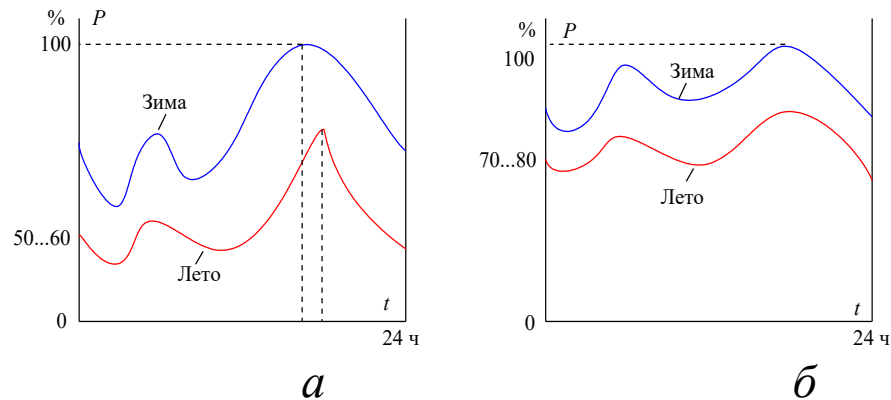


Рис. 5.17. Суточные графики нагрузки:

*а* – со значительной составляющей бытовой нагрузки; *б* – с преобладанием промышленной нагрузки

Если система имеет значительную бытовую нагрузку, то вечерний максимум значительно больше утреннего (рис. 5.17, *а*). Эта разница особенно заметна в летнее время. Летом

максимум наступает намного позже, чем зимний. Летом максимум – пикообразный, а зимой – пологий. Минимальная нагрузка составляет 50...60 % от максимальной нагрузки.

В энергосистемах с преобладанием промышленной нагрузки имеется два явно выраженных максимума: утренний и вечерний (рис. 5.17, б). Суточный график таких систем более ровный, и минимальная нагрузка составляет 70...80 % от максимальной. В некоторых энергосистемах нагрузка утреннего максимума может быть больше, чем вечернего.

Характер суточного графика нагрузки зависит от освещенности и температуры воздуха (рис. 5.18). При малой освещенности в дневное время нагрузка возрастает и утренний пик становится более продолжительным (рис. 5.18, а). При низкой температуре воздуха нагрузка также возрастает, особенно днем (рис. 5.18, б).

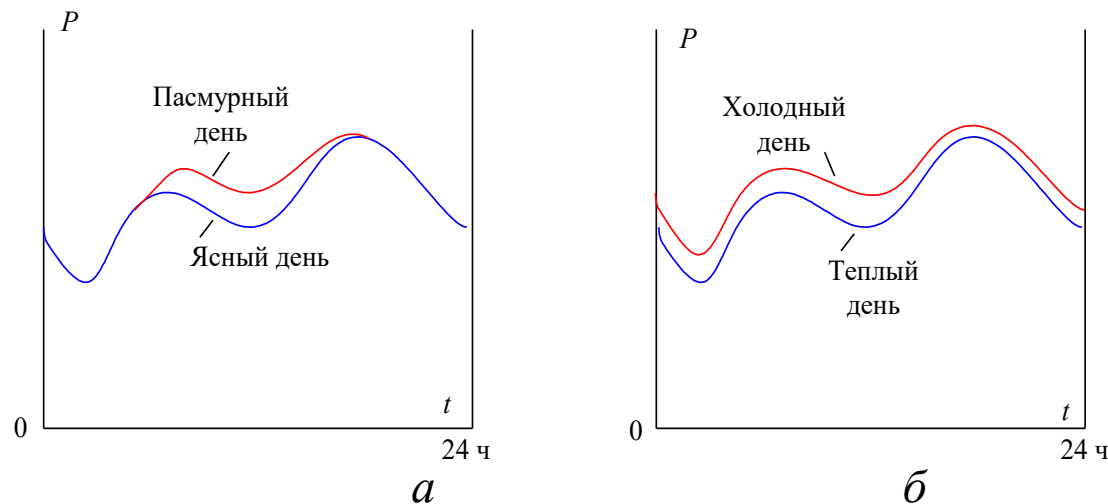


Рис. 5.18. Суточные графики нагрузки:  
а – при разной освещенности; б – при разной температуре

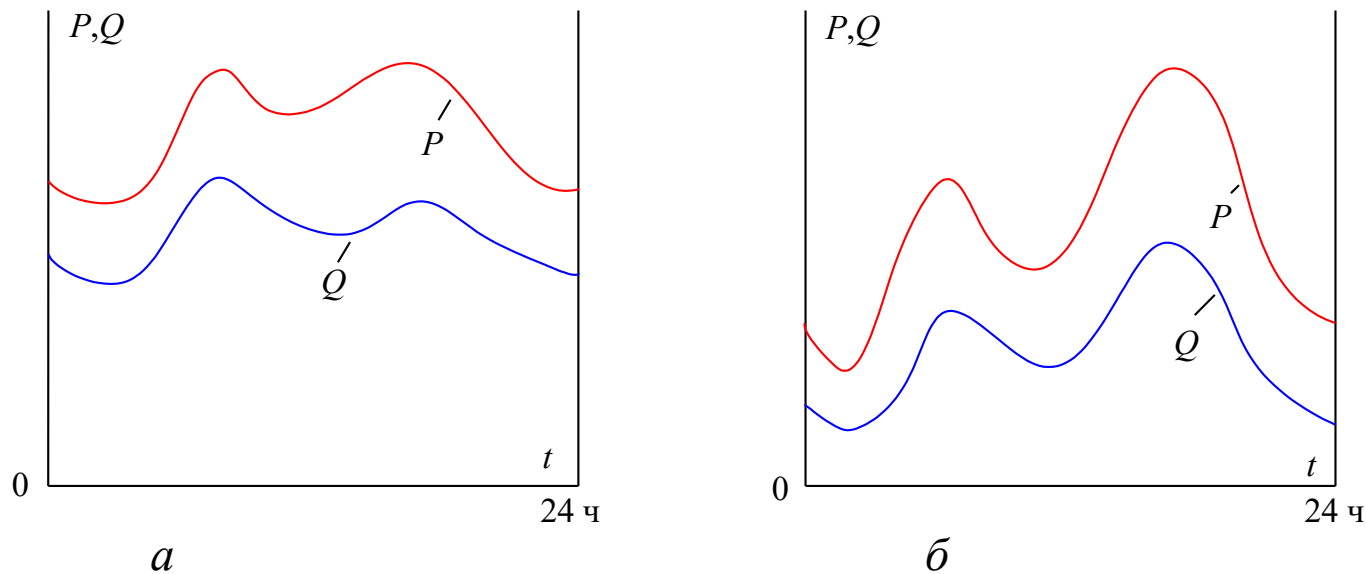
Наиболее важные графики нагрузки – в период зимнего максимума и летнего минимума, когда следует заботиться о достаточном резерве мощности и соответственно иметь маневренные станции с малым технологическим минимумом. В настоящее время соотношение нагрузок в ЭЭС составляет 0,5...0,8.

Суточные графики реактивной мощности ЭЭС в основном определяются потреблением реактивной мощности асинхронными двигателями (примерно 70 % все потребляемой реактивной мощности) и потерями в трансформаторах (около 20 %). На суммарные суточные графики реактивной нагрузки ЭЭС влияют режимы работы линий напряжением 220 кВ и выше, а также общий уровень компенсации реактивной мощности в системе.

На рис. 5.19 показаны суточные графики активной и реактивной нагрузки для двух энергосистем: с преобладанием промышленной нагрузки (рис. 5.19, а) и с преобладанием бытовой нагрузки (рис. 5.19, б).

Системы имеют примерно одинаковые активные нагрузки в утренний и вечерний максимум, но в первой системе утренний максимум реактивной мощности выше вечернего, что объясняется преобладанием в составе нагрузки асинхронных двигателей. Во втором случае вечерняя активная нагрузка выше утренней и вечерний максимум реактивной мощности больше утреннего.

Оперативное прогнозирование суточных графиков нагрузки рабочего дня ЭЭС производится на основании графика предыдущего дня, графика соответствующего дня предыдущей недели и прогноза по-годы.



*Рис. 5.19.* Суточные графики активной и реактивной мощности в ЭЭС:

*а* – с преобладанием промышленной нагрузки; *б* – с преобладанием бытовой нагрузки

Графики нагрузки выходных дней (суббота, воскресенье), а также послевыходного дня (понедельник) существенно отличаются от графиков обычных выходных дней (рис. 5.20). Они составляются на основании графиков предыдущих выходных и послевыходных дней, прогноза погоды и других влияющих факторов. Погрешность прогноза обычно составляет 2...3 %.



*Рис. 5.20.* Недельный график мощности нагрузки ЕЭС РФ

Для суточного графика нагрузки различают следующие показатели:

- максимум активной и реактивной нагрузок  $P_{\max}$  и  $Q_{\max}$ ;
- коэффициент мощности максимума нагрузки  $\cos \varphi_{\max}$ ;
- суточный расход активной и реактивной энергии  $W_{a.сут}$  и  $W_{p.сут}$ ;
- средневзвешенный за сутки коэффициент реактивной мощности

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{сут}} = \frac{W_{p.сут}}{W_{a.сут}};$$

- коэффициенты заполнения суточного графика активной и реактивной энергии

$$\beta_a = \frac{W_{a.сут}}{24P_{\max}}, \quad \beta_p = \frac{W_{p.сут}}{24Q_{\max}}.$$

Эти показатели полезно иметь как при эксплуатации (оперативный и краткосрочный прогноз), так и при проектировании (долгосрочный прогноз) ЭЭС.

При проектировании ЭЭС суточные графики нагрузок позволяют правильно выбрать суммарную установленную мощность новых электрических станций и их состав.

При прогнозировании суточных графиков нагрузки в проектной постановке используются в основном два подхода: *статистический* и *синтетический*.

Статистический подход основан на экстраполяции графиков нагрузки прошлых лет.

Для сопоставимости суточных графиков за разные годы часовые нагрузки представляются в относительных единицах.

Для каждого характерного дня недели каждого месяца строится столько графиков, сколько лет рассматривается.

Вначале прогнозируется форма графика – график в относительных единицах. Затем отдельно рост средней суточной мощности. После этого получается график нагрузки в именованных единицах.

При синтетическом подходе анализируется структура электропотребления каждой группы потребителей и посредством суммирования нагрузок по отдельным группам получается суммарный график ЭЭС.

## 5.7. Анализ временных рядов

Графики нагрузки в ЭЭС являются последовательностями наблюдений или расчетных значений, показывающих изменения мощности в течение определенного периода времени. В суточных, недельных и годовых графиках отображается периодичность процесса изменения мощности нагрузки, связанная с режимом работы людей, сменой дня и ночи, недельными циклами и сезонными изменениями в течение года.

Суточные графики дней недели в общем повторяются изо дня в день с небольшими случайными различиями и режимами выходных и праздничных дней. Средний рост или снижение нагрузки в течение недели или нескольких недель связан с сезонными изменениями, в особенности в осенний и весенний периоды. Такие изменения, происходящие в среднем, относят к трендовым (непериодическим) составляющим графика нагрузки. Эти изменения для годовых графиков обусловлены естественным ростом нагрузки потребителей.

Суточные, недельные и годовые графики нагрузки часто прогнозируют посредством разделения их на трендовую, периодическую и случайную составляющие:

$$X(t) = Q(t) + S(t) + U(t), \quad (5.58)$$

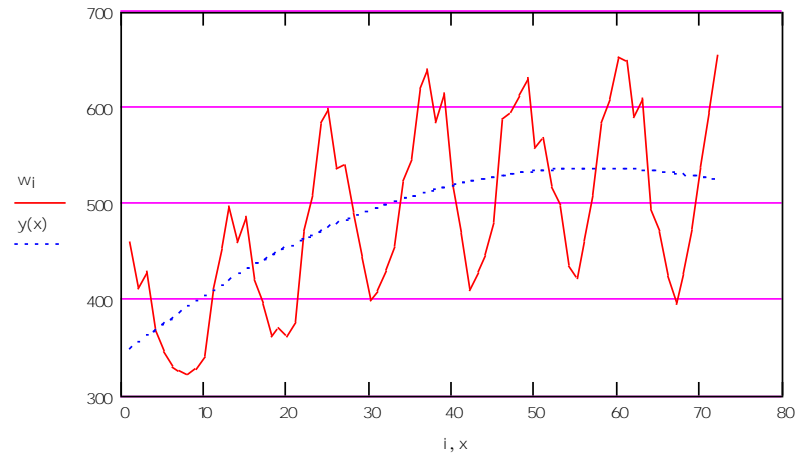
где  $Q(t)$  – тренд – устойчивые систематические изменения;

$S(t)$  – периодическая составляющая – колебания относительно тренда;

$U(t)$  – нерегулярная составляющая – случайный шум.

Подобный подход справедлив, если принять гипотезу о том, что резких изменений во временном ряду не произойдет.

Пусть имеется временной ряд значений месячных максимумов мощности нагрузки за несколько лет (рис. 5.21).



*Рис. 5.21.* Ретроспектива временного ряда

Для выделения трендовой составляющей часто используют полиномиальную модель до третьего порядка включительно:

$$\begin{aligned}
 Q_0(t) &= a_0, \\
 Q_1(t) &= a_0 + a_1t, \\
 Q_2(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2, \\
 Q_3(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3.
 \end{aligned}
 \tag{5.59}$$

Иногда при выделении тренда предварительно применяют процедуру сглаживания, которая устраняет периодическую и случайную составляющие.

После вычитания из  $X(t)$  трендовой составляющей получается временной ряд, имеющий периодическую составляющую, которая вызвана суточными, недельными и сезонными периодами.

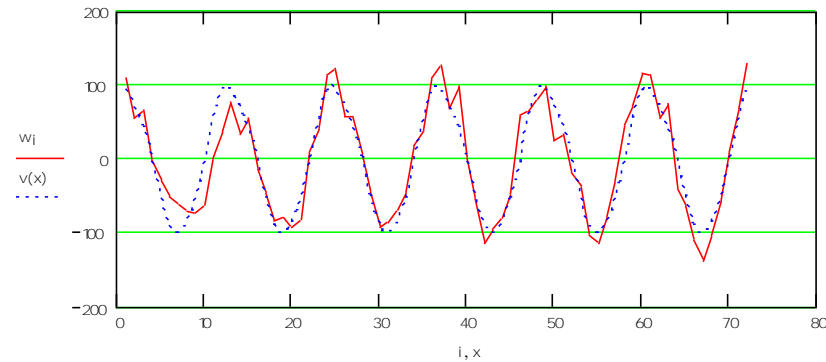


Рис. 5.22. Временной ряд без трендовой составляющей

Если имеется  $N$  результатов наблюдений за период  $T$  ( $N = 12$  в годовом цикле,  $N = 7$  – в недельном и  $N = 24$  – в суточном), то периодическая модель процесса может быть представлена рядом Фурье

$$S(t) = \sum_{k=1}^n (a_k \cos 2\pi f_1 k t + b_k \sin 2\pi f_1 k t), \quad (5.60)$$

где  $n$  – количество частот, включенных в модель.

В общем случае наивысшая частота гармонического разложения дискретного ряда, называемая частотой Найквиста, определяется половиной интервала между наблюдениями, например при  $N = 12$ ,  $n = 24$ .

$f_1 = \frac{1}{N}$  – основная частота гармонического ряда.

Дисперсия, учитываемая  $i$ -й гармоникой:

$$D_i = \frac{a_i^2 + b_i^2}{2}. \quad (5.61)$$

Суммарная дисперсия  $D_{\Sigma} = \sum_i D_i$ . Как правило, первые три гармоники описывают до 90 % всей дисперсии.

Случайная составляющая

$$U(t) = X(t) - S(t) - S(t). \quad (5.62)$$

Для  $U(t)$  определяются статистические характеристики. Прогноз случайной составляющей ведется по одной из моделей прогноза случайного процесса. Сразу следует оценить интервал корреляции, и если прогноз ведется на время упреждения больше, чем интервал корреляции, то фактически по случайной составляющей оценивается лишь ошибка прогноза, так как после вычитания регулярных составляющих математическое ожидание процесса равно нулю.

*Оценка коэффициентов моделей регулярных составляющих*

Тренд

Оценка коэффициентов полиномиальной модели тренда может быть сделана разными способами:

1) с помощью функций Mathcad  $\mathbf{c} := \text{regress}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, m)$  и  $Q_m(t) := \text{interp}(\mathbf{c}, \mathbf{k}, \mathbf{P}, t)$ . Здесь  $\mathbf{c}$  – вектор коэффициентов, используемый функцией `interp`;  $\mathbf{k}$  – вектор дискретных моментов времени, для которых заданы значения ретроспективы;  $\mathbf{P}$  – вектор значений ретроспективы;  $m$  – порядок полинома (как 0, 1, 2 или 3);  $t$  – аргумент функции тренда. Можно также записать  $Q_m(t) = \text{interp}(\text{regress}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, m), \mathbf{k}, \mathbf{P}, t)$ ;

2) как решение системы линейных уравнений по методу наименьших квадратов  $\mathbf{A} = (\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{P}$ . Функция тренда:  $Q_m(t) = \sum_{i=0}^m A_i t^i$ . Здесь  $\mathbf{V}$  – матрица, первый столбец которой состоит из единиц, второй – вектор  $\mathbf{k}$ , третий вектор из элементов  $\mathbf{k}$  в квадрате и т. д.  $V_{i,j} = k_{ij-1}$  ( $i = 1 \dots n, j = 1 \dots m + 1$ ), где  $n$  – количество данных ретроспективы.

Экспоненциальная модель тренда может быть получена с помощью функции  $\text{expfit}(\mathbf{k}, \mathbf{P}, \mathbf{v}g)$ , которая возвращает вектор коэффициентов модели  $Q(t) = ae^{bt} + c$ . Здесь вектор  $\mathbf{v}g$  – начальные приближения для искомым коэффициентов модели.

Периодическая составляющая

Коэффициенты полигармонической составляющей процесса являются коэффициентами гармонического полинома вида (5.60). Вектор коэффициентов модели получается как решение системы линейных уравнений  $\mathbf{W} = (\mathbf{V}^T \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{W}$ . Здесь  $\mathbf{V}$  – матрица из  $n$  строк и  $2m$  столбцов;  $n$  – количество данных ретроспективы;  $m$  – количество частот, включенных в модель. Каждая последовательная пара столбцов матрицы  $\mathbf{V}$  соответствует одной частоте и состоит из коэффициентов, вычисляемых как функции косинуса и синуса из выражения (5.60):

$$V_{i,2j-1} = \cos\left(2\pi i \frac{j}{N}\right); \quad V_{i,2j} = \sin\left(2\pi i \frac{j}{N}\right) \quad i=1..n; \quad j=1..m, \quad (5.63)$$

$\mathbf{W}$  – вектор, полученный из  $\mathbf{P}$  вычитанием трендовой составляющей.

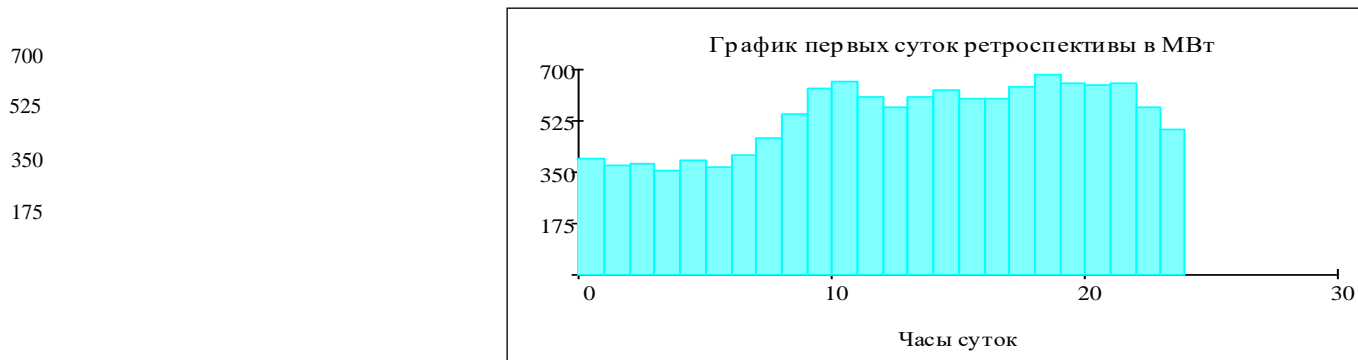
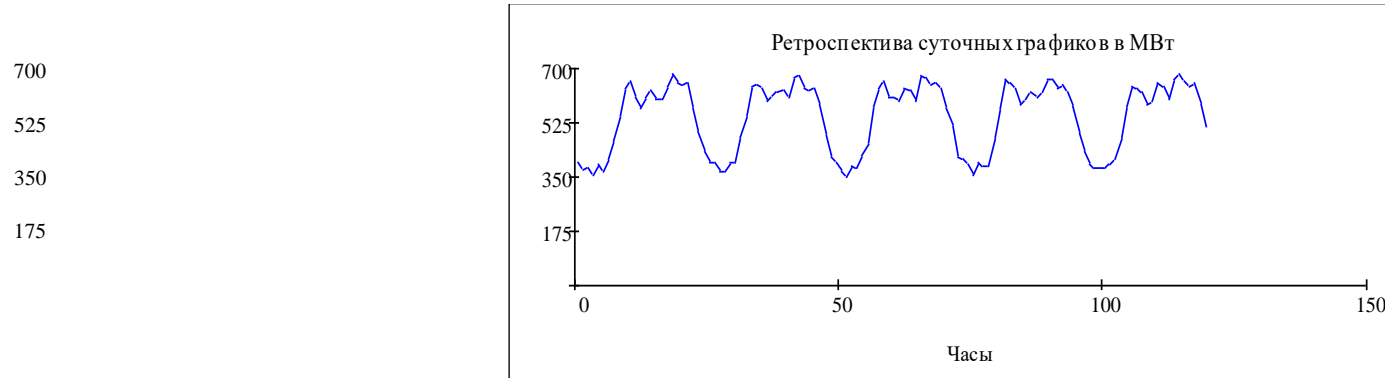
Возможно моделирование периодической составляющей с помощью другого представления ряда Фурье:

$$S(t) = \sum_{i=1}^m X_i \cos(2\pi f_i t - \theta_i), \quad (5.64)$$

где искомыми параметрами являются  $X_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ ,  $\theta_i = \arctg\left(\frac{b_i}{a_i}\right)$ .

## Пример. Чтение данных из файла Retro.prn

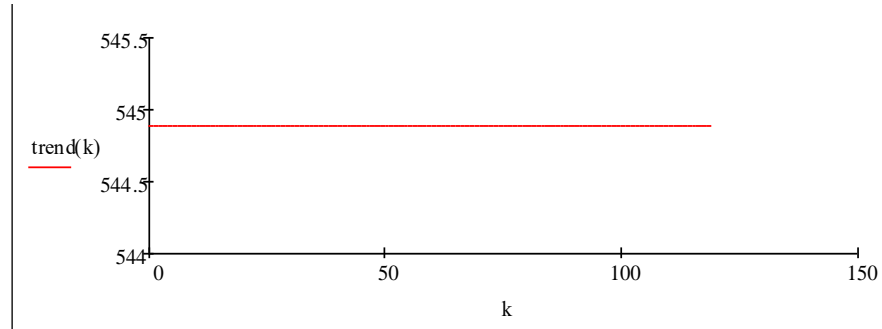
```
P := READPRN("Retro.prn")  
k := 0.. 119          i := 0.. 23
```



Представим тренд постоянной функцией, равной среднему значению за 5 суток

```
trend(x) := mean(P)
```

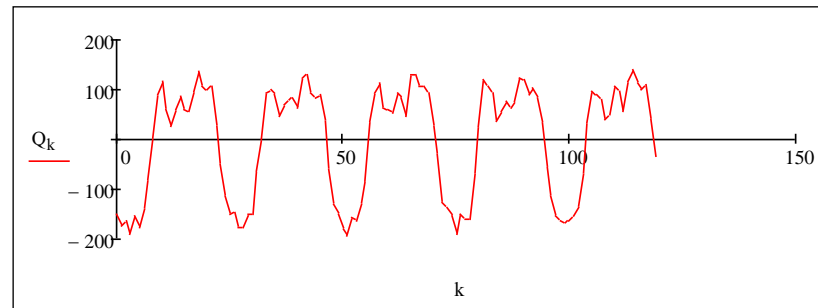
545.5  
545  
544.5  
544



### Остаточный временной ряд без тренда

$$Q_k := P_k - \text{trend}(k)$$

200  
100  
-100  
-200



### Моделирование периодической составляющей – 6 гармоник:

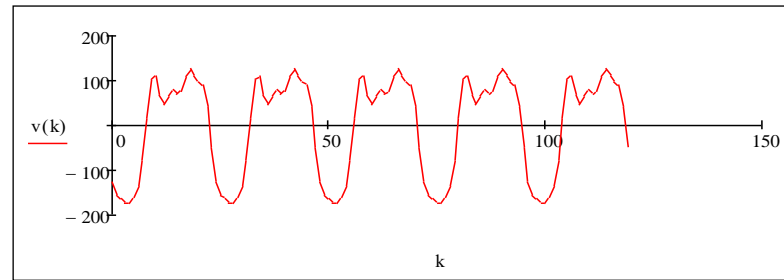
$$l := 0..5 \quad V_{k,2l} := \cos\left[2\pi \cdot \frac{k \cdot (l+1)}{24}\right] \quad V_{k,2l+1} := \sin\left[2\pi \cdot \frac{k \cdot (l+1)}{24}\right]$$

$$B := (V^T \cdot V)^{-1} \cdot V^T \cdot Q$$

$$v(x) := \sum_{j=0}^5 \left[ B_{2j} \cdot \cos\left[2\pi \cdot \frac{x(j+1)}{24}\right] + B_{2j+1} \cdot \sin\left[2\pi \cdot \frac{x(j+1)}{24}\right] \right]$$

Графическое изображение периодической составляющей:

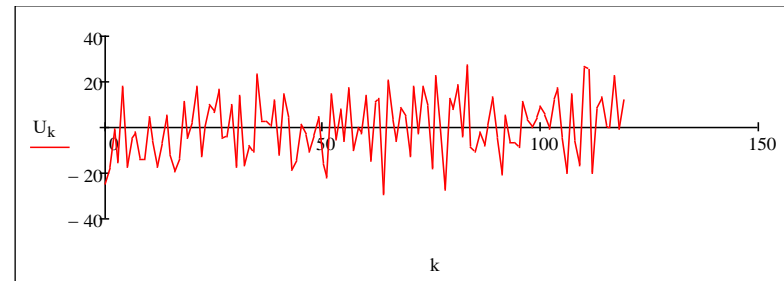
200  
100  
-100  
-200



Остаточный временной ряд без тренда и периодической составляющей – случайная составляющая:

$$U_k := Q_k - v(k)$$

40  
20  
-20  
-40



Определение статистических характеристик случайной составляющей временного ряда:  
среднее значение, медиана, среднеквадратическое отклонение:

$$\text{mean}(U) = -3.57 \times 10^{-14}$$

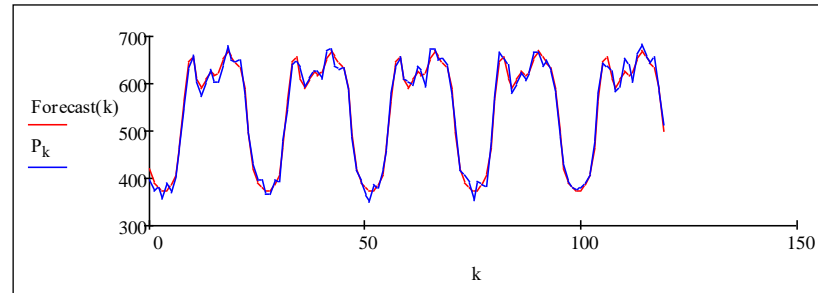
$$\text{median}(U) = -0.296$$

$$\text{stdev}(U) = 12.962$$

Прогнозируемый график есть сумма тренда и случайной составляющей:

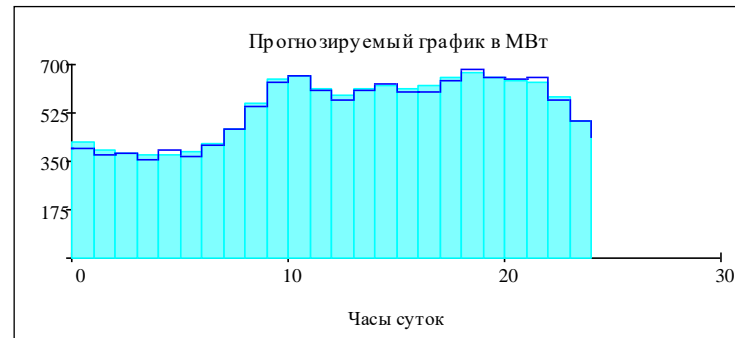
$$\text{Forecast}(x) := \text{trend}(x) + v(x)$$

700  
600  
500  
400  
300



j := 0..24

700  
525  
350  
175



За ошибку прогноза принимаем среднеквадратическое отклонение случайной составляющей временного ряда:

$$\text{stdev}(U) = 12.962$$

## *Вопросы для самопроверки*

1. Как подразделяются детерминированные физические процессы?
2. Как подразделяются случайные физические процессы?
3. Что такое прогноз?
4. Какие два вида переменных, зависящих от времени, выделяют при прогнозировании?
5. Как подразделяют прогноз по времени упреждения?
6. Дайте определение экспоненциальной модели прогнозирования.
7. В чем принципиальное различие логистической и экспоненциальной моделей прогнозирования?
8. Какие основные методы используют для прогнозирования случайных процессов?
9. Какие факторы влияют на прогноз суточных графиков нагрузки электроэнергетической системы?
10. В чем заключается прогноз графиков нагрузки методом анализа временных рядов?