ЛЕКЦИЯ 3-4

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
Работа и энергия. Законы сохранения

СОДЕРЖАНИЕ ЛЕКЦИИ

Понятие абсолютно твердого тела. Момент силы и момент инерции твердого тела. Уравнение движения вращающегося вокруг неподвижной оси тела. Применение теоремы Штейнера.

Энергия как универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. Работа силы и ее выражение через криволинейный интеграл. Мощность. Кинетическая энергия механической системы и ее связь с работой внешних и внутренних сил, приложенных к системе. Потенциальная энергия материальной точки во внешнем силовом поле и ее связь с силой, действующей на материальную точку. Консервативные и неконсервативные силы. Движение в центральном поле сил. Закон сохранения энергии в механике. Законы сохранения как следствие симметрии пространства и времени. Система материальных точек. Закон сохранения импульса как фундаментальный закон природы. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса.

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Абсолютно твердое тело

Абсолютно твердое тело - система материальных точек, расстояние между которыми не изменяются в данной задаче. Абсолютно твердое тело обладает только поступательными и вращательными степенями свободы.

Момент силы

Моментом силы $\vec{F}$ ***относительно точки* О*, называется векторное произведение радиуса-вектора*** $\vec{r}$ ***на силу*** $\vec{F}$ **:** $\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]$**.**

Аналогично, ***момент импульса*** $\vec{L}$ ***относительно точки* О *—это векторное произведение радиуса-вектора*** $\vec{r}$ ***на импульс*** $\vec{p}$ **:** $\vec{L} = \left[\vec{r} \cdot \vec{p}\right]$**.**

Основной закон динамики вращательного движения

Динамические характеристики связаны между собой законами (или уравнениями) движения. ***Основной закон динамики*** вращательного движения (уравнение моментов) относительно точки: производная по времени (скорость изменения) от момента импульса системы материальных точек относительно неподвижного начала равна геометрической сумме моментов всех внешних сил относительно того же начала:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{вн}} . \tag{3.1}$$

Сравните: при поступательном движении

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} .$$

Направления векторов $\vec{M}$ и $\vec{L}$ можно найти по правилу правого винта или векторного произведения. Векторное уравнение (2) эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z. \tag{3.2}$$

Здесь L_x и M_x, L_y и M_y, L_z и M_z — проекции векторов моментов импульса и силы на соответствующие оси (неподвижное начало О лежит на рассматриваемой оси), а уравнения (3) называются уравнениями моментов относительно неподвижных осей *x, y, z*.

Момент инерции

Познакомимся с ***моментом инерции.***

Рассмотрим частицу массой *m*, которая движется по окружности радиуса *r*. Момент импульса частицы относительно точки О, лежащей на оси вращения, равен

$$L = m\upsilon r.$$

Пусть ω —угловая скорость, тогда

$$L = mr^2\omega .$$

Если вокруг оси движется система частиц с угловой скоростью ω, то

$$L = \sum m\omega r^2 .$$

Поскольку ω = const для всех частиц, то

$$L = I\omega, \tag{3.3}$$

где

$$I = \sum m r^2 .$$

Величина I, равная сумме произведений масс частиц на квадраты расстояний их до оси вращения, называется моментом инерции системы частиц (тела) относительно этой оси. Взяв производную по времени от L (4), получим

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = M .$$

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси I = const, тогда

$$M = I\,\varepsilon. \quad (3.4)$$

Отсюда можно заключить, что ***момент инерции —количественная мера инертности тела при вращательном движении***.

Теорема Штейнера

$$I = I_c + md^2, \quad (3.5)$$

Здесь I_c — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс;

I — момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии d;

m —масса тела.

Моменты инерции некоторых тел

Моменты инерции однородных тел правильной геометрической формы приведены в таблице 3.1, m — масса тела.

Таблица 3.1 — Моменты инерции простых тел

№ п/п	***Форма тела***	***Положение оси вращения***	***Момент инерции***
1	Полый тонкостенный цилиндр радиуса R	Ось симметрии	mR^2
2	Сплошной цилиндр или диск радиусом R	Ось симметрии	$\frac{1}{2}mR^2$
3	Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}mR^2$
4	Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}mR^2$
5	Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Кинетическая и потенциальная энергии

Еще из курса физики средней школы известно, что величина

$$\frac{m\upsilon^2}{2} = E_{\text{к}} \tag{3.6}$$

называется ***кинетической энергией*** точки (тела) массой m, движущейся со скоростью υ.

Если точка сместилась на расстояние dx под действием силы F_x, то сила над материальной точкой совершила работу $F_x \cdot dx$, в результате этого изменяется и кинетическая энергия $\frac{m\upsilon^2}{2}$, характеризующая движение тела и абсолютное значение его скорости.

Если точка (тело) смещается из положения x_1 до положения x_2, а ее скорость при этом изменилась от υ_1 до υ_2, то изменение кинетической энергии материальной точки при ее перемещении между двумя положениями равно совершенной при этом силой работе:

$$\int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}. \tag{3.7}$$

Из этого соотношения видно, что *кинетическая энергия материальной точки изменяется, если сила не равна нулю!*

Запомним это утверждение, оно нам пригодится в дальнейшем.

Из курса средней школы известно также, что работу против силы тяжести совершает, например, подъемный кран, поднимая груз на высоту h:

$$mgh = A_h. \tag{3.8}$$

Таким образом, работа A_h в данном случае полностью определяется начальным и конечным положением тела в поле силы тяжести, или, иначе говоря, начальной и конечной конфигурацией системы, т.е. расположения всех ее частей относительно системы отсчета.

Вы, очевидно, уже заметили, что мы отсчитывали высоту h от поверхности Земли, т.е. начало координат системы отсчета находится на поверхности Земли. Величина работы A_h не изменилась бы, если поднять груз той же массы на ту же высоту h, например, с крыши здания высотой H. В этом случае работу A_h можно представить в виде разности значений некоторой функции конфигурации системы $E_{\text{п}}$, называемой потенциальной энергией системы (твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек):

$$A_h = E_{\text{п}(H+h)} - E_{\text{п}(H)}.$$

Если взять теперь за нулевой уровень (или нулевую конфигурацию) крышу здания, то получим однозначное значение

$$A_h = E_{\text{п}(H)},$$

т.е. то же, что и в выражении (3.8).

Таким образом, ***потенциальной энергией механической системы называется величина, равная работе, которую совершают все действующие на систему потенциальные (понятие потенциальных или консервативных сил мы введем позднее) силы при переводе системы из рассматриваемого положения в положение, соответствующее ее нулевой конфигурации (нулевому уровню)***.

Закон сохранения импульса

Импульс $\vec{p}$ замкнутой системы материальных точек не изменяется с течением времени.

Замкнутой системой тел называется такая система, которая не взаимодействует с телами, не входящими в систему, то есть на замкнутую систему не действуют внешние силы.

Поскольку внутренние силы системы тел по третьему закону Ньютона попарно уравновешиваются, то только *внешние силы* могут изменить импульс системы, то есть

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{вн}}. \tag{3.9}$$

Если $p_{\text{вн}} = 0$, то $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$, $\vec{p} = \text{const}$ (не изменяется во времени).

Если система не замкнута, например, действуют силы тяжести, но их проекция на горизонтальное направление x равна нулю, то и проекция импульса на горизонтальное направление не будет изменяться со временем.

То есть, если $F_{\text{вн}} = 0$, то и $p_x = \text{const}$. Из закона сохранения импульса системы тел (или точек) следует очень важное заключение о движении центра масс (инерции, тяжести) тела.

Центром масс системы материальных точек называется точка C, радиус-вектор $r_{\text{ц}}$ которой равен:

$$\vec{r}_{\text{ц}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \vec{r}_i}{m}, \tag{3.10}$$

где $m_i, \vec{r}_i$ – масса и радиус-вектор i-ой материальной точки, n – общее число точек в системе, а

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

– масса всей системы. Импульс системы, равен геометрической сумме импульсов материальных точек системы:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = m\vec{\upsilon}_{\text{ц}}.$$

Здесь $\vec{\upsilon}_{\text{ц}}$ – скорость центра масс, равная

$$\vec{\upsilon}_{\text{ц}} = \frac{d\vec{r}_{\text{ц}}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \vec{\upsilon}_i}{m}. \tag{3.11}$$

Если m = const и p = const, то и $\vec{\upsilon}_ц$ = const. Таким образом, из закона сохранения импульса следует, что *при любых процессах, происходящих в замкнутой системе, скорость ее центра масс не изменяется*: $\upsilon_ц$ = const. Или: Центр масс замкнутой системы материальных точек движется *равномерно* и прямолинейно или *покоится* относительно инерциальной системы отсчета.

Закон сохранения механической энергии

Энергия – универсальная мера различных форм движения и взаимодействия.

Механическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической и потенциальной энергий системы:

$$E = E_к + E_п. \tag{3.12}$$

Кинетической энергией системы называется энергия механического движения этой системы. Как уже указывалось, из школьного курса физики известно, что

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{3.13}$$

Потенциальная энергия зависит от положения материальных точек в системе (от конфигурации системы точек) относительно системы отсчета и от положения системы точек в пространстве. Потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной постоянной, не влияющей на изменение энергии. В конкретной задаче эта произвольная постоянная может быть выбрана равной нулю (иногда говорят о *нулевом уровне потенциальной энергии*).

Например, потенциальную энергию тела массой m, поднятого над Землей на высоту h, мы определяем как

$$E_п = mgh, \tag{3.14}$$

при этом на высоте $h = 0$ энергия $E_п = 0$.

Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами вводится понятие *работы силы*.

Механическая работа связана с действующей на систему (или тело) силой, которая и совершает работу:

$$A = \int \vec{F} d\vec{r} = \int_0^s F_\tau ds, \tag{3.15}$$

где s – длина пути, отсчитываемая вдоль траектории от начала рассматриваемого участка, F_τ – проекция силы на направление перемещения $d\vec{r}$ точки ее приложения.

Связь работы и энергии заключается в следующем: ***работа – количественная мера изменения энергии*** (кинетической или потенциальной или той и другой).

Например, при торможении тела его скорость изменилась от υ_1 до υ_3. Изменение кинетической энергии:

$$\Delta E_{\text{к}} = \frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_2^2}{2}, \tag{3.16}$$

при этом была совершена работа

$$A = \Delta E_{\text{к}}. \tag{3.17}$$

Силы, работа которых не зависит от пути, по которому частица переходит из одного положения в другое и работа которых на любом замкнутом пути равна нулю - называются ***консервативными.***

По поводу названия «консервативные силы» Фейнман сказал, что это название не имеет ничего общего с консервативной партией Англии.

Диссипативными (диссипация – это рассеяние) называются силы, суммарная работа которых при любых перемещениях замкнутой системы всегда отрицательна, например, силы трения и силы сопротивления движению в жидкостях и газах. Консервативны силы тяжести, силы упругости, силы электростатического взаимодействия (силы Кулона). Формулировка закона сохранения механической энергии легко запоминается, если понять, что механическая энергия будет сохраняться, когда она не переходит в другие виды энергии, то есть не рассеивается.

Механическая энергия замкнутой системы материальных точек не изменяется с течением времени, если все внутренние силы, действующие в этой системе, консервативны или не совершают работы (о таких силах мы поговорим позже). Если система не замкнута, но внешние и внутренние силы консервативны, то механическая энергия такой системы не изменяется со временем.

Закон сохранения механической энергии позволяет указать условия равновесия консервативных систем: ***в состояниях устойчивого равновесия потенциальная энергия системы имеет минимумы, в состояниях неустойчивого равновесия - максимумы***. Еще одно важное примечание о связи потенциальной энергии и консервативной силы, и можно переходить к закону сохранения момента импульса.

Консервативные силы называются ***потенциальными***, если они стационарны, то есть могут изменяться во времени только вследствие изменения положения рассматриваемой системы относительно системы отсчета. Поле таких сил называется потенциальным. Сила и потенциальная энергия связаны между собой соотношением

$$\vec{F} = -\overline{\text{grad}}\, E_n,$$

а проекции силы выражаются как

$$F_x = -\frac{\partial \text{E}_{\text{п}}}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial z}.$$

Вектор, определяемый выражением:

$$\overline{\text{grad}}\, E_{\text{n}} = \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial z}\vec{k} \tag{3.18}$$

называется ***градиентом*** скалярной величины $E_п$.

И, наконец, последнее замечание о связи энергии и работы. Работа равна изменению кинетической энергии тела:

$$A = \frac{m\upsilon_1^2}{2} - \frac{m\upsilon_2^2}{2}, \qquad (3.19)$$

либо убыли потенциальной энергии

$$A = E_{п1} - E_{п3.}$$

Закон сохранения импульса и закон сохранения энергии, как правило, применяются при решении задач совместно, как это будет проиллюстрировано на ниже представленных примерах.

Закон сохранения момента импульса

Момент импульса замкнутой системы относительно любой неподвижной точки не изменяется с течением времени, то есть

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0; \qquad \vec{L} = \text{const}. \qquad (3.20)$$

Если система не замкнута, но суммарный момент действующих внешних сил относительно неподвижной точки О равен нулю ($\vec{M}_{вн} = 0$), то момент импульса относительно этой точки не изменяется со временем: $\vec{L} = \text{const}$. В случае, когда система вращается вокруг неподвижной оси z, а главный момент внешних сил относительно этой оси $M_{вн.z}= 0$, то момент импульса системы относительно оси вращения не изменяется с течением времени $I_z\omega = \text{const}$.

Осталось отметить связь законов сохранения со свойствами пространства - времени, то есть объяснить их фундаментальность. ***Закон сохранения импульса связан с однородностью пространства*** (свойства пространства одинаковы во всех его точках). ***Закон сохранения механической энергии связан с однородностью времени*** (однородность времени проявляется в том, что законы движения замкнутой системы не зависят от выбора начала отсчета времени). ***Закон сохранения момента импульса связан с изотропностью пространства*** (свойства пространства одинаковы по всем направлениям, то есть не зависят от выбора направления осей координат).

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В основе специальной теории относительности лежат два постулата Эйнштейна:

1) принцип относительности Эйнштейна – все законы природы имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета;

2) принцип постоянства скорости света – скорость света в вакууме не зависит от движения источника света и одинакова во всех инерциальных систе-

мах отсчета. Скорость света в вакууме является предельной. Существование предельной скорости приводит к тому, что время в разных инерциальных системах отсчета течет неодинаково.

Релятивистскими называются эффекты, которые наблюдаются при движении тел со скоростями близкими к скорости света.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета $K\,(x, y, z)$ и $K'\,(x', y', z')$. Система отсчета K неподвижна. Система отсчета K' движется относительно K с постоянной скоростью $\vec{\upsilon}_0$. Обозначим $\beta = \dfrac{\upsilon_0}{c}$.

Преобразования Лоренца

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + \upsilon_0 t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{\upsilon_0}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{x - \upsilon_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{\upsilon_0}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \tag{3.21}$$

позволяют перейти от координат и времени одной инерциальной системы отсчета к координатам и времени другой инерциальной системы. При $\upsilon_0 << c$ ($\beta = \dfrac{\upsilon_0}{c} << 1$) преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея.

Следствия из преобразований Лоренца:

1) относительность одновременности. События, одновременные в одной системе отсчета, неодновременны в другой.

2) длина тел в разных системах отсчета.

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}. \tag{3.22}$$

Длина стержня l, измеренная в системе отсчета, относительно которой он движется, меньше длины l_0, измеренной в системе отсчета, относительно которой он покоится. Линейные размеры тела сокращаются в направлении движения тем больше, чем больше скорость движения тела.

3) промежуток времени между событиями.

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.23}$$

Часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета, идут медленнее покоящихся часов.

Из преобразований Лоренца следует, что в теории Эйнштейна пространство и время взаимосвязаны и образуют единое четырёхмерное пространство. По трем осям откладывают пространственные координаты (x, y, z), а по четвертой оси откладывают временную координату ct. Любое событие характеризуется местом, где оно произошло (координаты x, y, z) и временем t, когда оно произошло. Этому событию в четырехмерном пространстве отвечает точка с координатами (x, y, z, ct). Расстояние между двумя событиями в четырехмерном пространстве называется интервалом и определяется по формуле

$$\Delta s = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}\ . \tag{3.24}$$

Интервал между событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета, т.е. является инвариантом. Инвариантность интервала означает, что пространство и время взаимосвязаны и образуют единую форму существования материи: пространство–время.

Релятивистский закон сложения скоростей

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + \upsilon_0}{1 + \frac{\upsilon_0 \upsilon'_x}{c^2}}\ ,\ \upsilon_y = \frac{\upsilon'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\upsilon_0 \upsilon'_x}{c^2}}\ ,\ \upsilon_z = \frac{\upsilon'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{\upsilon_0 \upsilon'_x}{c^2}}.$$

Основной закон релятивистской динамики материальной точки

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right). \tag{3.25}$$

Полная энергия свободной частицы

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{3.26}$$

Энергия покоя

$$E = m_0 c^2\ . \tag{3.27}$$

Релятивистское выражение для кинетической энергии частицы

$$E_k = E - E_0. \tag{3.28}$$