

5. ШАРТТЫ ОҢТАЙЛАНДЫРУ

Бірқатар инженерлік тапсырмалар басқарылатын айнымалыларға белгілі бір шектеулер болған кезде оңтайландырумен байланысты. Мұндай шектеулер оңтайлы ізделетін аймақтың көлемін айтарлықтай азайтады. Бір қарағанда, рұқсат етілген аймақтың мөлшерін азайту оңтайлы іздеу процедурасын жеңілдетуі керек сияқты көрінуі мүмкін. Алайда, керісінше, оңтайландыру процесі күрделене түседі, өйткені шектеулер болған кезде біз жоғарыда қолданылатын оптималдылық шарттарын да қолдана алмаймыз. Бұл жағдайда тіпті негізгі шарт бұзылуы мүмкін, оған сәйкес нөлдік градиентпен сипатталатын стационарлық нүктеде оңтайлы деңгейге жету керек.

Мысалы, $f(x)=(x-2)^2$ -функцияның шартсыз минимумы $x=2$ стационарлық нүктеде болады. Бірақ егер минимизация мәселесі $x \geq 4$ -ші шектеуді ескере отырып шешілсе, онда $x=4$ нүктесіне сәйкес келетін **шартты минимум** болады. Бұл нүкте $f(x)$ функциясының стационарлық нүктесі емес, өйткені $f'(4)=4$. сондықтан шартты оңтайландыру міндеттері деп аталатын шектеулердегі оңтайлы жағдайдың қажетті және жеткілікті жағдайларын зерттеу керек.

1. Теңдік түріндегі шектеулері бар есептер

Тапсырманы қарастырамыз:

$$f(x) \rightarrow \min, x \in R^n$$

шектеулер жағдайында

$$h_k(x) = 0, k = 1, 2, \dots, K.$$

Есеп шешімінің әдістерінің бірі-Лагранж көбейткіштері әдісі

5.1 Лагранж көбейткіштері әдісі

Лагранж көбейткіштер әдісін қолдана отырып, оңтайландыру нүктелеріндегі оңтайлы нүктелерді шектеулермен теңестіруге мүмкіндік беретін қажетті жағдайлар жасалады. Сонымен қатар, шектеулі тапсырма **Лагранж көбейткіштері** деп аталатын кейбір белгісіз параметрлер пайда болатын балама шартсыз оңтайландыру проблемасына айналады. Мәселені бір шектеумен-теңдікпен қарастырамыз:

$$f(x) \rightarrow \min, x \in R^n \tag{5.1}$$

$$h_1(x) = 0 \tag{5.2}$$

Лагранж көбейткіштер әдісіне сәйкес бұл міндет сөзсіз минимизацияның келесі міндетіне айналады:

$$L(x; \lambda) = f(x) - \lambda h_1(x) \rightarrow \min, x \in R^n. \tag{5.3}$$

$L(x; \lambda)$ Функциясы Лагранж функциясы деп аталады. Мұнда λ Лагранж мультипликаторы.

Берілген мәні $\lambda = \lambda^0$ сөзсіз кем дегенде $L(x, \lambda)$ функциялары бойынша айнымалы x нүктесінде қол жеткізіледі $x = x^0$ және x^0 қанағаттандырады теңдеу

$$h_1(x^0) = 0$$

Содан кейін, көру қиын емес, x^0 (5.1) (5.2) ескере отырып азайтады, өйткені барлық x мәндері үшін (5.2), $h_1(x) = 0$ мен $\min L(x; \lambda) = \min f(x)$

Әрине, $\lambda = \lambda^0$ мәнін сөзсіз минимум нүктесінің координатасы x^0 теңдікке сәйкес келетін етіп таңдау керек (5.2). Мұны егер λ айнымалы деп санасаңыз, λ функциясы ретінде Лагранж функциясының (5.3) сөзсіз минимумын тауып, содан кейін теңдік орындалатын λ мәнін (5.2) таңдасаңыз болады.

Мысалы:

Есепті шешеміз

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min$$

Шектеу жағдайында

$$L(x; \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - \lambda(2x_1 + x_2 - 2)$$

Лагранж функциясын құрыңыз: және оның сөзсіз минимумын анықтаңыз.

Лагранж функциясының стационарлық нүктесін оның градиентінің компоненттерін нөлге теңестіреміз:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2\lambda = 0 \Rightarrow x_1^0 = \lambda,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow x_2^0 = \lambda,$$

Тұрақты нүкте x^0 минимумға сәйкес келетіндігін тексеру үшін Гесс матрицасын Лагранж функциясы ретінде қарастырамыз x :

$$H_L(x; \lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Бұл матрица оң анықталған, өйткені кез-келген нөлдік емес Вектор үшін $u^T = (a, b)$

$$u^T H_L = (a, b) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (2a, 2b) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 2a^2 + 2b^2 > 0$$

Бұл $L = (x, \lambda)$ нүктесінде $x_1^0 = \lambda$ и $x_2^0 = \frac{\lambda}{2}$. жаһандық минимум нүктесі бар. λ Оңтайлы мәні мәндерді ауыстыру арқылы болады x_1^0 мен x_2^0 теңдеуде $2x_1 + x_2 = 2$, яғни

$$2\lambda + \frac{\lambda}{2} = 2 \text{ және } \lambda^0 = \frac{4}{5}$$

Осылайша, шартты минимумға қол жеткізіледі

$$x_1^0 = \frac{4}{5}, x_2^0 = \frac{2}{5}$$

ал минимум мәні $f(x^0; \lambda^0) = \frac{4}{5}$

Жүйені шешу өте жиі кездеседі

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \dots, n$$

айнымалының айқын функциясы ретінде λ алу мүмкін емес. Содан кейін x және λ мәндері $N+1$ белгісіз $N+1$ теңдеулерінен тұратын келесі жүйені шешу арқылы табылады:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \dots, n$$

$$h_1(x^0) = 0$$

Мұндай жүйені кез-келген сандық әдіспен шешуге болады. Әр шешім үшін $(x^0; \lambda^0)$

функциясы ретінде қарастырылатын Лагранж функциясының Гесс матрицасы есептеледі, егер ол оң анықталса, онда шешім ең төменгі нүкте болып табылады. Лагранж көбейткіштер әдісін тапсырма теңдік түрінде бірнеше шектеулерге ие болған жағдайда таратуға болады:

$$f(x) \rightarrow \min, x \in R^n$$

$$h_k(x) = 0, k = 1, 2, \dots, K$$

Лагранж функциясы

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{k=1}^K \lambda_k h_k.$$

Бұл жерде $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ - Лагранж көбейткіштері, яғни, мәндері анықталуы керек белгісіз параметрлер. L жартылай туындыларын x нөлге теңестіре отырып, біз келесі жүйені аламыз

$$\frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_1} = \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_n} = 0$$

Егер сіз осы жүйенің шешімін вектордан функциялар түрінде тапсаңыз λ . қиын болса, оған теңдік шектеулерін қосу арқылы соңғы жүйені кеңейтуге болады:

$$h_1(x) = 0, h_2 = 0, \dots, h_k(x) = 0.$$

$N + K$ белгісіз $N+K$ теңдеулерінен тұратын кеңейтілген жүйенің шешімі I функциясының стационарлық нүктесін анықтайды, содан кейін X функциясы ретінде қарастырылатын Лагранж функциясының Гесс матрицасының элементтерін есептеу негізінде жүргізілетін минимумға немесе максимумға тексеру процедурасы жүзеге асырылады.

5.2 Теңсіздіктер түріндегі шектеулері бар тапсырмалар

Тапсырманы қарастырыңыз

$$(5.4) \quad f(x) \rightarrow \min, x \in R^n$$

Аймақ (5.5) болсын (оны D деп белгілеңіз) бос емес, шектеулі жабық жиын емес. (5.4) шектеулері бар (5.5) тапсырма үшін Лагранж функциясы формуламен аныкталады

$$(5.5) \quad g_i(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, J.$$

Лагранж көбейткіштерінің векторы i :

$$(5.6) \quad L(x; \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^J \lambda_j g_j(x) = f(x) - \lambda^T g(x),$$

мұндағы λ -Лагранж көбейткіштерінің векторы

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_J)^T, g = (g_1, \dots, g_J)^T$$

x есептің жергілікті минимумы нүктесінде (5.4), (5.5) шектеулердің әрқайсысы (5.5) не теңдік түрінде орындалады $g_j(x^*) = 0$, немесе

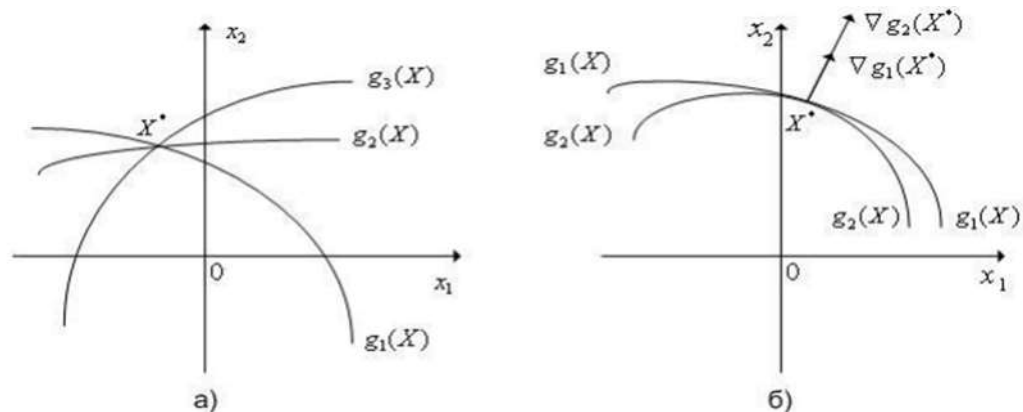
$g_j(x^*) < 0$ теңсіздік түрінде. Бірінші түрдегі шектеулер белсенді шектеулер деп аталады.

Қалған шектеулер белсенді емес шектеулер деп аталады.

Егер нүкте $x^* \in D$ мен $g_{j_k}(x^*) \leq 0, j_k = 1, \dots, s, s \leq J$ шектеулер белсенді болса, онда x нүктесіндегі белсенді шектеулер функциялары градиенттерінің $g_{j_k}(x^*) \leq 0, j_k = 1, \dots, s, s \leq J$ сызықтық тәуелсіздігі шарты

нүктедегі x^* шектеуші функциялардың жүйелілігі шарты деп аталады. Бұл шарт, мысалы, $n=2$ -де x^* нүктесінен өтетін шектеуші функциялардың саны 2-ден аспауы керек және x^* нүктесінде векторлар $\nabla g_1(x), \nabla g_2(x)$ коллинеарлы болмауы керек дегенді білдіреді.

Мысалы, 20 суреттегі жағдайда (а) x^* нүктесінен өтетін шектеуші функциялардың саны өзгермелі параметрлер векторының өлшемінен асып түседі, жағдайда (Б) нүктеде x^* шектеуші $\nabla g_1(x), \nabla g_2(x)$ функциялардың градиенттері коллинеарлы болады.



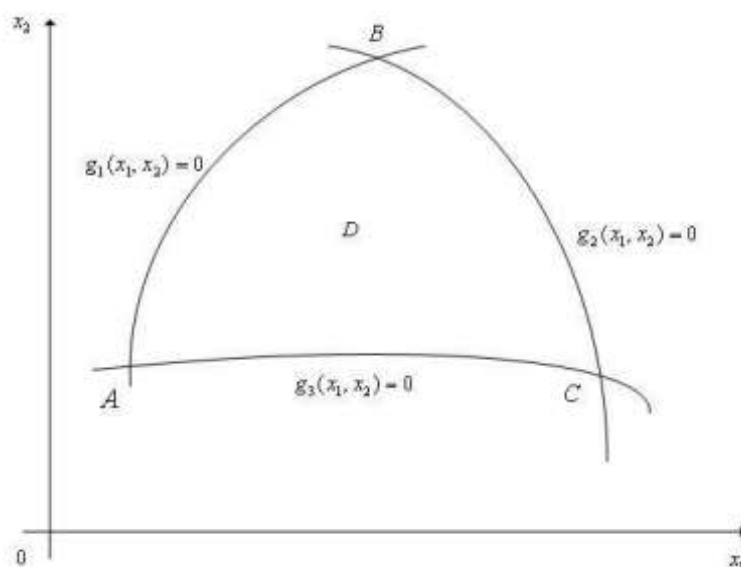
20-сурет. Екі өлшемді тапсырманың жүйелілік шарттары орындалмайтын жағдайлар

Келесі теорема теория мен есептеу практикасында үлкен мәнге ие (теңсіздіктер түріндегі шектеулермен шартты оңтайландыру мәселесі үшін Кун-Таккер теоремасы).

Теорема. Берілген $g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, J$ функциясы $f(x)$ және функциясы бар үздіксіз жеке туындылары белгілі бір нүктеден төңірегі x^* болсын бұл нүкте нүктесі болып табылады жергілікті минимум функциясын $f(x)$ кезінде шектеулер қанағаттандыратын нүктеде x^* талапқа тұрақтылығын шектейтін функциялар $g_j(x^*) \leq 0$ Сонда мұндай неотрицательные Лагранж көбейткіштері $\lambda_1, \dots, \lambda_J$, бұл үшін Лагранж функциясын $L(x, \lambda)$ нүкте x^* болып табылады стационарлық нүктесі б.т

$$\nabla_x L(x^*; \lambda) = \nabla f(x^*) - \sum_{j=1}^J \lambda_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

Теорема Лагранждың барлық факторларының нөлге тең болуына тыйым салмайтынын ескеріңіз. Бұл теореманың мағынасын келесі мысалмен түсіндіруге болады. Екі өлшемді ($n=2$) есепті (5.4), (5.5) қарастырайық, онда D рұқсат етілген мәндерінің ауданы Үш шектеуші функциямен беріледі. D жиынының суретте көрсетілген түрі бар деп есептейік. 21. D аймағының барлық шекаралық нүктелері үшін (сурет. 21) шектеу функцияларының жүйелілік шарттары анық орындалады.



Сурет. 21. Кун-Таккер теоремасына

Егер x^* нүктесі d жиынының ішінде болса (яғни, функцияның тұрақты нүктесі)), онда барлық Лагранж көбейткіштерін нөлге тең қою арқылы теорема әділетті болады.

Енді нүкте x^* доғалардың бірінде болсын, мысалы, АВ доғасында, яғни шектеу болсын $g_1(x) \leq 0$ бұл белсенді шектеу, ал қалған шектеулер белсенді емес шектеулер болып табылады. Содан кейін, осы кезде $g_1(x) = 0$ және теореманың әділдігі Лагранж көбейткіштерінің ережесінен туындайды, егер

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Соңында, x^* нүктесі d жиынының бұрыштық нүктелерінің бірінде болсын, мысалы, в нүктесінде, яғни $g_1(x) \leq 0, g_2(x) \leq 0$ шектеуі белсенді шектеулер, ал $g_3(x) \leq 0$ шектеуі белсенді емес шектеулер болсын. Сонда, $\lambda_3 = 0$ және теореманың әділдігі теңдік түрінің шектеулері бар тапсырма үшін Лагранж көбейткіштерінің ережесінен туындайды.

Кун-Таккер теоремасы оның жағдайында Шартты оңтайландыру мәселесінің орнына (5.4), (5.5) Лагранж функциясын сөзсіз оңтайландыру мәселесін шешуге болатындығын білдіреді (5.6).

Бұл тапсырманың жергілікті минимумының белгілі бір уақытта болуының қажетті шарты x^* бұл шарт

$$\nabla_x L(x^*; \lambda) = \nabla f(x^*) - \sum_{j=1}^J \lambda_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

5.3 Айыппұл функциялары әдістері

Шартты оптимизация мәселесін қарастырсақ

$$(5.7) \quad f(x) \rightarrow \min, x \in R^n,$$

$$g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, J, \quad (5.8)$$

$$h_k(x) = 0, k = 1, 2, \dots, K, \quad (5.9)$$

$$x_i^l \leq x_i \leq x_i^{(u)}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.10)$$

Бұл тапсырма *сызықтық емес бағдарламалау мәселесі* деп те аталады. Х нүктесі сызықтық емес бағдарламалау мәселесінің рұқсат етілген шешіміне сәйкес келеді, егер ол үшін барлық шектеулер орындалса, яғни қатынастар (5.8-5.10).

Сызықтық емес бағдарламалау мәселесінің шешімі болып табылатын x^* векторы үшін кейбір бастапқы жуықтау x^0 белгілі болады деп болжанады. мүмкін қолайсыз Айыппұл функциялары әдістерінде нүктелер тізбегі құрылады $x^m, m = 0, 1, \dots, M$, ол берілген нүктеден басталады x^0 және нүктемен аяқталады x^M , салынған тізбектің барлық нүктелерінің ішінде x^* -ге ең жақсы жақындауды береді. x^m ретінде, еркін функциялар деп аталатын бастапқы мақсатты функцияны түрлендіру арқылы алынған шартсыз минимизацияның көмекші мәселесін шешу нүктелері алынады. Бұл әдістерде шартты оңтайландырудың бастапқы міндеті шартсыз оңтайландыру есептерінің тізбегіне айналады.

Айыппұл функциялары әдістері шектеулер-теңсіздіктерді есепке алу тәсілдеріне сәйкес жіктеледі. Тізбектелген x^m жүйелілік элементтері рұқсат етілген немесе рұқсат етілмеген нүктелер болып табылатындығына байланысты, сәйкесінше ішкі және сыртқы нүктелердің әдістері туралы айтады. Егер x^m тізбегінде екі типтегі нүктелер болса, әдіс аралас деп аталады.

Мәселені шешу қажет болсын (5.7-5.10). Айыппұл функциялары әдісінің негізгі идеясы келесідей. Көмекші функцияны құрыңыз

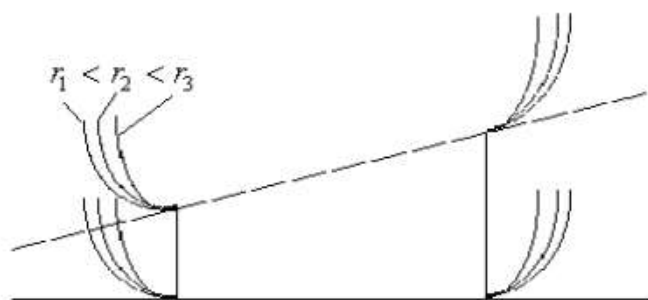
$$Q(x, r, l) = f(x) + \sum_{j=1}^J r_j G_j(g_j(x)) + \sum_{k=1}^K l_k H_k(h_k(x)), \quad (5.11)$$

мәселенің шамамен шешімі (5.7-5.10) функцияның сөзсіз минимизациясы есептерінің тізбегін шешу нәтижесінде алынады

$$Q(x, r, l) \rightarrow \min, x \in R^n \quad (5.12)$$

Сыртқы айыппұл функциялары әдісінде H , G функциялары тиісті шектеу бұзылған кезде нөлден (оңнан) ерекшеленетін етіп таңдалады (сурет. 22). Біз (5.11) азайтатындықтан, бұзушылыққа қарай қозғалыс тиімсіз болады. Берілген әдіспен рұқсат етілген аймақтың ішінде H және G функциялары нөлге тең болуы керек.

Мысалы, теңсіздік шектеулері үшін $G_j(g_j(x)) \rightarrow 0 \quad g_j(x) \rightarrow 0^*$



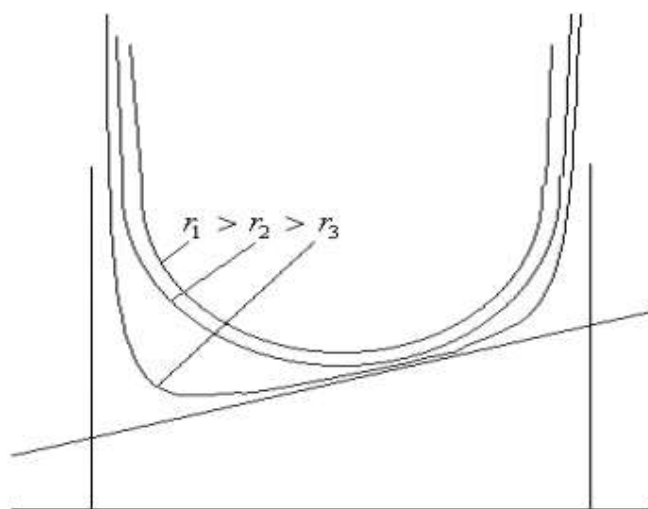
Сурет. 22. Айыппұл функциялары $r_j G_j \leq g_j \leq x$ сыртқы нүкте әдістерінде, $j=1,2,3$ (төменгі – функциялар $r_j G_j(x)$)

Мәселенің шамамен шешімі (5.7-5.10) есептердің реттілігін шешу нәтижесінде алынады (5.12) $r_j, l_k \rightarrow \infty, j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K$.

Кедергі функциялары әдісінде H, G функциялары рұқсат етілген аймақтағы нөлден өзгеше таңдалады және рұқсат етілген аймақтың шекарасына (ішінен) жақындаған кезде олар өсіп, аймақтың шекарасынан тыс жерде іздеуге кедергі келтіреді (сурет. 23). Бұл жағдайда бұл функциялар рұқсат етілген аймақтың ішінде шағын (оң немесе теріс) және шекараның жанында (аймақтың ішінде) үлкен оң болуы керек.

Мысалы, теңсіздіктерді шектеу үшін

$$G_j \leq g_j \leq x \text{ при } g_j \leq x \leq 0.$$



Сур. 23. Айыппұл функцияларының мінез-құлқы $G_j \leq g_j \leq x$ кедергі функциялары әдістерінде бірдей, $j=1,2,3$

Мұндай әдістер ішкі нүкте әдістері деп те аталады. Осы типтегі айыппұл функцияларын қолданатын алгоритмдерде олар іздеу процесінде әрқашан рұқсат етілген аймақтың ішкі нүктесі болып қалуын талап етеді. Мәселенің шамамен шешімі (5.7-5.10) есептердің реттілігін шешу нәтижесінде алынады (5.12)

$$r_j, l_k \rightarrow 0, \quad j = 1, \dots, J, k = 1, \dots, K.$$

жағдайында

Шектеулер үшін-теңдіктер функцияларды таңдау кезінде айыппұлдар әдетте мыналарды талап , $H_k(h_k(x)) \rightarrow 0, h_k(x) \rightarrow 0$ жағдайында

Бұл, мысалы, көрініс функциялары болуы мүмкін:

$$H_k(h_k(x)) = |h_k(x)|,$$

$$H_k(h_k(x)) = (h_k(x))^a,$$

Теңсіздік шектеулері үшін айыппұл функциялары келесідей таңдалады

$$G_j(g_j(x)) = 0, \text{ при } g_j(x) \leq 0,$$

$$G_j(g_j(x)) > 0, \text{ при } g_j(x) > 0.$$

Бұл талап түрдің функцияларына сәйкес келеді:

$$G_j(g_j(x)) = \frac{1}{2} \{g_j(x) + |g_j(x)|\},$$

(5.13)

$$G_j(g_j(x)) = \left[\frac{1}{2} \{g_j(x) + |g_j(x)|\} \right]^a,$$

(5.14)

Түрдің функциялары теңсіздіктерді шектеуге арналған тосқауыл функциялары бола алады:

$$G_j(g_j(x)) = \frac{1}{-g_j(x)},$$

(5.15)

$$G_j(g_j(x)) = -\ln(-g_j(x)).$$

(5.16)

Логарифмдік айыппұл (5.16) бұл қолайсыз нүктелерде анықталмаған кедергі функциясы (яғни, мұндай үшін x бұл $g(x) > 0$). Сондықтан, қолайсыз нүктелермен күресу қажет болған жағдайда (мысалы, берілген бастапқы жуықтау x^0 рұқсат етілмеген кезде), рұқсат етілген аймаққа кіруді қамтамасыз ететін арнайы процедура қажет. Функциямен берілген айыппұл (5.15) рұқсат етілген аймақта теріс мәндерге ие емес. Бұл айыппұл, алдыңғы сияқты, кедергі болып табылады; бұл жағдайда мүмкін емес нүктелердің пайда болуымен байланысты қиындықтар туындайды. Көбінесе функция $Q(x, r, l)$ келесі түрде таңдалады

$$Q(x, r, l) = f(x) - R \sum_{j=1}^J \frac{1}{g_j(x)} + \frac{1}{R} \sum_{k=1}^K (h_k(x))^2,$$

$$Q(x, r, l) = f(x) - R \sum_{j=1}^J \ln(-g_j(x)) + \frac{1}{R} \sum_{k=1}^K (h_k(x))^2,$$

мұндағы оң еркін параметр $R \geq 0$, біртіндеп итерациядан итерацияға дейін төмендейді.

Айыппұл функциялары немесе кедергі функциялары әдістерін іске асырудағы әрекеттер тізбегі келесідей:

1. Тапсырма негізінде (5.7-5.10) функцияны құрамыз (5.11). Бастапқы жуықтау X және айыппұл коэффициенттерінің бастапқы мәндерін таңдаңыз r_j, l_k , Итерация саны, сөзсіз оңтайландырудың дәлдігі, шектеулерді сақтау дәлдігі және т. б.

2. Мәселені шешеміз (5.12).

3. Егер алынған шешім айыппұл функциялары әдісін қолданған жағдайда шектеулер жүйесін қанағаттандырмаса, онда айыппұл коэффициенттерінің мәндерін көбейтіп, мәселені қайтадан шешеміз (5.12). Кедергі функциялары әдісі жағдайында шекарада шешім алу үшін коэффициенттердің мәні азаяды.

4. Егер табылған шешім шектеулер жүйесін белгілі бір дәлдікпен қанағаттандырса, Процесс тоқтайды.

5.4. Факторлар әдісі

Айыппұлдардың ерекше және өте тиімді әдісі-теңсіздіктерді шектеу үшін "кесу квадраты" түріндегі айыппұлға негізделген факторлар (немесе көбейткіштер) әдісі.

Мұндай айыппұл келесідей анықталады:

$$S = R \cdot \langle g(x) \rangle^2, \quad (5.17)$$

мұндағы t кесу келесідей анықталады:

$$\langle t \rangle = \begin{cases} t, & \text{егер } t \geq 0, \\ 0, & \text{егер } t < 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

Бұл айыппұл $Q(X, R)$ функциясының сыртқы және тұрақты нүктелері қолайсыз болуы мүмкін. Екінші жағынан, қолайсыз нүктелер бұл жағдайда рұқсат етілгендермен салыстырғанда қосымша қиындықтар туғызбайды. Олардың арасындағы айырмашылық тек рұқсат етілген нүктелерде айыппұл нөлге тең болады. Факторлар әдісінде әр итерацияда функцияның сөзсіз минимизациясы жасалады

$$Q(x, \sigma, \tau) = f(x) + R \sum_{j=1}^J \{ \langle g_1(x) + \sigma_j \rangle^2 - \sigma_j^2 \} + R \sum_{k=1}^K \{ [h_k(x) + \tau_k]^2 - \tau_k^2 \} \quad (5.19)$$

мұндағы r Тұрақты салмақ коэффициенті, ал бұрыштық жақшалар кесу әрекетін білдіреді. Параметрлер (факторлар) σ_j және τ_k айыппұл шарттарын ауыстыруды жүзеге асырады.

σ Және τ векторларының компоненттері есептеу барысында өзгереді, алайда әрбір көмекші шартсыз есепті шешу барысында осы екі вектор да тұрақты болып қалады. σ Және τ факторларының бастапқы мәндерін нөлге дейін таңдауға болады. $Q(x, \sigma^m, \tau^m)$ функциясының минималды нүктесін арқылы белгілеңіз. m -ші итерацияда қолданылады.

($M+1$) итерацияға өту кезінде факторлар формулалар бойынша қайта есептеледі

$$\sigma_j^{m+1} = \langle g_j(x^m) + \sigma_j^m \rangle, j = 1, \dots, J, \quad (5.20)$$

$$\tau_k^{m+1} = \langle h_k(x^m) + \tau_k^m \rangle, j = 1, \dots, K. \quad (5.21)$$

Қайта есептеу формулалары жаңа субпозицияға көшу кезінде ығысу нәтижесінде шектеулерді бұзғаны үшін айыппұл өседі, нәтижесінде x^m нүктелері рұқсат етілген аймаққа жақындайды.

Әдістің конвергенциясын бақылау үшін реттілік $Q(x, \sigma^m, \tau^m)$ тізбектері қолданылады $\tau^m, f(x^m), g(x^m), h(x^m)$

Негізгі процестің тоқтатылуы, осы тізбектердің кем дегенде біреуінің мүшелері факторларды қайта есептеу және кейіннен сөзсіз азайту кезінде өзгеруді тоқтатқан кезде пайда болады. R оң параметрінің мәні әдістің қасиеттеріне әсер ететінін ескеріңіз, бірақ оны таңдаудың құрылымдық алгоритмі жоқ.