

ЛЕКЦИЯ 15 (8)

ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Содержание лекции

Основные характеристики электрического тока
Сторонние силы
Закон Ома. Электрическое сопротивление
Соединения проводников
Зависимость сопротивления от температуры
Работа и мощность тока
Закон Джоуля-Ленца
Закон Ома для неоднородного участка цепи
Правила Кирхгофа для разветвленных цепей
Закон Видемана-Франца.
КПД и мощность постоянного тока

Основные характеристики электрического тока

Электрическим током называется упорядоченное движение электрических зарядов.

За **направление** тока принимают направление движения положительных зарядов.

Количественной мерой электрического тока служит **сила тока I** — скалярная физическая величина, равная отношению заряда dq , переносимого сквозь рассматриваемую поверхность за малый промежуток времени, к величине dt этого промежутка:

$$I = \frac{dq}{dt} . \quad (8.1)$$

Электрический ток называется **постоянным**, если сила тока и его направление не изменяются с течением времени.

Для постоянного тока:

$$I = \frac{q}{t} , \quad (8.2)$$

где q — электрический заряд, проходящий за время t через поперечное сечение проводника.

Единица силы тока — ампер (А).

Для характеристики направления электрического тока в разных точках рассматриваемой поверхности и распределения силы тока по этой поверхности служит **вектор плотности тока $\vec{j}$** . Сила тока сквозь произвольную поверхность определяется как поток вектора плотности тока

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}, \quad (8.3)$$

где $d\vec{S} = \vec{n}dS$ ($\vec{n}$ — единичный вектор нормали (орт) к площадке dS).

Плотностью электрического тока называется вектор $\vec{j}$, совпадающий с направлением электрического тока в рассматриваемой точке и численно равный отношению силы тока dI сквозь малый элемент поверхности, **ортогональной** направлению тока, к площади $dS_{\perp}$ этого элемента:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (8.4)$$

Для постоянного тока I , текущего перпендикулярно сечению S проводника:

$$j = \frac{I}{S}. \quad (8.5)$$

Если за время dt через поперечное сечение S проводника переносится заряд

$$dq = ne, \langle v \rangle S dt, \quad (8.6)$$

где n , e и $\langle v \rangle$ — концентрация, заряд и средняя скорость упорядоченного движения зарядов), то сила тока $I = dq/dt = ne, \langle v \rangle S$, а плотность тока:

$$\vec{j} = ne \langle \vec{v} \rangle. \quad (8.7)$$

Единица измерения плотности тока — А/м².

Сторонние силы

Для возникновения и существования электрического тока необходимо:

- 1) наличие свободных **носителей тока** — заряженных частиц, способных перемещаться упорядоченно;
- 2) наличие **электрического поля**, энергия которого должна каким-то образом **восполняться**.

Для существования постоянного тока **необходимо наличие в цепи устройства, способного создавать и поддерживать разность потенциалов за счет сил неэлектростатического происхождения.**

Такие устройства называются **источниками тока**.

Силы неэлектростатического происхождения, действующие на заряды со

стороны источников тока, называются сторонними.

Количественная характеристика сторонних сил — поле сторонних сил и его напряжённость $\vec{E}_{cm}$, определяемая сторонней силой, действующей на единичный положительный заряд.

Физическая величина, определяемая работой, которую совершают сторонние силы при перемещении единичного положительного заряда, называется *электродвижущей силой (ЭДС)* действующей в цепи:

$$\varepsilon = \frac{A_{cm}}{q_0} . \quad (8.8)$$

Эта работа совершается за счет энергии, затрачиваемой в источнике тока, поэтому величину ε можно назвать электродвижущей силой источника тока, включенного в цепь. ЭДС, как и потенциал, выражается в **вольтах**.

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется однородным. Участок, на котором на носители тока действуют сторонние силы, называется неоднородным.

Работа сторонних сил по перемещению заряда q_0 на замкнутом участке цепи:

$$= \oint \vec{E}_{cm} \cdot d\vec{l} = \oint_0 \vec{E}_{cm} \cdot d\vec{l} .$$

Отсюда, ЭДС, действующая в замкнутой цепи, — *это циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил*:

$$\varepsilon = \oint \vec{E}_{cm} d\vec{l} . \quad (8.9)$$

Следовательно, для поля сторонних сил циркуляция его напряженности по замкнутому контуру **не равна нулю**. Поэтому *поле сторонних сил — непотенциально*.

ЭДС, действующая на участке 1-2 цепи, равна

$$\varepsilon = \int_1^2 \vec{E}_{cm} d\vec{l} . \quad (8.10)$$

Понятие **напряжения** является обобщением понятия разности потенциалов: *напряжение на концах участка цепи равно разности потенциалов, если участок не содержит источника тока* (т.е. на участке не действует ЭДС; сторонние силы отсутствуют).

Закон Ома. Электрическое сопротивление

Интегральная форма закона Ома для однородного участка цепи (не содержащего источника тока):

Сила тока, текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна напряжению на концах проводника (интегральная форма закона Ома).

$$I = \frac{U}{R}. \quad (8.11)$$

Коэффициент пропорциональности R называется электрическим сопротивлением проводника.

Единица электрического сопротивления — ом (Ом): 1 Ом — сопротивление такого проводника, в котором при напряжении 1В течет постоянный ток 1А.

Величина $G = 1/R$ называется электрической проводимостью проводника.

Единица электрической проводимости — сименс (См): 1 См — проводимость участка электрической цепи сопротивлением 1 Ом.

Сопротивление проводника зависит от его размеров и формы, а также от материала, из которого проводник изготовлен.

Для однородного линейного проводника длиной l и площадью поперечного сечения S сопротивление рассчитывается по формуле:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (8.12)$$

где коэффициент пропорциональности ρ , характеризующий материал проводника, называется удельным электрическим сопротивлением.

Единица удельного электрического сопротивления — **Ом-метр (Ом·м)**.

Величина, обратная удельному сопротивлению называется удельной электрической проводимостью вещества проводника:

$$= \frac{1}{\rho}. \quad (8.13)$$

Единица удельной электрической проводимости — сименс на метр (См/м).

В проводнике $U/l = E$ — напряжённость электрического поля, приняв во внимание соотношения (8.5) и (8.13).

Из закона Ома получим соотношение: $\frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{U}{l}$, откуда

$$j = \sigma E.$$

В векторной форме соотношение

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (8.14)$$

называется **законом Ома в дифференциальной форме**. Этот закон связывает плотность тока в любой точке внутри проводника с напряженностью электрического поля в той же точке.

Соединения проводников

Найти сопротивление нескольких проводников означает, что нужно определить, каким одним сопротивлением можно заменить данное соединение.

Существует два вида соединения проводников: последовательное и параллельное.

Последовательное соединение n проводников:

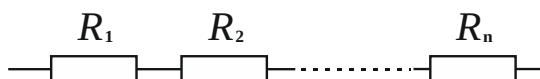


Рисунок 8.1 — Последовательное соединение проводников

Сила тока во всех проводниках одинаковая, то есть $I = I_1 = I_2 = \dots = I_n$.

Полное напряжение U (разность потенциалов между концами соединения) складывается из падений напряжения на каждом элементе цепи:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n.$$

Из закона Ома известно, что $U = IR$. Тогда получаем:

$$R_{\text{посл.}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (8.15)$$

Параллельное соединение n проводников:

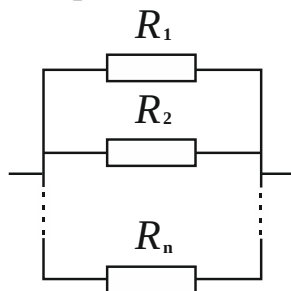


Рисунок 8.2 — Параллельное соединение проводников

Полная сила тока складывается из токов, протекающих через каждый

проводник соединения, то есть $I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$.

Полное падение напряжения U равно падениям напряжения на каждом элементе цепи:

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_n.$$

Из закона Ома известно, что $I = \frac{U}{R}$. Тогда получаем:

$$\frac{U}{R_{нар.}} = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \dots + \frac{U_n}{R_n}$$

или

$$\frac{1}{R_{нар.}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (8.16)$$

Зависимость сопротивления от температуры

Опытным путем было установлено, что для большинства случаев изменение удельного сопротивления (а значит и сопротивления) с температурой описывается линейным законом:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t) \quad \text{или} \quad R = R_0(1 + \alpha t),$$

где ρ и ρ_0 , R и R_0 — соответственно удельные сопротивления и сопротивления проводника при температурах t и 0°C (шкала Цельсия), α — **температурный коэффициент сопротивления (ТКС)**.

Таким образом, сопротивление проводника в области комнатных температур линейно зависит от температуры (рисунок 7.6), и тангенс угла наклона этой прямой и определяет значение ТКС.

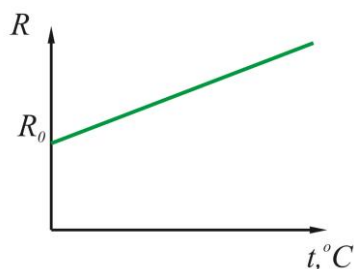


Рисунок 8.3 — Температурная зависимость сопротивлений в области комнатных температур

На зависимости электрического сопротивления металлов от температуры основано действие **термометров сопротивления**.

Сопротивление многих металлов при очень низких температурах T_k

(0,14 – 20) К называемых **критическими**, характерных для каждого вещества, скачкообразно уменьшается до нуля и металл становится абсолютным проводником. Это явление называется **сверхпроводимостью**.

Работа и мощность тока

Кулоновские и сторонние силы при перемещении заряда q вдоль электрической цепи совершают работу A .

Рассмотрим однородный проводник с сопротивлением R к концам которого приложено напряжение U . За время dt через сечение проводника переносится заряд $dq = Idt$. Работа по перемещению заряда q_0 между двумя точками поля, согласно (7.11) равна $A = q_0 \cdot \Delta\phi$, откуда

$$dA = Udq = UI dt = I^2 R dt = U^2 R dt. \quad (8.17)$$

Мощность тока:

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (8.18)$$

Если размерности $[I] = A$, $[U] = B$, $[R] = \text{Ом}$, то $[A] = \text{Дж}$, $[P] = \text{Вт}$.

Внесистемные единицы работы тока: ватт-час (Вт-ч) и киловатт-час (кВт-ч). 1 Вт-ч — работа тока мощностью 1 Вт в течение 1 ч: 1 Вт-ч = 3600 Вт-с = $3,6 \cdot 10^3$ Дж. Аналогично: 1 кВт-ч = 1000 Вт-ч = $3,6 \cdot 10^6$ Дж.

Закон Джоуля-Ленца

При прохождении тока по проводнику происходит рассеяние энергии вследствие столкновений носителей тока между собой и с любыми другими частицами среды. Если ток проходит по *неподвижному* проводнику, то вся работа тока dA идёт на нагревание проводника (выделение теплоты dQ).

По закону сохранения энергии: $dA = dQ$, и

$$dQ = IU dt = I^2 R dt = U^2 R dt.$$

Количество теплоты Q , выделяющееся за конечный промежуток времени от 0 до t постоянным током I во всем объёме проводника, электрическое сопротивление которого равно R , получаем, интегрируя предыдущее выражение (8.22): что, собственно и выражает **закон Джоуля-Ленца в интегральной форме**:

Количество теплоты, выделяемое постоянным электрическим током на

участке цепи, равно произведению квадрата силы тока на время его прохождения и электрическое сопротивление этого участка цепи:

$$Q = I^2 R t. \quad (8.19)$$

Выделим в проводнике цилиндрический объем $dV = dS dl$ (ось цилиндра совпадает с направлением тока). Сопротивление этого объема

$$R = \rho \frac{dl}{dS}.$$

По закону Джоуля-Ленца, за время dt в этом объеме выделится теплота

$$dQ = I^2 R dt = \frac{\rho dl}{dS} (j dS)^2 dt = \rho j^2 (dS dl) dt = \rho j^2 dV dt. \quad (8.20)$$

Удельной тепловой мощностью тока w называется количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема:

$$w = \frac{dQ}{dV dt} = \rho j^2. \quad (8.21)$$

Используя дифференциальную форму закона Ома $j = \sigma E$ и определение $\rho = 1/\sigma$, получим **закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме**:

$$w = \sigma E^2 = j E \quad (8.22)$$

Тепловое действие электрического тока используется в осветительных, лампах накаливания, электросварке, электронагревательных приборах и т.д.

Закон Ома для неоднородного участка цепи

Рассмотрим **неоднородный** участок цепи 1 – 2, на котором присутствуют силы неэлектрического происхождения (*сторонние силы*).

Если участок цепи 1 – 2 **неподвижен**, то (по закону сохранения энергии) **общая работа** A_{12} сторонних и электростатических сил, совершаемая над носителями тока, равна теплоте Q , выделяющейся на участке.

Работа сил, совершаемая при перемещении заряда q_Q :

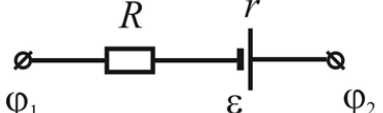
$$A_{12} = q_0 \varepsilon_{12} + q_0 \Delta \varphi.$$

ЭДС, как и сила тока, — величина скалярная. Если ЭДС способствует движению положительных зарядов в выбранном направлении, то $\varepsilon_{12} > 0$, если

препятствует, то $\mathcal{E} < 0$.

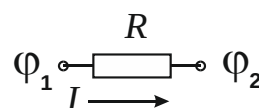
За время t в проводнике выделится теплота: $Q = I^2 R t = IR(It) = IRq_0$.

Отсюда следует закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме который является обобщенным законом Ома:

	$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R + r} \quad (8.23)$
---	---

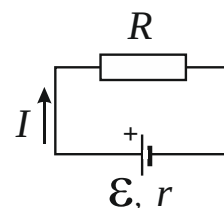
Частные случаи.

- 1) Если участок цепи не содержит ЭДС и в котором не происходят никакие химические превращения, то мы получаем **закон Ома для однородного участка цепи**:



$$I = \frac{U}{R}. \quad (8.24)$$

- 2) Если цепь **замкнута** ($\Delta\varphi = 0$), то получаем **закон Ома для замкнутой цепи**:



$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad (8.25)$$

- 3) Если цепь **разомкнута**, то $I = 0$ и $\mathcal{E} = \varphi_2 - \varphi_1$, то есть ЭДС, действующая в разомкнутой цепи, равна **разности потенциалов на её концах**.
 4) В случае короткого замыкания сопротивление внешней цепи $R = 0$ и сила тока

$$I_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{r} \quad (8.26)$$

в этом случае ограничивается только величиной внутреннего сопротивления источника тока.

Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

Узлом электрической цепи называется любая точка разветвления цепи, в которой сходится не менее трех проводников с током.

Первое правило Кирхгофа — алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_k I_k = 0. \quad (8.27)$$

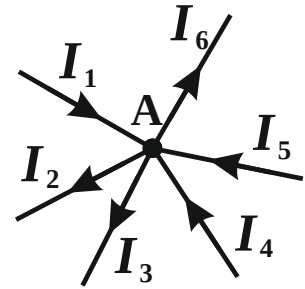
Замечания к первому правилу.

Токи, входящие, в узел считаются положительными, а выходящие — отрицательными.

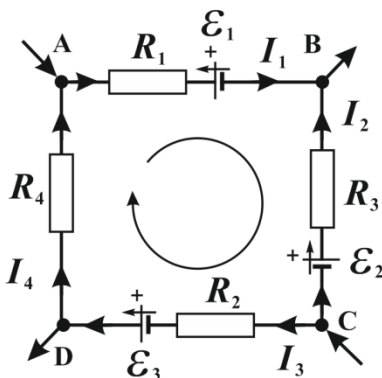
1. Направления токов выбираются произвольно. Если они были указаны неправильно, то соответствующее значение силы тока после решения системы уравнений будет отрицательным.
2. Число уравнений должно быть на единицу меньше числа узлов в цепи.

Например, для узла А на рисунке уравнение по первому правилу Кирхгофа:

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 + I_5 - I_6 = 0.$$



Второе правило Кирхгофа — в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил I_i токов, на сопротивление R_i соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС $\mathcal{E}_k$, встречающихся в этом контуре:



$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k. \quad (8.28)$$

Например, для обхода по часовой стрелке замкнутого контура ABCDA уравнение, составленное по второму правилу Кирхгофа, имеет вид:

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_{10}.$$

Замечания ко второму правилу.

1. Число уравнений на единицу меньше числа независимых контуров.
2. Здесь следует учитывать, что если ток, протекающий через элемент контура, совпадает с направлением обхода, то падение напряжения на нём берётся со знаком «+», если не совпадает — то со знаком «-».
3. Если направление внутри ЭДС от «-» к «+» совпадает с направлением обхода контура, ЭДС берётся положительной, если нет, то отрицательной.

При расчёте сложных цепей с применением правил Кирхгофа необходимо:

1. *Выбрать произвольное направление токов на всех участках цепи; действительное направление токов определяется при решении задачи: если исконый ток получится положительным, то его направление было выбрано пра-*

вильно, а если отрицательным — его истинное направление противоположно выбранному.

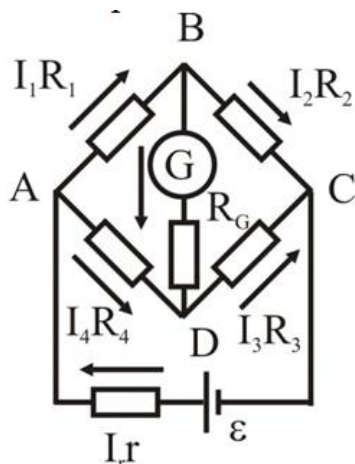
7. *Выбрать направление обхода контура и строго его придерживаться*; произведение IR положительно, если ток на данном участке совпадает с направлением обхода. ЭДС, действующие по выбранному направлению обхода, считаются положительными, против — отрицательными.

10. *Составить столько уравнений, чтобы их число было равно числу искомых величин* (в систему уравнений должны входить все сопротивления и ЭДС рассматриваемой цепи); каждый рассматриваемый контур должен содержать хотя бы один элемент, не содержащийся в предыдущих контурах, чтобы не получались уравнения, которые являются простой комбинацией уже составленных уравнений.

Одним из классических примеров расчета разветвленных цепей с помощью правил Кирхгофа является мост Уитстона. Этот мост, по сути является измерительным прибором, принцип действия которого основан на выравнивании потенциалов выводов двух включенных параллельно ветвей резисторов, в каждой ветви по два резистора. В качестве части одной из ветвей включается резистор, величину которого требуется узнать, а в другую — резистор перестраиваемого сопротивления (реостат или потенциометр).

Сопротивления R_1, R_2, R_3, R_4 образуют «плечи» моста. Между точками А и В моста включена батарея ЭДС ε с сопротивлением r . Между точками В и С включен гальванометр сопротивлением R_G .

Применяя первое правило Кирхгофа для узлов А, В и С, получим:



$$I_r - I_1 - I_4 = 0$$

$$I_2 + I_3 - I_r = 0$$

$$I_1 - I_2 - I_G = 0$$

Применяя второе правило Кирхгофа для контуров ABCA, ABDA, BCDB, получим:

$$I_r r + I_1 R_1 + I_2 R_2 = \varepsilon$$

$$I_1 R_1 - I_G R_G - I_4 R_4 = 0$$

$$I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_G R_G = 0$$

Рисунок 8.4 — Схема для расчёта Моста Уитстона

Решая полученные 6 уравнений, можно найти неизвестные токи. Изменяя известные сопротивления R_2, R_3 и R_4 , можно добиться того, чтобы ток на участке BD был

равен нулю ($I_G R_G = 0$). Тогда

$$I_r = I_2, \quad I_1 R_1 = I_4 R_4,$$

$$I_3 = I_4, \quad I_2 R_2 = I_3 R_{10}.$$

Откуда

$$\frac{R_1}{R_4} = \frac{R_2}{R_3}$$

или

$$R_1 = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_3}. \quad (8.29)$$

Таким образом, в случае равновесного моста при определении искомого сопротивления R_1 батареи, сопротивления гальванометра и батареи роли не играют.

На практике обычно используют реохордный мост Уитстона, где сопротивления R_3 и R_4 представляют собой однородную проволоку (реохорд) с большим удельным сопротивлением, так что отношение R_3/R_4 можно заменить отношением l_3/l_4 . Тогда

$$R_1 = R_2 \frac{l_4}{l_3}.$$

Длины l_3 и l_4 легко измеряются по шкале, а R_2 всегда известно. Таким образом, при помощи реохордного моста всегда можно определить неизвестное сопротивление.

Закон Видемана-Франца.

Металлы обладают большой тепло- и электропроводностью. Это объясняется тем, что носителями тока и энергии являются одни и те же частицы - электроны.

Отношение теплопроводности λ к удельной проводимости ρ для всех металлов при одной и той же температуре одинаково и увеличивается пропорционально температуре:

$$\frac{\lambda}{\rho} = \beta T,$$

где β — постоянная, не зависящая от рода металлов.

По элементарной классической теории электропроводности коэффициент $\beta = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2$, что согласовывалось с опытными данными. Однако Лоренц, применяя распределений Максвелла-Больцмана по скоростям доказал, что $\beta = 2 \left(\frac{k}{e} \right)^2$, что привело к резкому расхождению теории с опытом.

КПД и мощность постоянного тока

Рассмотрим теперь практически важный вопрос об использовании энергии источника тока.

Пусть источник с ЭДС ε и внутренним сопротивлением r замкнут на внешнюю цепь с сопротивлением R .

Сила тока в этой цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \quad (8.30)$$

Во внешней цепи будет выделяться мощность, равная

$$P_{II} = IU = I^2 R = \varepsilon^2 \cdot \frac{R}{(R + r)^2}. \quad (8.31)$$

Мощность самого источника тока P_3 :

$$P_3 = I\varepsilon = I^2(R + r). \quad (8.32)$$

Тогда КПД источника тока равен:

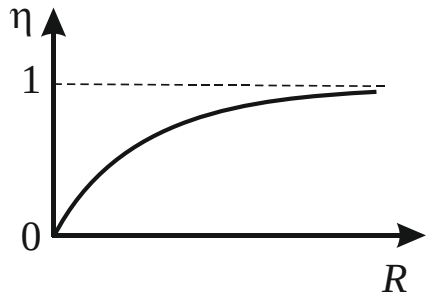
$$\eta = \frac{P_R}{P_{R,r}} = \frac{I^2 R}{I^2(R + r)} = \frac{R}{R + r} = \frac{1}{1 + \frac{r}{R}}$$

или

$$\eta = \frac{P_{II}}{P_3} = \frac{U}{\varepsilon} = \frac{R}{R + r} = \frac{1}{1 + \frac{r}{R}}. \quad (8.33)$$

Так как $U < \varepsilon$, то $\eta < 1$. Зависимость КПД от внешнего сопротивления имеет вид, изображенный на рисунке справа. Задача получить максимальный КПД и максимальную мощность источника тока вполне логична, но проверим математически, выполняема ли она.

Определим величину внешней нагрузки R , при которой мощность будет максимальна. Для этого произведем стандартную процедуру исследования функции $P_{II}(R)$ на экстремум, то есть возьмём производную этой функции и приравняем её к нулю. В итоге получим:



$$\frac{dP_{II}}{dR} = \varepsilon^2 \cdot \frac{[1 \cdot (R + r)^2 - 2 \cdot (R + r) \cdot R]}{(R + r)^4} = \frac{r^2 - R^2}{(R + r)^4} = \frac{r - R}{(R + r)^3} = 0.$$

Откуда видим, что мощность, выделяемая во внешней цепи максимальна при $R = r$. При этом ток в цепи будет равен $I = \frac{\varepsilon}{2r}$, т.е. половине тока короткого замыкания, а наибольшая мощность равна $P_{MAX} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$.

Теперь определим, при каком условии максимален КПД. Полезная мощность зависит от силы тока по параболическому закону:

$$P_{\Pi} = P_{ПОЛН} - P_{ПОТЕРЬ} = \varepsilon I - I^2 R$$

и обращается в нуль $I(\varepsilon - Ir) = 0$ при $I = 0$ — разомкнутой цепи и $I = \varepsilon/R = \varepsilon/r$ — токе короткого замыкания. Зависимость КПД от силы тока выражается следующей формулой:

$$\eta = \frac{P_{\Pi}}{P_3} = \frac{\varepsilon I - I^2 r}{\varepsilon I} = 1 - \frac{r}{\varepsilon} I.$$

Из последней формулы следует, что КПД равен единице при $I = 0$, т.е. при разомкнутой цепи.

А вот теперь пора вспомнить, что потребляемая мощность максимальна при $I = \frac{\varepsilon}{2r}$ и $r = R$. Но при таком токе КПД равен всего 50%!!

Получаем хорошую вилку — большая мощность — маленький КПД и наоборот. В результате перед нами стоит задача — найти баланс между этими показателями. Поэтому в силовых электрических установках важнейшим требованием является выполнение условия $r \ll R$.