

ЛЕКЦИЯ 13-14 ЭЛЕКТРОСТАТИКА (7)

Содержание лекции

Потенциальный характер электростатического поля

Потенциал электрического поля

Эквипотенциальные поверхности

Связь напряжённости поля и потенциала

Теорема о циркуляции вектора напряжённости электростатического поля

Поток вектора

Теорема Остроградского-Гаусса и её применение к расчету электрических полей

Диэлектрики в электрическом поле

Емкостные характеристики

Конденсаторы

Потенциальный характер электростатического поля

Пусть электрическое поле создано неподвижным точечным зарядом Q , расположенным в начале координат. Будем медленно перемещать в этом поле другой точечный заряд q . При этом на него действует со стороны заряда Q сила, направленная вдоль той же линии, что и радиус-вектор. Вычислим работу, совершённую силами поля при перемещении $d\vec{r}$ заряда (другие силы при этом, конечно, тоже могут действовать, но работа этих сил нас не интересует).

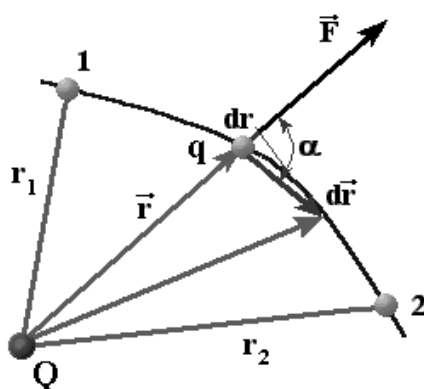


Рисунок 7.1 — К определению работы поля по перемещению электрического заряда

Элементарная работа определяется выражением $dA = (\vec{F}, d\vec{r})$.

По определению скалярного произведения двух векторов получаем

$$dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cos \alpha = k \frac{q \cdot q_0}{r^2} \cdot |d\vec{r}| \cos \alpha. \quad (7.1)$$

Здесь α — угол между силой и направлением перемещения.

Из рисунка видно, что $|d\vec{r}| \cdot \cos \alpha = dr$,

где dr — приращение модуля радиус-вектора.

Следовательно, для элементарной работы имеем

$$dA = k \frac{qq_0}{r^2} dr. \quad (7.2)$$

Полная работа, совершённая силами поля при перемещении заряда из начальной точки 1 в конечную точку 2, равна:

$$A = \int_1^2 dA = \int_{r_1}^{r_2} kqQ \frac{dr}{r^2} = \frac{kqQ}{r_1} - \frac{kqQ}{r_2}, \quad (7.3)$$

где r_1 и r_2 — начальное и конечное расстояния между зарядами Q и q .

Из полученной формулы видно, что

Кулоновские силы являются **консервативными**, то есть их работа не зависит от пути, по которому перемещали заряд q , а зависит только от положения начальной и конечной точек.

Таким образом, сила электростатического взаимодействия является **потенциальной** силой, и для частицы в электростатическом поле можно ввести потенциальную энергию по обычному правилу:

$$A_{12} = U_1 - U_2,$$

где U_1 и U_2 — потенциальная энергия взаимодействия зарядов друг с другом при начальном и конечном взаимном расположении зарядов. В итоге можем записать, что потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов Q и q , находящихся на расстоянии r друг от друга, равна:

$$U = -k \frac{q \cdot q_0}{r}. \quad (7.4)$$

Поле, созданное произвольно распределённым в пространстве неподвижным зарядом тоже, конечно, является потенциальным, так как такое

поле является **суперпозицией полей**, созданных точечными зарядами.

Потенциал электрического поля

Для описания электростатического поля пользуются не потенциальной энергией, а отношением потенциальной энергии, которой обладает пробный заряд в данной точке поля, к величине этого заряда:

Эта величина называется потенциалом электростатического поля.

Тогда работа по перемещению заряда переписывается:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (7.5)$$

Из этой формулы ясен физический смысл потенциала:

Потенциалом поля в какой-либо точке следует назвать работу, совершаемую силами поля при перемещении единичного положительного точечного заряда из этой точки в ту, которая имеет нулевой потенциал (в бесконечность).

$$\varphi = \frac{A_{\infty}}{q_0}. \quad (7.6)$$

Из формулы (7.6) следует, что потенциал поля точечного заряда равен

$$\varphi = \frac{U}{Q_0} = k \frac{q}{r} \quad (7.7)$$

Для поля, созданного произвольным распределением зарядов, справедлив принцип суперпозиции, согласно которому в этом случае потенциал определяется алгебраической суммой потенциалов полей, созданных точечными зарядами, на которые можно разбить заряженное тело:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad (7.8)$$

Следует отметить, что применение принципа суперпозиции для потенциала обычно проще, чем для напряжённости, так как потенциал является скалярной величиной, а напряжённость — векторной.

Эквипотенциальные поверхности

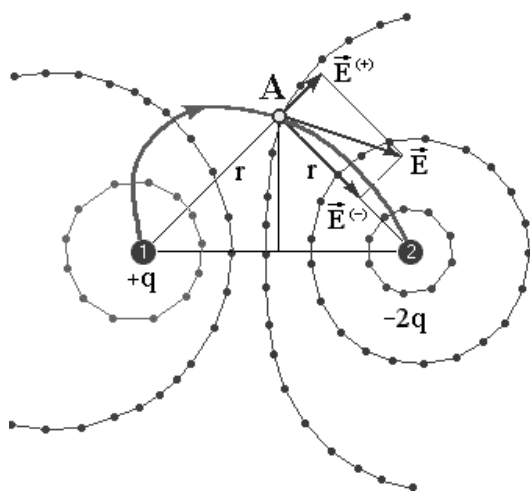
Для графического изображения полей наряду с силовыми линиями применяются поверхности постоянного значения потенциала или эквипотенциальные поверхности.

Эквипотенциальные поверхности представляют собой геометрическое место точек с одинаковым значением потенциала.

Например, эквипотенциальные поверхности поля точечного заряда представляют собой сферы, центр которых расположен в точке, в которой находится заряд. Обычно эти поверхности проводят через одинаковое значение потенциала, например, через 1 В.

- Эквипотенциальные поверхности не пересекаются.
- Эквипотенциальные поверхности перпендикулярны силовым линиям.

Последнее следует из того, что работа при перемещении заряда по эквипотенциальной поверхности равна нулю, в то время как действующая на заряд сила и сонаправленная с ней напряжённость поля в общем случае отличны от нуля. То есть напряжённость поля перпендикулярна любой линии на эквипотенциальной поверхности, а значит нормальна и к самой поверхности.



Для примера слева показана картина эквипотенциальных поверхностей для поля, созданного двумя разными по модулю и знаку точечными зарядами. Исходя из определения понятия силовой линии на рисунке показано построение одной из них. Для этого в точке А, равноотстоящей от обоих зарядов, определяется направление результирующего вектора напряжённости поля, создаваемого обоими зарядами. Поскольку заряды отличаются по модулю в два раза, а

расстояния от точки А до обоих зарядов одинаковы, $|\vec{E}_{(-)}| = 2 \cdot |\vec{E}_{(+)}|$. Направление вектора $\vec{E} = \vec{E}_{(-)} + \vec{E}_{(+)}$ должно совпадать с касательной к силовой линии, проходящей через точку А. Остальной вид силовой линии задаётся формой эквипотенциальных поверхностей, поскольку силовая линия должна их пересекать под прямым углом.

Связь напряжённости поля и потенциала

При перемещении заряда q с одной эквипотенциальной поверхности на другую тело будет совершать работу

$$dA = q[\varphi - (\varphi + d\varphi)] = -qd\varphi. \quad (7.9)$$

С другой стороны, эта работа равна

$$dA = q \cdot (\vec{E}, d\vec{l}) = q \cdot (E_x dx + E_y dy + E_z dz). \quad (7.10)$$

Поскольку потенциал поля является функцией координат x, y, z , то его приращение (дифференциал)

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz. \quad (7.11)$$

Сравнивая выражения (7.10) и (7.11) для работы и имея в виду, что дифференциалы координат являются независимыми приращениями, получим связь между напряжённостью поля и потенциалом:

$$E_x = -\partial \varphi / \partial x; \quad E_y = -\partial \varphi / \partial y; \quad E_z = -\partial \varphi / \partial z.$$

Таким образом, **напряжённость поля равна градиенту потенциала со знаком минус:**

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (7.12)$$

Из полученной формулы следует, что вектор напряжённости поля перпендикулярен эквипотенциальной поверхности и направлен в сторону его наибыстрейшего убывания.

С другой стороны, если работу представить, как интеграл от силы по перемещению, а силу представить как произведение заряда на напряжённость поля, то эта связь выглядит следующим образом:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int (\vec{E}, d\vec{l}). \quad (7.13)$$

Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля

Элементарная работа dA сил поля по перемещению единичного положительного заряда на пути dl равна $dA = qEdl = qEdl \cos \alpha$.

Исходя из того, что кулоновские силы являются консервативными, то их работа по замкнутому контуру тоже равна нулю, а значит, и циркуляция вектора E по замкнутому контуру тоже равна нулю:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0 \quad (7.14)$$

в чем, собственно, и заключается смысл теоремы. Из данной теоремы вытекают два важных следствия:

- линии напряжённости электростатического поля не могут быть замкнутыми, они начинаются или кончаются на зарядах или уходят в бесконечность.
- электростатическое поле является **потенциальным**.

Поток вектора

Само по себе понятие "поток вектора" - это не чистая физика, это МАТЕМАТИКА. В математике существует раздел, называемый "Векторным анализом", занимающийся описанием как скалярных, так и векторных полей. Именно из этого раздела математики появились такие термины, как "градиент", "поток вектора", "циркуляция вектора", "ротор", "дивергенция" и т.д.

Итак, попробуем, минуя строгую и доказательную математику, ввести понятие потока вектора. Рассмотрим в электростатическом поле с напряженностью $\vec{E}$ плоскую поверхность S и выберем определенное направление нормали к ней.

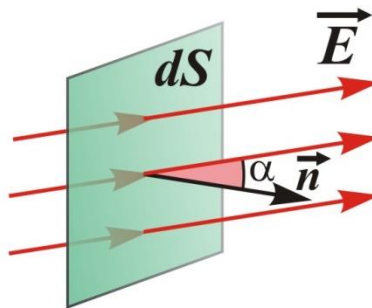


Рисунок 7.2 — Поток вектора $\vec{E}$

Для простоты картины принимаем, что данное электростатическое поле является *однородным*, то есть в любой точке пространства вектор $\vec{E}$ не изменяется ни по модулю, ни по направлению, а силовые линии представляют собой параллельные прямые линии, отстоящие друг от друга на одинаковом расстоянии. И, согласно рисунку 4, вектор напряженности составляет некоторый произвольный угол α с направлением нормали $\vec{n}$. Величину, являющуюся скалярным произведением:

$$d\Phi = (\vec{E}, d\vec{S}) = E_n dS = E dS \cos \alpha \quad (7.15)$$

и называют **поток вектора напряженности** электростатического поля через данную поверхность.

Здесь

$$d\vec{S} = dS \cdot \vec{n},$$

а через E_n обозначена проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали $\vec{n}$.

Стоит напомнить, что результатом скалярного произведения является скаляр.

В зависимости от значения знака косинуса угла между направлением нормали и вектором напряженности, поток вектора может быть как положительным, так и отрицательным - все зависит от выбора направления положительной нормали.

В случае замкнутых поверхностей принято вычислять поток, «вытекающий» из охватываемой поверхности наружу. В этом случае положительной будет считаться нормаль, обращённая из замкнутой поверхности, то есть внешняя нормаль.

В случае неоднородных полей или поверхность, через которую берётся поток, имеет сложную форму, то эту поверхность разбивают на бесконечно малые элементы $d\vec{S}$, каждый из которых можно считать плоским, а поле возле него – однородным. Тогда полный поток через поверхность S равен:

$$\Phi = \int_S E_n dS. \quad (7.16)$$

Этот результат будет справедлив, замкнутой поверхности любой конфигурации и для любого произвольного расположения заряда внутри этой поверхности.

Теорема Остроградского-Гаусса и её применение к расчету электрических полей

Эта теорема выведена математически для векторного поля любой природы русским математиком Остроградским (1801-1862), а затем независимо от него применительно к электростатическому полю — К. Гауссом. Подобная теорема существует и для электростатического поля. Для магнитного поля она звучит так:

Полный поток вектора напряжённости электрического поля *в вакууме* сквозь замкнутую поверхность произвольной формы численно равен алгебраической сумме зарядов, расположенных внутри поверхности, деленной на величину электрической постоянной:

$$\Phi = \int_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n Q_i, \quad (7.17)$$

где

Q_i — заряд, заключенный внутри поверхности;

n — число зарядов.

В общем случае заряд может быть распределен в объёме с некоторой объёмной плотностью зарядов:

$$\rho = \frac{dq}{dV},$$

различной в различных местах пространства. Тогда теорема Остроградского-Гаусса записывается следующим образом:

$$\Phi = \int_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (7.18)$$

Диэлектрики в электрическом поле

Диполь — система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов, расстояние между которыми гораздо меньше расстояний до рассматриваемых точек. Электрический момент диполя $\vec{p} = q\vec{l}$.

Во внешнем электрическом поле на концы диполя действует пара сил, которая стремится повернуть диполь таким образом, чтобы электрический момент развернулся вдоль направления поля. Во внешнем однородном поле на диполь действует вращающий момент $\vec{M} = [\vec{p}\vec{E}]$, а в неоднородном поле диполь втягивается в область более сильного поля.

Диэлектрики — вещества, которые при обычных условиях практически не проводят электрический ток. Диэлектрики состоят из атомов и молекул, которые можно рассматривать как электрические диполи.

Существует 3 основных вида диэлектриков:

- неполярные: симметричные молекулы в отсутствие внешнего электрического поля имеют нулевой дипольный момент;
- полярные: молекулы вследствие асимметрии имеют ненулевой дипольный момент в отсутствие внешнего поля;
- ионные: пространственная решетка с правильным чередованием ионов разных знаков.

Поляризация — изменение состояния вещества, при котором любой элемент его объема во внешнем электрическом поле приобретает дипольный момент.

Мерой поляризации диэлектрика является вектор поляризации или поляризованность, которая определяется как дипольный момент единицы объема диэлектрика:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{V}. \quad (7.19)$$

При поляризации происходит ориентация диполей или появление под действием электрического поля ориентированных по полю диполей. Соответственно 3 видам диэлектриков различают 3 вида поляризации:

- Электронная;
- Дипольная;
- Ионная.

Кристаллы, в которых возникает самопроизвольная ориентация дипольных моментов составляющих его частиц, называются сегнетоэлектриками.

В случае изотропного диэлектрика поляризованность линейно зависит от напряженности электрического поля:

$$\vec{P} = \chi \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (7.20)$$

Если поместить однородный диэлектрик во внешнее электрическое поле E_0 , вследствие поляризации на поверхности диэлектрика появляются связанные заряды с поверхностной плотностью σ' , а поле E' , созданное связанными зарядами, направлено против внешнего поля.

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\varepsilon}, \quad (7.21)$$

где $\varepsilon = 1 + \chi$ - диэлектрическая проницаемость вещества, показывающая, во сколько раз поле ослабляется диэлектриком.

Напряженность электрического поля E зависит от свойств среды и на границе раздела 2-х диэлектриков изменяется скачкообразно. Для описания непрерывного электрического поля вводится вектор электрического смещения (электрической индукции):

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (7.22)$$

Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектрике:

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^N q_i \quad (7.23)$$

или в случае равномерно распределенного заряда:

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV \quad (7.24)$$

Електроёмкость

Опыт показывает, что уединённые проводники, заряженные одним и тем же количеством электричества, имеют разные потенциалы. Увеличение заряда, например, вызывает прямо пропорциональное возрастание его потенциала:

$$q = C\varphi. \quad (7.25)$$

Коэффициент пропорциональности, равный отношению накопленного заряда к потенциалу, называется *электроёмкостью* проводника:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (7.26)$$

Електроёмкость характеризует свойство проводников накапливать электрический заряд.

Из соотношения (7.26) видно, что *электроёмкость уединенного проводника* есть физическая величина, численно равная заряду, который необходимо сообщить проводнику, чтобы увеличить его потенциал на единицу.

Единицей электроёмкости является фарад (Ф).

Конденсаторы

Електроёмкость уединенного проводника зависит от его размеров, формы и диэлектрических свойств окружающей среды и не зависит от материала, агрегатного состояния, формы и размеров полостей внутри проводника. Это связано с тем, что избыточные заряды распределяются на внешней поверхности проводника. Ёмкость также не зависит ни от заряда проводника, ни от его потенциала.

Так, например ёмкость уединённого шара радиусом R , находящегося в однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью ϵ , определяется выражением:

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R. \quad (7.27)$$

Таким образом, ёмкостью в 1 Ф обладал бы уединённый шар, находящийся в вакууме и имеющий радиус:

$$R = \frac{C}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{4 \cdot 3.14 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} \approx 9 \cdot 10^6 \text{ км} ,$$

что примерно в 1400 раз больше радиуса Земли ($R_3 = 6400 \text{ км}$). Электроёмкость Земли составляет примерно 0,7 мФ. Таким образом, электроёмкость 1 фарад — очень большая величина, и поэтому на практике имеют место дольные величины — миллифарад (мФ), микрофарад (мкФ) и т.д.

Это означает, что для того, чтобы проводник обладал большой ёмкостью, он должен иметь большие размеры. На практике же необходимы устройства, обладающие способностью при малых размерах и небольших относительно окружающих тел потенциалах накапливать значительные по величине заряды. Такие устройства называются **конденсаторами**.

Наличие вблизи проводника других тел изменяет его электроёмкость. Под действием поля, создаваемого заряженным проводником, на поднесённом к нему теле будут возникать индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды. Причем заряды, противоположные по знаку заряду проводника, располагаются ближе к проводнику и, следовательно, оказывают большее влияние на его потенциал. В связи с этим потенциал проводника уменьшается, а его электроёмкость, в соответствии с формулой (7.26) - увеличивается.

Однако можно осуществить систему проводников с электроёмкостью практически не зависящей от окружающих тел. В качестве такой системы обычно выступают два разноименно заряженных проводника, разделенных очень тонким слоем диэлектрика.

Электрический **конденсатор** представляет собой два металлических электрода (в конденсаторах их называют обкладками), разделенных слоем диэлектрика (диэлектрики могут быть твердыми, жидкими и газообразными). На ёмкость проводника не должны оказывать влияние окружающие тела, поэтому проводникам придают такую форму, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми зарядами, было сосредоточено в узком зазоре между обкладками конденсатора.

Этому условию удовлетворяют: 1) две плоские пластины; 2) два коаксиальных цилиндра; 3) две концентрические сферы. Поэтому в зависимости от формы обкладок конденсаторы делятся на плоские (рисунок 7.3 а), цилиндрические (рисунок 7.3 б) и сферические (рисунок 7.3 в).

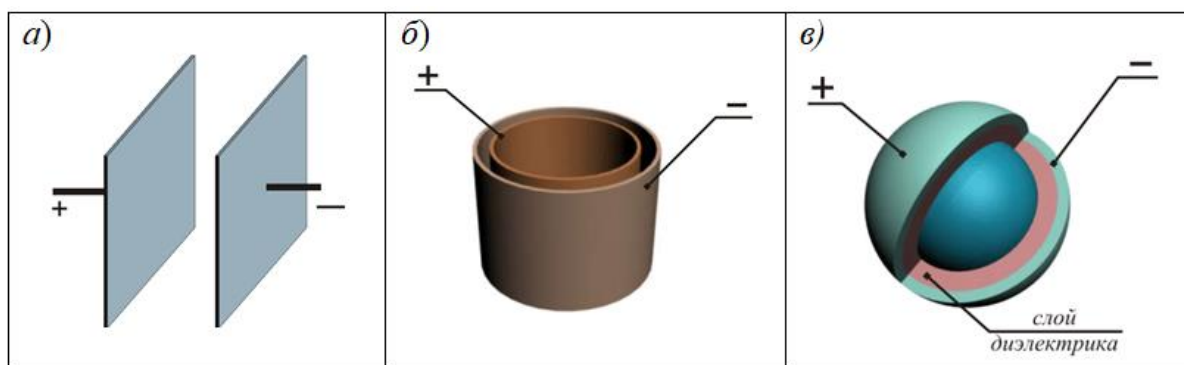


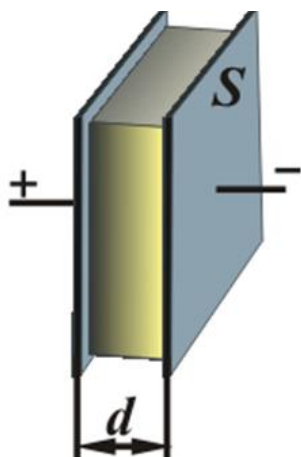
Рисунок 7.3 — Конфигурации конденсаторов

Емкостью конденсатора называется физическая величина, равная отношению заряда конденсатора q к разности потенциалов:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U}. \quad (7.28)$$

Здесь $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ между его обкладками конденсатора.

Величина электроёмкости конденсатора также зависит от формы и размеров обкладок, расстояния между ними и диэлектрических свойств среды, заполняющей пространство между обкладками. Внешние тела **не оказывают** влияния на величину емкости конденсатора, так как электрическое поле конденсатора сосредоточено внутри него.



Простейшим конденсатором является **плоский конденсатор** (рисунок 7.4). Обкладками плоского конденсатора являются две одинаковые плоские проводящие пластины. Пусть S - площадь каждой из пластин, d - расстояние между ними, а ε - диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами. Будем считать, что расстояние между пластинами много меньше их размеров, т.е.

$$d \ll \sqrt{S}.$$

Рисунок 7.4 — Плоский конденсатор.

Предположим, что в результате зарядки конденсатора на одну его пластину помещен заряд $(+q)$, на другую — $(-q)$. Поле каждой из обкладок можно найти по формуле напряжённости электрического поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью (т.к. $d \ll \sqrt{S}$):

Если пластины достаточно велики, то в этом случае можно пренебречь

«краевыми» эффектами – распределениями зарядов и конфигурациями полей вблизи их краев. Тогда заряды распределяются по внутренним поверхностям пластин практически равномерно, с постоянной поверхностной плотностью

$$\sigma = \frac{q}{S}.$$

Разность потенциалов между обкладками равна интегралу от напряженности поля, взятому по любому пути между ними:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 E_l dl. \quad (7.29)$$

Поле, созданное двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными разноименно с одинаковыми плотностями, является однородным, и его напряженность равна

$$E_+ = E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}, \quad (7.30)$$

где $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ — электрическая постоянная.

Напряженность $\vec{E}$ результирующего поля находится согласно принципу суперпозиции:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-. \quad (7.31)$$

Таким образом, для напряжённости поля внутри конденсатора имеем:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{q}{S\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Напряжение (разность потенциалов) на обкладках конденсатора при этом будет равным:

$$U = \varphi_+ - \varphi_- = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0\varepsilon S}. \quad (7.32)$$

Для ёмкости плоского конденсатора окончательно получаем выражение:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}. \quad (7.33)$$

Напряженность поля вне пластин, можно считать равной нулю, если пренебречь краевыми эффектами.

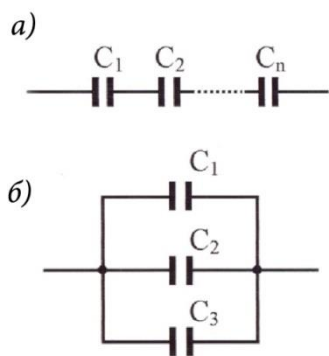


Рисунок 7.5 — Последовательное и параллельное соединения конденсаторов

Во многих случаях для получения нужной емкости конденсаторы объединяют в группу, которая называется батареей. Емкость батареи конденсаторов зависит от схемы соединения составляющих ее конденсаторов. Различают два типа соединения: последовательное (рисунок 7.5 а) и параллельное (рисунок 7.5 б). Возможен также и смешанный тип соединения конденсаторов в батарею.

При последовательном соединении все конденсаторы имеют одинаковый заряд, так как непосредственно от источника тока заряжаются только крайние пластины. При этом заряд левой пластины конденсатора C_2 (рисунок 7.5 а) будет равен по величине и противоположен по знаку заряду правой пластины конденсатора C_1 и т. д.

Напряжения на конденсаторах различной ёмкости будут различными, так как для зарядки одним и тем же количеством электричества конденсаторов различной емкости всегда требуются различные напряжения. Чем больше емкость конденсатора, тем меньшее напряжение необходимо для того, чтобы зарядить этот конденсатор требуемым количеством электричества, и наоборот.

В этом случае мы можем рассмотреть систему из последовательно соединённых конденсаторов разной электроемкости как один эквивалентный конденсатор, между крайними пластинами которого существует напряжение, равное сумме напряжений на всех конденсаторах батареи, а заряд равен заряду любого из конденсаторов группы.

Для вычисления общей емкости при последовательном соединении конденсаторов удобнее всего пользоваться формулой:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (7.34)$$

- При параллельном соединении между пластинами всех конденсаторов будет одна и та же разность потенциалов, так как заряжены они от одного источника. Общий же заряд на всех конденсаторах будет равно сумме зарядов на каждом из конденсаторов. Тогда общая емкость конденсаторов при параллельном соединении равна сумме емкостей всех соединенных конденсаторов:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n. \quad (7.35)$$