НАО «Карагандинский технический университет имени Абылкаса Сагинова»

Кафедра АПП

МООК: **Математические задачи и компьютерное моделирование в электроэнергетике**

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

1.1. Решение задач и моделирование

1.2. Классификация моделей

Разработчик: PhD Югай В.В.

Караганда

План

1.1. Решение задач и моделирование

Любой материальный объект характеризуется бесчисленным множеством свойств, признаков и характеристик, но наши знания о материальном объекте конечны и относительны на любом этапе развития.

В процессе познания у человека (субъекта) формируется мысленный образ объекта, который обладает присущими этому объекту свойствами (цвет, запах, размеры, вес, изменчивость во времени и др.). Такой мысленный образ есть мысленная (идеальная) модель объекта (рис. 1.1).

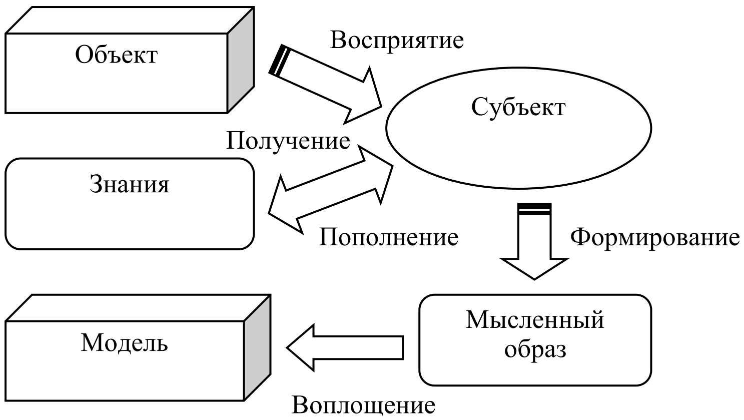

Рис. 1.1. Схема формирования модели

Познавательный процесс человека носит целенаправленный характер, а именно: во всех случаях субъект решает некоторую задачу для достижения своих целей. Задача выделяет из бесконечного множества свойств объекта конечную совокупность и дает возможность перейти к обозримому по своим масштабам «заместителю» объекта – модели. Задача – это фильтр, позволяющий отсеять из всей информации об объекте несущественную.

Таким образом, задача определяет характер формируемой модели.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Сконструируем трансформатор заданной мощности с возможным диапазоном изменения напряжений на первичной и вторичной обмотках. В качестве ограничений учтем требования по допустимым потерям холостого хода и работе на линейной части характеристики намагничивания сердечника и габаритам трансформатора.

В этом случае необходимо учитывать электрические, магнитные, конструктивные, геометрические, тепловые свойства трансформатора.

Вводить понятие модели без четкого указания задачи или задач неправомерно. Вне контекста задачи или класса задач понятие модели не имеет смысла.

Фундаментальным свойством модели является простота по отношению к объекту. Модель всегда «беднее» объекта в информационном отношении. «Точная модель» недоступна, как и сам оригинал.

Задача своими условиями и требованиями позволяет определить ограничения и допущения в построении любой модели.

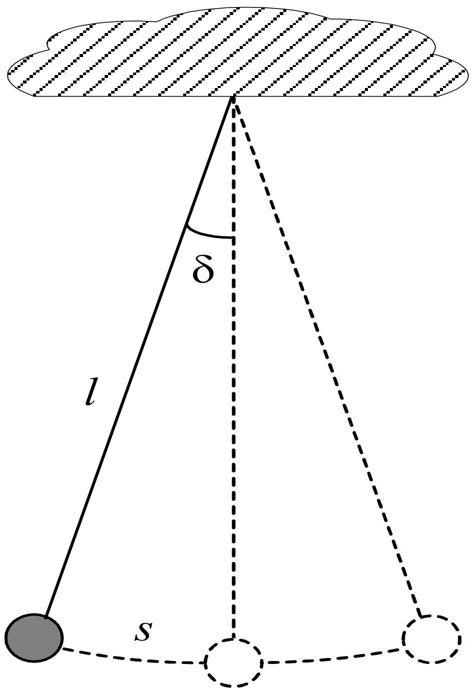

Рис. 1.2. Геометрическая модель маятника

Пример 2. Рассмотрим маятник – груз, подвешенный на нити. Модель (геометрическая) дана на рис. 1.2. Модель (математическая) движения маятника в общем является довольно сложным нелинейным дифференциальным уравнением, но при принятых допущениях, «дозволенных» задачей, это уравнение становится достаточно простым и легко решается. Перечислим допущения, которые принимаются при этом:

- размерами маятника пренебрегаем, и его масса сосредоточена в одной точке (пренебрегаем сопротивлением воздуха);
- растяжением нити пренебрегаем;
- массой нити пренебрегаем.

Вводится также ограничение: амплитуда колебаний пренебрежимо мала по сравнению с длиной нити.

При таких допущениях и ограничениях получается модель – математический маятник. Период малых колебаний математического маятника не зависит от массы маятника и амплитуды его колебаний. Уравнение движения маятника записывается в виде

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{l} s, \qquad (1.1)$$

где s – длина дуги, по которой маятник совершает движение; g – ускорение свободного падения; l – длина нити.

Как известно, наблюдения над колебаниями маятников используются для определения ускорения g силы тяжести в разных широтах Земного шара.

Человечество за свою жизнь накопило огромное количество теорий и законов. Это практически достоверное обобщенное описание объектов реального мира.

Иногда для решения частных задач вводятся еще большие ограничения и допущения, которые упрощают известные теории и законы. В этом случае появляются модели моделей, в которые переходят все допущения и ограничения исходных моделей.

1.2. Классификация моделей

Существуют разные способы классификации моделей:

- по классам задач;
- по области использования;
- по способу представления и др.

Из классов задач, по которым разделяют модели, можно назвать: анализ, синтез, конструирование, проектирование, управление, утилизация и т. п.

По области использования модели разделяют:

- учебные – наглядные пособия, различные тренажеры, обучающие программы;
- опытные – копии объектов, которые используются для исследования объекта и прогнозирования его характеристик в будущем;
- научно-технические, используемые для исследования процессов и явлений (различные стенды, моделирующие физические и природные явления);
- игровые – военные, экономические, спортивные и деловые игры;
- имитационные, которые моделируют с той или иной точностью работу объекта в различных условиях и, как правило, с учетом случайных факторов. Алгоритм (компьютерная программа), реализующий имитационную модель, воспроизводит процесс функционирования системы во времени, причем имитируются элементарные события, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательностью протекания во времени. Это позволяет по исходным данным получить сведения о состоянии процесса в определенные моменты времени, дающие возможность оценить характеристики системы. Примером имитационной модели может служить программа расчета аварийного переходного процесса в

электроэнергетической системе, когда во время протекания процесса имитируются события срабатывания различной автоматики и коммутации оборудования системы.

Способ представления модели – наиболее важный признак классификации моделей. Все модели можно разделить на две группы: материальные и идеальные (информационные). В свою очередь физические модели разделяют на физические, аналоговые и геометрически подобные (макеты) (рис. 1.3).

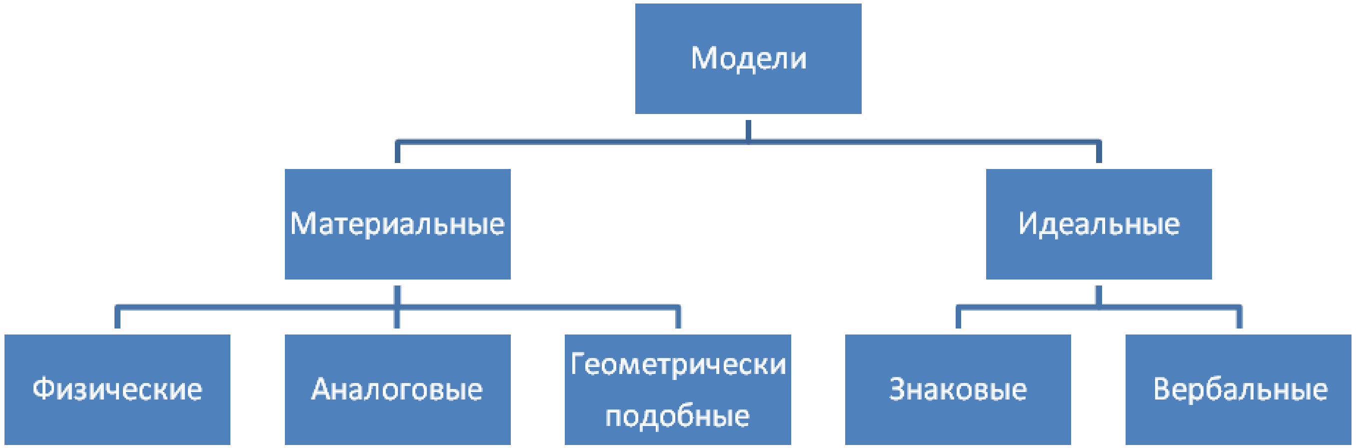

Рис. 1.3. Классификация моделей по способу представления

Физические модели имеют ту же природу, что и моделируемые объекты. Это, как правило, уменьшенные копии объектов, сохраняющие его основные физические свойства. Так, например, работу гидравлической турбины можно исследовать на лабораторной установке, воспроизводящей в масштабе настоящую турбину. Исследование работы генератора электростанции также можно выполнить на малой электрической машине переменного тока. Модели автомобилей, судов, самолетов, луноходов и других машин, которые являются физическими моделями, помогают инженерам исследовать механические, тепловые, электрические, магнитные, химические и другие свойства различных машин.

Иногда исследования проводятся на моделях, которые имеют отличную от исходного объекта физическую природу. Так, механические свойства движения вращающегося объекта (вала) можно исследовать на электрической модели, и, наоборот, токи и напряжения электрической цепи можно моделировать с помощью сил и скоростей элементов механической системы. Такие модели называют аналоговыми. Получило развитие направление моделирования с помощью специальных аналоговых вычислительных машин (АВМ), в отличие от цифровых вычислительных машин (ЦВМ).

Многие физические и аналоговые модели исследуются в динамике, т. е. изменении их параметров и свойств во времени. Моделирование предусматривает масштабирование не только по переменным модели, но и по времени; таким образом, процессы, протекающие в моделях, воспроизводятся в замедленном или ускоренном движении.

Геометрически подобные модели – это макеты зданий, сооружений и природных объектов. Они изготавливаются для решения учебных, архитектурных, экологических и инженерных задач.

Идеальные модели носят информационный характер. Они возникают и строятся в сознании людей и используются как любая информация. Можно сказать, что информация – это модель окружающего нас мира. Идеальные модели в зависимости от средств их изображения, передачи, хранения и использования подразделяются на знаковые и вербальные.

Знаковые модели используют какой-либо формализованный язык – литературный, математический, алгоритмический и др. Вербальными можно считать образные модели в сознании людей и передаваемые ими посредством разговорной речи.

Знаковые и вербальные модели взаимосвязаны. Мысленный образ, родившийся в мозгу человека, может быть облечен в знаковую форму, и, наоборот, знаковая модель позволяет сформировать в сознании верный мысленный образ.

Знаковые модели, записанные на каком-либо носителе (бумажном, магнитном, электрическом, оптическом и др.), передаются между людьми, обрабатываются на компьютерах и сохраняются для следующих поколений. В зависимости от этого можно выделить несколько видов знаковых моделей: дескриптивные, имитационные, алгоритмические, математические, базы данных и знаний.

Математическое представление об объекте должно согласовываться с возможностью дальнейшего анализа и исследования объекта по его математической модели. Каждый объект и система могут моделироваться на разных иерархических уровнях восприятия человеком окружающего мира. Принято разделять моделирование технических объектов по трем уровням: микро-, макро- и метауровень. На каждом из этих уровней применимы свои классы моделей, различающиеся главным образом представлением пространства и времени

1.3. Переменные в математических моделях

Переменные величины, входящие в математическую модель, различают по нескольким признакам.

По роли, которую переменные играют по отношению к объекту моделирования. На рис. 1.4 $\mathbf{X} = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$ – вектор входных переменных, $\mathbf{Y} = (y_1, y_2,\ldots, y_m)$ – вектор выходных переменных. В связи с разделением переменных на входные и выходные рассматриваются прямые и обратные задачи исследования объекта по его математической модели. В прямых задачах по данным о выходах объекта исследуется его поведение в различных условиях (режимах работы), т. е. входные переменные, структура и параметры модели относятся к исходным данным, а выходные переменные представляют результат исследования: $\mathbf{Y} = \mathbf{f}(\mathbf{X})$ или $\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$, где известны характеристики $\mathbf{X}$ и $\mathbf{f}$ или $\mathbf{F}$.

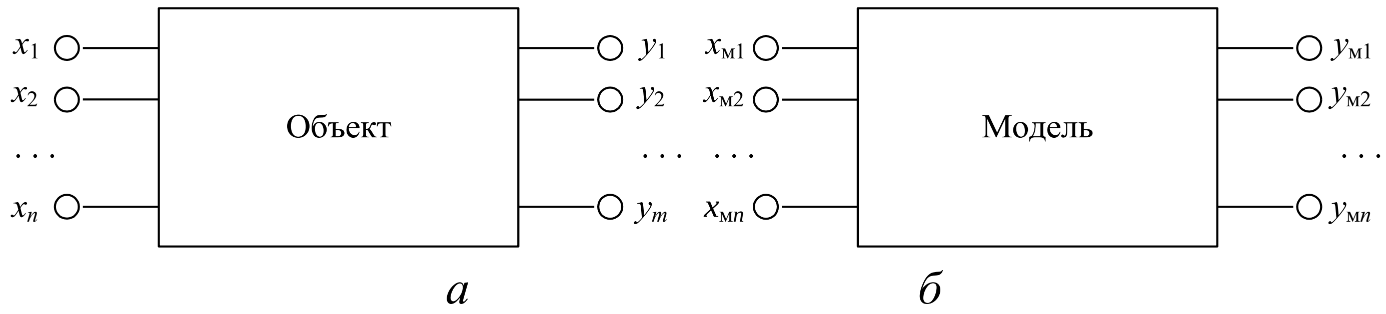

Рис. 1.4. Переменные в объекте и его модели

В обратных задачах считаются известными $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ (доступны для измерения и исследования), а определению подлежат неизвестные структура и параметры модели ($\mathbf{f}$ или $\mathbf{F}$). Такие задачи называют задачами идентификации.

Входные переменные разделяют на управляемые (управляющие воздействия) и неуправляемые (возмущения) Первые позволяют выполнять регулирование режима работы объекта, а вторые меняются самопроизвольно, например погодные условия.

По подверженности воздействию случайным факторам. Детерминированная (определенная) переменная означает, что для нее исключено влияние случайных факторов – она задается вполне определенным значением или меняется во времени по определенному закону. Некоторые переменные по своей природе или по влиянию на них случайных факторов являются случайными величинами. Процесс изменения такой величины во времени называется случайным или стохастическим процессом. К этим переменным можно отнести мощность нагрузки тяговой подстанции, которая зависит от загрузки контактной транспортной сети, или величину активного сопротивления провода ЛЭП, в большой степени подверженного влиянию температуры окружающей среды.

В основе описания случайных переменных лежат методы теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики.

По свойствам непрерывности и дискретности. Изменения непрерывных переменных во времени описываются непрерывными функциями, которые могут принимать континуальное множество значений в некоторых практически всегда имеющихся пределах (рис. 1.5, *а*). Непрерывность, порожденная инерционностью материальных систем, является их неотъемлемым свойством. Однако на практике возможности разрешения близких значений функций и ее аргументов всегда ограничены; для каждого конкретного случая можно указать определенную область, в пределах которой эти значения становятся неразличимыми для наблюдателей или инструментальных средств. Очевидно, что такую область достаточно характеризовать единственным значением, что приводит к понятию дискретных переменных (рис. 1.5, *б, в, г*).

Дискретные переменные подразделяются на три типа:

1) дискретные относительно значений переменной (рис. 1.5, *б*);

2) дискретные относительно времени (рис. 1.5, *в*);

3) дискретные относительно значений переменной и относительно времени (рис. 1.5, *г*).

Множество дискретных значений, которые принимает переменная, как правило, является конечным: положение выключателя (включено, выключено), количество включенных генераторов на электростанции (0, 1, 2, …), значения целых чисел, представленных в цифровой вычислительной машине (например, от –32 768 до +32 767). С помощью дискретных переменных относительно значений удобно представлять некоторые процессы (графики нагрузок или напряжений по часам суток или месяцам года), распределение вероятностей (гистограмма) т. п.

Дискретность во времени связана с отсчетом или замером переменных в отдельные дискретные моменты времени. Так, в автоматизированных системах управления измерения переменных выполняются с заданной периодичностью, например, через каждые 5 минут.

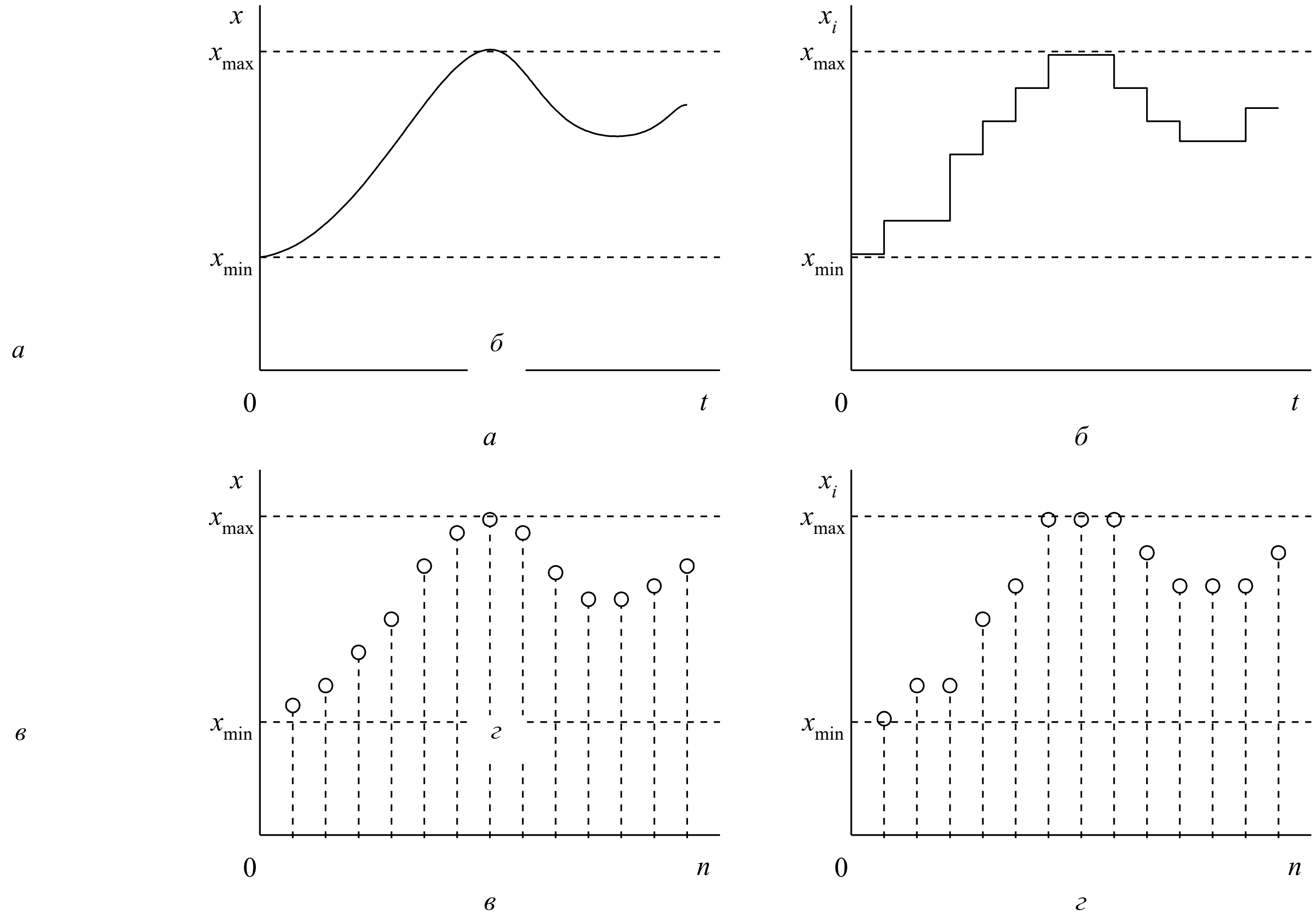

Рис. 1.5. Виды переменных по свойствам непрерывности и дискретности

Дискретность по времени и по значению дополнительно к измерениям в отдельные моменты времени предполагает использование дискретных значений переменных.

По способу получения переменные подразделяются на наблюдаемые и ненаблюдаемые.

Главное свойство наблюдаемых переменных – доступность для наблюдения. Однако наблюдаемость сама по себе еще не обеспечивает возможности полного исследования и описания переменной. Необходимо, чтобы последняя обладала еще свойством измеримости, т. е. возможностью построения для исследуемой величины метрики. Этому требованию удовлетворяют непосредственно измеряемые переменные. Они представляют собой количественные характеристики свойств и параметров всевозможных материальных объектов и процессов (напряжение, ток, скорость, линейные размеры и пр.), которые определяются на основе прямого измерения, т. е. сравнения с мерой, обеспечены средствами измерения и охвачены существующей системой метрологического обеспечения.

Тесно связан с непосредственно измеряемыми и следующий класс переменных – косвенно измеряемые.

К косвенно измеряемым переменным относят такие искусственно сконструированные идеальные образования, которые вообще не наблюдаемы: математическое ожидание, дисперсия, энтропия и др.

Существует класс переменных, которые при их количественном оценивании не имеют материальной эталонной базы и находятся вне сферы метрологии. К ним относятся все виды непосредственно или косвенно измеряемых переменных, приведенных к безразмерной форме и выраженных в относительных единицах. Например, некоторые величины материальной природы (интенсивность сейсмических явлений, интенсивность облачности в метеорологии, твердость материалов по Бринеллю и некоторые другие), а также искусственные идеальные конструкции, характеризующие в количественном отношении сложные и массовые объекты и явления (рентабельность, прибыль, эффективность и др.). Такие переменные называют условно измеряемыми, так как меры или единицы измерения, используемые при их количественном оценивании, носят конвенционный характер.

Существует еще один класс наблюдаемых переменных – условно количественно оцениваемые. Они представляют сложные многофакторные явления, интенсивность которых может быть различной, но для количественного оценивания этой интенсивности не удается ввести ни объективной единицы измерения, ни способа измерения. Однако в целом ряде случаев между интенсивностями рассматриваемого явления удается установить отношение порядка (равны – не равны, больше – меньше и т. д.), а затем отобразить эти отношения, вообще говоря, произвольным образом на некоторое множество (систему) чисел. Результатом такой процедуры являются, например, численные оценки качества усвоения учащимися и студентами учебного материала, степень удовлетворения работой членов некоторого производственного коллектива, степень качества исполнения музыкального произведения или выполнения спортивного упражнения. Условное количественное оценивание основано на опыте и интуиции и по сути своей субъек-тивно.

Ненаблюдаемые переменные подразделяют на принципиально ненаблюдаемые и технически ненаблюдаемые.

Принципиально ненаблюдаемые переменные не существуют как компоненты реального мира и поэтому поддаются определению только косвенными методами, в частности на основе косвенных измерений (статистические характеристики).

Технически ненаблюдаемые переменные характеризуют такие материальные явления, которые либо не обеспечены техническими средствами, необходимыми для измерения и оценивания, либо протекают в условиях, когда инструментальный доступ к ним невозможен. Характерным примером переменной, не наблюдаемой из-за практической недоступности, является количество угля для помола в шаровой мельнице на электростанции.

Каждая переменная, связанная с материальным объектом, может изменять свои значения лишь в некоторых конечных пределах, которые обусловлены физическими свойствами объекта и характером решаемой задачи. Данные об этих пределах – ограничения на переменные – существенны при построении и использовании всех видов моделей, а в оптимизационных задачах, где необходимо найти оптимальное значение так называемой целевой функции, ограничения являются главной частью самой модели.

С математической точки зрения различают ограничения типа простых неравенств: $\mathbf{X}_{min} \le \mathbf{X} \le \mathbf{X}_{max}$, $\mathbf{Y}_{min} \le \mathbf{Y} \le \mathbf{Y}_{max}$ – параллелепипедные ограничения и функциональные ограничения, фиксирующие предельные значения некоторой величины в функции от других переменных: $\mathbf{f}_{min}(\mathbf{X}) \le \mathbf{Z} \le \mathbf{f}_{max}(\mathbf{X})$ и т. п.

В практике моделирования выделяют так называемые жесткие ограничения, которые являются абсолютными (например, угол поворота лопатки турбины – «до упора»), и ограничения мягкие, допускающие кратковременные нарушения установленной границы значений переменной (например, верхнего предела рабочего напряжения на электродвигателе).

В общем случае данные об ограничениях на переменные входят в состав модели как обязательная составная часть.

1.4. Адекватность и эффективность математических моделей

Математическое описание объекта может иметь различную степень соответствия (адекватность) объекту-оригиналу. Как правило, исследователь стремится к более полному и точному отражению в модели свойств объекта. Это естественное стремление объясняется неопределенностью, которая неизбежно присутствует при построении моделей. Нельзя заранее точно знать, какие свойства объекта важны для решаемой задачи, а какие – несущественны. Такая неопределенность тем больше, чем меньше исследователь знает исследуемый объект и меньше его опыт в решении подобных задач.

Таким образом, требование полноты соответствия модели объекту-оригиналу является одним из ее качеств. Мало того, излишняя полнота модели в большинстве случаев даже вредна, так как приводит к такому усложнению модели, что ее использование становится невозможным. Поэтому другое качество модели – это ее простота.

Нетрудно понять, что качества адекватности и простоты противоречат друг другу, т. е. с улучшением одного из них происходит ухудшение другого. Отыскание оптимального сочетания (как говорят, «золотой середины») этих двух качеств при построении модели есть отдельная задача, решение которой лежит на исследователе. Здесь необходимы опыт, интуиция и соответствующий уровень подготовки исследователя. Идеальная квалификационная подготовка последнего не только весьма обширна, но и в значительной мере противоречива.

С одной стороны, исследователь должен досконально представлять себе задачу и глубоко изучить объект моделирования. Но, с другой стороны, исследователю, строящему модель, необходимо хорошо владеть аппаратом современной математики, представлять себе весь арсенал модельных конструкций, иметь опыт формализации знаний и использования современных вычислительных средств. Кроме того, во многих случаях от исследователя требуются знания в области планировании и проведения эксперимента на объекте-оригинале или на более сложной модели (вычислительный эксперимент).

Модель с оптимальным сочетанием качеств адекватности и простоты можно назвать эффективной (практически полезной) моделью. Математически такое сочетание соответствует максимуму так называемой «функции полезности», и, если эта функция может быть записана, отыскание ее максимума возможно известными оптимизационными методами.

Употребляя термин «точность математического моделирования», можно иметь в виду адекватность модели, например, говорят: точная или приближенная формула, линеаризованная (т. е. приближенно замененная линейной) зависимость и т. д. Но реализация математической модели, т. е. проведение «вычислителем» одного или нескольких расчетов, результатом которых будут численные значения переменной, вектора, таблицы, содержит погрешности вычислений из-за ошибок округления, прерывания итерационного процесса вычислений и ошибок в данных, которые переходят (распространяются) на результаты. Дальнейшая обработка реализаций математической модели предполагает и подсчет погрешности исследований. В связи с этим, рассматривая вопрос об эффективности математических моделей, следует иметь в виду погрешности реализаций, которые иногда являются причиной дополнительных упрощений модели, так как учет некоторых факторов может, например, сказаться на результатах в меньшей степени, чем погрешности в исходных данных.

Рассмотрим математическую модель линии электропередачи (ЛЭП) высокого напряжения. В нее входят такие параметры, как активное сопротивление, индуктивность самоиндукции и взаимоиндукции проводов, а также емкости между проводами и проводами и землей. Высота подвеса проводов и заземленных грозозащитных тросов на линии влияет на величину емкостей между проводами и землей. Следует ли в расчетах режимов ЛЭП учитывать близость земли? В некоторых случаях при достаточно длинных ЛЭП определение емкостных параметров требует уточнения в части влияния земли, а при небольших длинах линий это не обязательно.

При анализе адекватности, эффективности и точности отдельных математических моделей используются некоторые численные оценки. Получение этих оценок почти всегда связано с большими трудностями, так как требует проведения натурных (на объекте-оригинале) или вычислительных (по реализациям по более точной модели) экспериментов. Иногда такие эксперименты требуют больших материальных и временных затрат, но проводить их необходимо, поскольку это единственный способ оценить качество математических моделей.

Истинные значения параметров обычно отождествляются с экспериментально полученными. Однако погрешности натурного эксперимента во многих случаях оказываются соизмеримыми с погрешностями математических моделей, а иногда заметно их превышают.

Пусть на выходе объекта измеряются m переменных $\mathbf{Y}$ (рис. 1.4, *а*). При исследовании на математической модели получились m модельных переменных $\mathbf{Y}_{\text{м}}$. Вектор погрешностей есть разница полученных векторов $\mathbf{\Delta} = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_{\text{м}}$. В целом погрешность математической модели можно оценить по норме вектора погрешностей $\mathbf{\Delta}$:

$$\|\mathbf{\Delta}\|_1 = \max_{i \in [1...m]} |\Delta_i| . \tag{1.2}$$

Часто используют евклидову норму и среднеквадратическую погрешность

$$\|\mathbf{\Delta}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Delta_i^2} \text{ и } \varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} \Delta_i^2}{m}} . \tag{1.3}$$

В качестве других характеристик математических моделей иногда называют экономичность (по затратам) и универсальность (применимость к группе объектов).

1.5. Свойства объектов моделирования

Технические объекты имеют самые разнообразные внутренние свойства и взаимодействия с окружающим миром. Рассмотрим внутренние свойства объектов моделирования, которые необходимо учитывать при построении моделей.

Под структурой объекта обычно понимают совокупность элементов, входящих в состав объекта, и связей между ними. Структура математической модели – это совокупность переменных и параметров, записанных в математическом выражении, например,

$$z = ax^2 + bx + cy^2 + dy + exy. \tag{1.4}$$

Здесь переменными являются величины x, y и z, а параметрами – коэффициенты a, b, c, d, e.

Параметры – это количественные характеристики внутренних свойств объекта, которые отражаются его структурой, а в математической модели они являются коэффициентами, входящими в математическое выражение.

Рассмотрим свойства объектов с точки зрения моделирования.

1) Непрерывность и дискретность

Подавляющее большинство различных технических объектов имеет свойство непрерывности переменных, т. е. свойство принимать несчетное множество сколь угодно близких значений. Состояния этих объектов описываются макроскопическими физическими величинами: температурой, скоростью, давлением, пространственными координатами, электрическим током и т. п. Математические структуры, адекватно описывающие такие объекты, очевидно, тоже должны быть непрерывными. Поэтому при модельном описании объектов с непрерывными переменными используют главным образом аппараты дифференциальных и интегральных уравнений, передаточные функции, частотные характеристики и др.

Дискретные переменные могут принимать некоторое, практически всегда конечное, число наперед заданных значений. Характерными примерами объектов с дискретными переменными являются релейные переключательные схемы, коммутационные системы АТС, цифровые вычислительные машины. Основой формализованного описания объектов с дискретными переменными является аппарат математической логики. Дискретные методы анализа в настоящее время получили широкое распространение для описания и исследования объектов с непрерывными переменными. При этом вследствие конечности разрядной сетки ЦВМ значения непрерывных величин округляются до дискретных значений, а исходные дифференциальные уравнения в частных производных заменяются эквивалентными конечно-разностными. В отличие от моделей с дискретными переменными по своей сути модели с непрерывными переменными, представленные дискретно, называют дискретизированными.

2) Стационарность и нестационарность

Строго говоря, какие-то изменения имеют место в любом реальном объекте, однако в тех случаях, когда они настолько малы, что могут не учитываться при моделировании, объект рассматривается как стационарный. Стационарность предполагает неизменность и структуры, и параметров объекта. Поэтому стационарный объект описывается математическим выражением, которое включает в себя только постоянные коэффициенты.

Нестационарные объекты имеют в общем случае изменяющиеся во времени структуру и параметры.

В технических объектах приходится сталкиваться с нестационарно-стью как структуры, так и параметров объекта. Так, например, в электроэнергетической системе в течение времени отключаются и включаются отдельные элементы (линии, трансформаторы, генераторы) и изменяются их параметры в зависимости от различных внешних факторов (температура, влажность, старение изоляции и др.).

Принципиальных затруднений учет нестационарности относительно параметров в математическом описании объекта не вызывает, хотя усложняет модель и ее исследование. В тех случаях, когда появляется необходимость исследовать объекты переменной структуры, общую нестационарную задачу, как правило, расчленяют на ряд стационарных относительно структуры подзадач, решения которых отыскивают отдельно, а затем объединяют в одно.

3) Распределенность и сосредоточенность параметров

В пространственно протяженных объектах, в частности включающих в себя непрерывные среды (газы, жидкости, твердые среды), когда время распространения физических, например колебательных явлений, оказывается соизмеримым с инерционными эффектами, адекватное описание процессов требует учета как временных, так и пространственных координат. Объекты такого рода, средством описания которых служат дифференциальные уравнения в частных производных, относятся к классу объектов с распределенными параметрами. С математической точки зрения объекты с распределенными параметрами представляют собой поле, существующее в пространственно-временном континууме, а переменные соответствующих моделей в общем случае суть функции времени и пространственных координат. Типичными примерами одномерных объектов с распределенными параметрами служат всевозможные «длинные линии»: проводные линии связи, длинные трубопроводы, линии электропередачи на большие расстояния. Примерами моделей двухмерного объекта с распределенными параметрами являются сечения различных трубопроводов, кабелей, проводов, где рассматриваются в плоскостях поля температур, плотностей и напряженностей. И, наконец, пространственное электромагнитное поле с его математической моделью –

уравнениями Максвелла – представляет собой классический пример трехмерного объекта с распределенными параметрами.

Если пространственной протяженностью можно пренебречь и считать, что независимой переменной протекающих в нем процессов является только время, принято говорить об объекте с сосредоточенными параметрами. К числу таких объектов, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, относится подавляющее большинство механизмов, машин, устройств, а также все системы, у которых расстояния между отдельными элементами практически не влияют на исследуемые свойства.

Математический аппарат, строго описывающий объекты с распределенными параметрами, существенно сложнее, чем аппарат объекта с сосредоточенными параметрами. Поэтому на практике всегда, где это возможно, прибегают к аппроксимации, т. е. заменяют распределенные параметры на сосредоточенные, например, разбивая пространство на небольшие элементы (подпространства) или делая корректировку сосредоточенных параметров.

4) Одномерные и многомерные объекты

Обычно под количеством измерений понимают число выходов (выходных переменных). Для моделирования многомерных объектов используют векторно-матричное представление.

5) Статические и динамические объекты

Статические объекты находятся в «застывшем» состоянии или рассматриваются в какой-либо момент времени безотносительно того, каким было его состояние в прошлом или будет в будущем. Динамика рассматривает причинно-следственные цепочки и возможность прогнозирования будущих состояний объектов. Каждый динамический объект имеет свойство последствия (инерции) – состояние движущегося тела в некоторый момент времени определяется не только силами, действующими в тот момент, но и предшествующими воздействиями: состояние объекта имеет предысторию его движения. В дифференциальных уравнениях предыстория объекта задается начальными условиями.

Развитие механики пространственных протяженных сред, а также теории колебаний и волн выявило еще один источник последствия, не связанный непосредственно с инерционными эффектами. Речь идет о конечной скорости распространения механических возмущений, например колебательных в сплошной среде, результатом чего является зависимость текущего состояния некоторой точки от прошлых состояний других точек и, следовательно, объекта в целом.

Нельзя связывать последствия только с традиционными представлениями об инерционных эффектах. Явление последствия имеет более общий характер. Существуют и другие физические явления, например резонанс и запаздывание в каналах связи, которые дают последствия в материальных объектах. Существуют также информационные запаздывания в управляемых системах.

Н. Винер ввел обобщенное представление о зависимости между входной и выходной переменными произвольного объекта в форме

$$\mathbf{x}(t) = \hat{\mathbf{A}}\left[\mathbf{u}\left(t_i \middle| t\right)\right], \quad t_0 \le t \le t_i, \tag{1.5}$$

где $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{x}(t)$ – вектор-функции входов и соответственно выходов;

$\hat{\mathbf{A}}$ – обобщенный оператор объекта;

$t_i - t_0 = \theta$ – интерпретируемый как внутренняя память объекта интервал времени, в пределах которого прошлые состояния объекта влияют на текущее значение $\mathbf{x}(t_i)$. При этом очевидно, что условием физической реализуемости объекта является неравенство $t \le t_i$, ибо следствие (выход) в реальной системе не может предшествовать причине (входу). θ варьируется в переделах от 10^{-9} до десятков и сотен лет (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Время внутренней памяти объекта

Тип системы (объекта)	Память	
	Единица измерения	Порядок
Радиоэлектронные системы	с	$10^{-3} \ldots 10^{-9}$
Механические и электромеханические системы (машины, агрегаты, генераторы и др.)	с	$10^{-2} \ldots 10$
Крупные транспортные системы (суда, ж/д транспорт, нефте- и газопроводы)	мин	$1 \ldots 10$
Крупные термические агрегаты (металлургические печи, котлы)	ч	$1 \ldots 10^{2}$
Производственно-экономические системы	Месяцы	$10^{-1} \ldots 10$
Крупные производственно-экономические системы	Месяцы, годы	–
Крупные экосистемы, биосферные процессы	Годы, десятилетия	–
Массовые социально-психологические явления (ценностные установки, убеждения, мировоззрения)	Столетия	–

6) Виды физических объектов

Рассматривая объекты моделирования, часто ограничиваются исследованием физических свойств одного рода: тепловых, электрических, магнитных, механических и т. д. Но в тех случаях, когда в объекте происходит передача или преобразование энергии, требуется учет свойств различного рода, например электромагнитных, теплоэлеткрических, тепломехенических, электромеханических и др. Математический аппарат, используемый для моделирования различных физических систем, может оказаться одинаковым. Так, например, вращательная механическая система и электрическая цепь с источником ЭДС и конденсатором описываются одинаковыми с точки зрения математики уравнениями.

1.6. Математические модели на микроуровне

Рассмотрим модели технических систем на микроуровне. В большинстве случаев это распределенные модели (объекты с распределенными параметрами) и они представляют собой системы дифференциальных уравнений в частных производных. При создании математических моделей целесообразно исходить из основных физических законов в их наиболее «чистом», фундаментальном виде. Такой подход обеспечивает наиболее адекватное описание объектов, протекания процессов и явлений окружающего нас мира.

Фундаментальными физическими законами в первую очередь являются законы сохранения массы, количества движения, энергии. Эти законы можно сформулировать в одном общем виде: изменение во времени некоторой субстанции в элементарном объеме равно сумме притока-стока этой субстанции через поверхность элементарного объема. Эта формулировка остается справедливой и для некоторых других субстанций, например, количества теплоты, количества зарядов, количества элементарных частиц и др. В этом случае общий вид уравнений, составляющих основу большинства распределенных моделей, будет следующим:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \operatorname{div}\vec{J} + G, \tag{1.6}$$

где φ – некоторая фазовая переменная, выражающая субстанцию (плотность, энергию и т. п.);

$\vec{J}$ – поток фазовой переменной;

G – скорость генерации субстанции;

t – время.

Поток фазовой переменной φ есть вектор $\vec{J}$ = (J_x, J_y, J_z). Дивергенция (расходимость) этого вектора определяется общим соотношением

$$\operatorname{div}\vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}, \tag{1.7}$$

является скалярной величиной и характеризует сумму притока-стока через поверхность элементарного объема.

Рассмотрим основные уравнения некоторых физических процессов.

1) Уравнение непрерывности гидродинамики

В течении жидкости или газа имеем в любой точке M определенное значение скорости движущейся частицы, т. е. векторное поле скорости. Обозначим через ρ плотность жидкости в данной точке. Понятие дивергенции позволяет описать поведение этой плотности в отдельной точке:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\rho \operatorname{div}\vec{v}. \tag{1.8}$$

Это уравнение описывает закон сохранения массы и называется уравнением непрерывности.

При одномерном исполнении

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\rho \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.9}$$

2) Уравнение теплопроводности

Связь изменения температуры во времени и пространстве со свойствами среды описывается с помощью уравнения теплопроводности. Это уравнение вытекает из закона сохранения энергии: изменение во времени количества теплоты в элементарном объеме равно сумме притока-стока теплоты и изменения теплоты за счет ее превращения в другие виды энергии в том же объеме:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{J}_Q + G_Q, \qquad (1.10)$$

где Q – количество теплоты;

$\vec{J}_Q$ – вектор плотности теплового потока;

G_Q – количество теплоты, выделяемой в единицу времени в рассматриваемом элементарном объеме.

2) Уравнение непрерывности электрического тока

Движение электрических зарядов через поверхность элементарного объема записывается в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{\delta}, \qquad (1.11)$$

где ρ – объемная плотность электрических зарядов;

$\vec{\delta}$ – вектор плотности тока проводимости и смещения.

Приведенные примеры показывают однотипность математических моделей на микроуровне, но в то же время использование математических моделей объектов в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных возможно для простых технических систем, так как их решение наталкивается на значительные трудности. Методы дискретизации пространства (конечных разностей и конечных элементов), которые используются для приближенного решения этих уравнений, приводят к решению систем с числом уравнений 10^6 и более.

1.7. Моделирование на макроуровне

Модели макроуровня получаются, когда происходит переход от распределенных параметров к сосредоточенным – выделяются крупные элементы объектов и их параметры сосредоточиваются в одной точке: масса балки оказывается сосредоточенной в центре тяжести, поле потенциалов характеризуется величиной одного напряжения, поток электронов моделируется электрическим током и т. п. Поведение (состояние) моделируемых объектов, состоящих из физически однородных элементов, в которых описываются процессы определенной физической природы (механические, электрические, гидравлические, тепловые), можно характеризовать с помощью фазовых переменных двух типов – типа потенциала и типа потока.

В табл. 1.2 приведены типы фазовых переменных для объектов разной физической природы.

Таблица 1.2

Фазовые переменные для различных физических систем

Система	Фазовые переменные	
	типа потенциала	типа потока
Электрическая	Электрическое напряжение	Электрический ток
Механическая	Скорость	Сила
Механическая вращательная	Угловая скорость	Вращательный момент
Тепловая	Температура	Тепловой поток
Гидравлическая и пневматическая	Давление	Расход

В большинстве технических объектов можно выделить три типа пассивных простейших элементов:

- типа *R* – элемент рассеивания (диссипации) энергии (как правило, преобразования энергии в тепловую и ее рассеивания);
- типа *C* и типа *L* – элементы накопления потенциальной и кинетической энергии.

Кроме пассивных элементов, существуют два активных элемента – источник напряжения и источник тока.

Уравнения, описывающие свойства элементов объекта, называют *компонентными.* В них входят переменные типа потенциала и типа потока. Способ связи элементов отражается с помощью других уравнений, которые называют *топологическими*. В них входят переменные одного типа: либо потенциала, либо потока. Топологические уравнения могут выражать законы сохранения, условия непрерывности, равновесия, баланса и т. п.

Математические модели объектов есть совокупность компонентных и топологических уравнений.

Рассмотрим примеры компонентных и топологических уравнений для некоторых разных по своей физической природе объектов.

1) Электрические системы

Основными фазовыми переменными электрических систем являются напряжения и токи в различных элементах систем. Компонентные уравнения элементов имеют вид

$$U = RI, \quad I = C\frac{dI}{dt}, \quad U = L\frac{dI}{dt}, \tag{1.12}$$

где U – напряжение;

I – ток;

R – сопротивление;

C – емкость;

L – индуктивность.

При соединении резисторов, емкостей, индуктивностей между собой образуется схема, соединение элементов в которой отражается топологическими уравнениями. Ими являются законы Кирхгофа:

$$\sum_j I_j = 0, \quad \sum_i U_i = 0, \tag{1.13}$$

где уравнения токов записываются для узлов, а уравнения напряжений для контуров. В ЭЭС имеются достаточно сложные элементы, и при их моделировании применяют схемы замещения, состоящие из сопротивлений, емкостей и индуктивностей.

2) Механическая система

Элементами механических поступательных систем являются:

- элементы механического сопротивления, отражающие потери механической энергии на разные виды трения;
- элементы масс, отражающие свойства инерционности;
- элементы гибкости, отражающие свойства упругости.

Роль фазовых переменных в механических системах выполняют либо силы и скорости, либо силы и перемещения.

Компонентные уравнения имеют вид

$$V = R_m F, \quad F = m\frac{dV}{dt}, \quad V = L_m\frac{dF}{dt}, \tag{1.14}$$

где V – скорость;

F – сила;

R – коэффициент, учитывающий зависимость силы трения от скорости;

m – масса-аналог электрической емкости;

L_m – гибкость – параметр, являющийся аналогом электрической индуктивности.

Первое выражение в (1.14) указывает на связь скорости и силы через коэффициент вязкого трения $k_т = \frac{1}{R_m}$. Второе выражение является вторым законом Ньютона. Третье выражение в (1.14) получено из уравнения перемещения пружины x под действием силы $F = kx$, где k – коэффициент жесткости пружины. После дифференцирования последнего выражения получаем

$$\frac{dF}{dt} = k\frac{dx}{dt} = kV. \qquad (1.15)$$

Если обозначить $L_m = \frac{1}{k}$ (механическая гибкость), то получим третье выражение в (1.14).

Топологические уравнения механической системы выражают уравнение равновесия сил, являющееся аналогом первого закона Кирхгофа, и уравнение сложения скоростей, в соответствии с которым сумма абсолютной, относительной и переносной скоростей равна нулю (аналог второго закона Кирхгофа).

$$\sum_j F_j = 0, \quad \sum_i V_i = 0. \qquad (1.16)$$

3) Механические вращательные системы

Для механических вращательных систем наиболее просто выглядит аналогия с механическими поступательными системами. Поступательной скорости V соответствует угловая скорость Ω, силе F – вращательный момент M. Аналогиями параметров m, L_m и R

будут соответственно: J – момент инерции относительно оси вращения со скоростью Ω; $L_{\text{вр}}$ – вращательная гибкость; $R_{\text{вр}}$ – сопротивление вращению.

Компонентные уравнения механической вращательной системы имеют вид

$$\Omega = R_{\text{вр}} M, \quad M = J \frac{d\Omega}{dt}, \quad \Omega = L_{\text{вр}} \frac{dM}{dt}. \tag{1.17}$$

Топологические уравнения механической вращательной системы выражают закон равенства суммы моментов сил и закон сложения скоростей вокруг оси вращения:

$$\sum_j M_j = 0, \quad \sum_i \Omega_i = 0. \tag{1.18}$$

4) Гидравлические и пневматические системы

Топологические уравнения гидравлической системы близки по своему смыслу и идентичны по форме топологическим уравнениям электрических систем, а именно сумма потоков в любом узле системы и сумма давлений вдоль любого контура системы равны нулю.

Фазовые переменные пневматических систем – потоки газа и давления – аналогичны по смыслу фазовым переменным гидравлических систем. Также одинаковы в гидравлических и пневматических системах компонентные и топологические уравнения.

5) Тепловые системы

Топологические уравнения для сумм тепловых потоков и разностей температур тепловых систем также аналогичны законам Кирхгофа в электрических системах.

Границы применимости топологических уравнений определяются скоростями распространения возбуждений, размерами компонентов системы и частотами изменения фазовых переменных. Например, для электрических систем скорость распространения возбуждений есть скорость света или электромагнитных волн в соответствующей среде, а для механических, гидравлических и пневматических – это скорость распространения звука в соответствующей среде.

1.8. Моделирование на метауровне

Математические модели на микроуровне учитывали распределенностью параметров объекта в пространстве. Переход на макроуровень характеризуется дискретизацией пространства – параметры объекта считаются сосредоточенными в отдельных точках пространства. Метауровень имеет математические модели, где вводятся еще большие допущения и упрощения, что позволяет получать доступные для исследования математические модели больших объектов и систем.

Существует несколько способов построения математических моделей на метауровне, к ним относятся:

1) дискретизация времени, т. е. наряду с введением сосредоточенных параметров переменные и параметры модели считаются независящими непрерывно от времени;

2) потери энергии в объекте не учитываются;

3) переход к факторным моделям;

4) переход к функциональным моделям, в которых используется только один вид фазовой переменной – сигнал;

5) эквивалентирование – замена больших систем их упрощенными моделями – эквивалентами, созданными на основе специальных критериев, и др.

Так, например, решать задачи регулирования частоты и обменной мощности в Единой энергосистеме (ЕЭС) На рис. 1.6 показаны связи между отдельными ОЭС, входящими в ЕЭС. Параметрами такой модели могут служить значения пропускной способности связей, мощности отдельных ОЭС и «коэффициенты жесткости» (отношения предела статической устойчивости связи к меньшей мощности из соединяемых частей ОЭС). В такой модели параметры и переменные могут считаться неизменными на длительных интервалах времени и потери электрической энергии не учитываются.

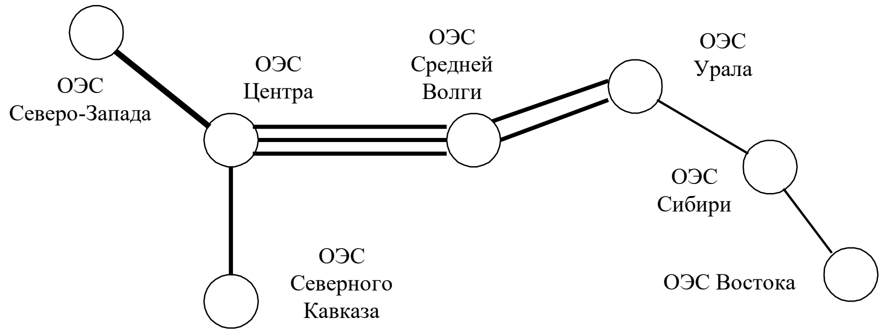

Рис 1.6. Схема связей между ОЭС ЕЭС

Переход к факторным моделям может быть выполнен методами идентификации объектов или с использованием методов планирования эксперимента. Идентификация технических объектов рассматривается в разделе 4.

Функциональное моделирование является предметом изучения отдельной дисциплины – теории автоматического регулирования.

Эквивалентирование – это преобразование электрической схемы на основе специальных критериев с целью ее упрощения. Обычно в сложной ЭЭС выделяется часть схемы сети, для которой выполняется анализ режимов работы, все остальные преобразуются в эквивалентные схемы. Так, рассматривая режимы работы отдельной ЭЭС, все соседние энергосистемы представляют их эквивалентами или в большом энергообъединении сохраняются только мощные высоковольтные линии и подстанции, а сети более низкого напряжения представляются эквивалентами.

Математические модели с использованием систем массового обслуживания

Эти системы основаны на марковском случайном процессе. *Физическая система* S с течением времени меняет свое состояние (переходит из одного состояния в другое) случайным образом. Тогда в системе S протекает случайный процесс, который называется марковским, если для любого момента времени t_0 вероятностные характеристики процесса в "будущем" зависят только от его состояния в данный момент времени t_0 и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние. Вероятностные характеристики в "будущем" можно найти: например, вероятность того, что через некоторое время т система S окажется в состоянии S_1 или сохранит состояние S_0, и т. д.

Таким образом, в марковском случайном процессе "будущее" зависит от "прошлого" только через "настоящее".

Рассматривая марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем, удобно будет представлять, что все переходы системы S из состояния в состояние происходят под действием каких-то потоков событий (поток вызовов, отказов, восстановлений и т. п.). Если все потоки событий, переводящие систему S из состояния в состояние, - простейшие, то процесс, протекающий в системе, будет марковским. Это и естественно, так как простейший поток не обладает последействием: в нем "будущее" не зависит от "прошлого".

Если система S находится в каком-то состоянии S_i, из которого есть непосредственный переход в другое состояние S_j (стрелка, ведущая из S_i в S_j на графе состояний), то это можно представлять так, как будто на систему, пока она находится в состоянии S_j, действует простейший поток событий, приводящий ее по стрелке $S_i \rightarrow S_j$ Как только появится первое событие этого потока, происходит "перескок" системы из S_i в S_j.

Для наглядности очень удобно представлять граф состояний. Построим размеченный граф состояний для технического устройства из двух узлов. Состояния системы будут:

S_0 - оба узла исправны;

S_1 - первый узел ремонтируется, второй исправен;

S_2 - второй узел ремонтируется, первый исправен;

S_3 - оба узла ремонтируются.

Интенсивность потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние, вычисляется при условии, что среднее время ремонта узла не зависит от того, ремонтируется ли один узел или оба сразу. Это будет именно так, если ремонтом каждого узла занят отдельный специалист. Найдем все интенсивности потоков событий, переводящих систему из состояния в состояние. Пусть система находится в состоянии S_0. Какой поток событий переводит ее в состояние S_1? Очевидно, поток отказов первого узла. Его интенсивность λ_1 равна единице, деленной на среднее время *безотказной* работы первого узла. Какой поток событий переводит систему обратно из S_i в S_j? Очевидно, поток "окончаний ремонтов" первого узла. Его интенсивность μ_1 равна единице, деленной на среднее время ремонта первого узла. Аналогично вычисляются интенсивности потоков событий, переводящих систему по всем стрелкам графа рис. 1.7.

Имея в своем распоряжении размеченный граф *состояний системы*, легко построить математическую *модель данного* процесса.

В самом деле, пусть рассматривается система S, имеющая n возможных состояний S_1, S_2, ….S_n. Назовем *вероятностью i-го состояния* вероятность $p_i(t)$ того, что в момент t система будет находиться в состоянии S_j. Очевидно, что для любого момента сумма всех вероятностей состояний равна единице:

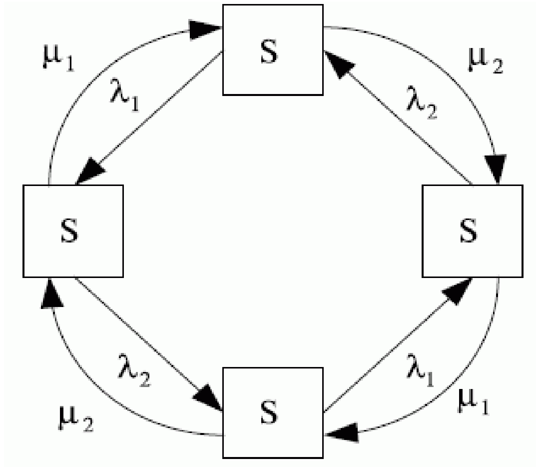

Рис. 1.7 Размеченный граф

Имея в своем распоряжении размеченный граф состояний, можно найти все вероятности состояний как функции времени. Для этого составляют и решают так называемые *уравнения Колмогорова* - особый вид *дифференциальных уравнений*, в которых неизвестными функциями являются вероятности состояний.

Вопросы для самопроверки

1. Какое свойство модели является фундаментальным?
2. Как классифицируются модели?
3. По каким признакам различают переменные в математических моделях?
4. Чем различаются прямые и обратные задачи исследования объекта при его моделировании?
5. Как подразделяются дискретные переменные в математических моделях?
6. Поясните свойство адекватности математической модели.
7. Назовите попарно противоположные свойства объектов с точки зрения моделирования.
8. Что представляют собой математические модели на микро-уровне?
9. Что представляют собой математические модели на макро-уровне?
10. Что представляют собой математические модели на метауровне?