

Қазақстан Республикасы білім және ғылым министрлігі
Қарағанды техникалық университеті

Дәріс тақырыбы: Анықталмаған интегралдар
туралы ұғымдар

«Жоғары математика» кафедрасы
Авторы: доцент қ.а, т.ғ.к Шаихова Г.С

Дәріс жоспары:

- 1. Анықталмаған интеграл, оның қасиеттері. Интегралдар кестесі.*
- 2. Анықталмаған интегралда айнымалыны ауыстыру әдісі.*
- 3. Бөліктеп интегралдау әдісі.*

Анықталмаған интегралдар, олардың қасиеттері.

Егер бір $(a; b)$ аралығының әрбір $x \in (a; b)$ нүктесінде, $F(x)$ функциясы үшін

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{немесе} \quad d(F(x)) = f(x)dx)$$

теңдігі орындалса, онда $F(x)$ функциясы осы аралықта $f(x)$ үшін *алғашқы функциясы* деп аталады.

1-теорема. Егер $F(x)$ функциясы $(a; b)$ аралығында $f(x)$ үшін алғашқы функция болса, онда $f(x)$ функциясы үшін алғашқы функциялар жиыны $F(x) + C$ формуласымен беріледі, мұндағы C -тұрақты сан.

$f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларының $F(x) + C$ жиынын $f(x)$ функциясының *анықталмаған интегралы* деп атап, $\int f(x)dx$ —символымен белгілейді.

Сонымен анықтама бойынша
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Мұндағы, $f(x)$ -*интеграл астындағы функция*, $f(x)dx$ -*интеграл астындағы өрнек*, x - *интегралдау айнымалысы*, $\int$ — *интеграл белгісі* деп аталады.

Анықталмаған интегралдың қасиеттері

1. Анықталмаған интегралдың дифференциалы интеграл астындағы өрнекке, ал анықталмаған интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға тең:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = dF(x) + d(C) = F'(x)dx = f(x)dx$$

және

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

2. Қандайда бір функцияның дифференциалының анықталмаған интегралы осы функция мен кез келген тұрақтының қосындысына тең:

Себебі,

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$$

3. Тұрақты көбейткішті интеграл белгісінің алдына шығаруға болады:

Себебі,

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx, a \neq 0$$

$$\begin{aligned} \int a f(x) dx &= \int a F'(x) dx = \int (a F(x))' dx = \int d(a F(x)) = a \cdot F(x) + C_1 = a \cdot \left(F(x) + \frac{C_1}{a} \right) = \\ &= a(F(x) + C) = a \int f(x) dx \end{aligned}$$

4. Бірнеше алгебралық қосындылардың анықталмаған интегралы
қосылғыштардан алынған анықталмаған интегралдың алгебралық
қосындысына тең

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$F'(x) = f(x)$ және $G'(x) = g(x)$ болсын. Онда

$$\begin{aligned} \int (f(x) \pm g(x))dx &= \int (F'(x) \pm G'(x))dx = \int (F(x) \pm G(x))' dx = \int d(F(x) \pm G(x)) = \\ &= F(x) \pm G(x) + C = (F(x) + C_1) \pm (G(x) + C_2) = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \end{aligned}$$

мұндағы $C_1 \pm C_2 = C$.

5. (Интегралдаудың инварианттық түрі). Егер $\int f(x)dx = F(x) + C$, онда

$\int f(u)du = F(u) + C$, мұндағы $u = \varphi(x)$ - үзіліссіз туындысы бар кез келген функция. x - тәуелсіз, $f(x)$ – үзіліссіз функция және $F(x)$ – оның алғашқы функциясы. Онда $\int f(x)dx = F(x) + C$. Онда $u = u(x)$ функциясын орнына апарып қоямыз, мұндағы $\varphi(x)$ – үзіліссіз - дифференциалданатын функция

$F(u) = F(\varphi(x))$ күрделі функциясын қарастырамыз. Функцияның бірінші дифференциалының инварианттық түрі негізінде

$$dF(u) = F'(u)du = f(u)du$$

Бұдан

$$\int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + C$$

Сонымен анықталмаған интегралдардың формуласы үшін интегралдау айнымалысы оның үзіліссіз туындысы бар кез келген функциясынан немесе айнымалысынан тәуелсіз екендігі дұрыс болады.

Интегралдардың негізгі кестесі

$$1. \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1), \left(\int du = u + C \right);$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C ;$$

$$3. \int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C ;$$

$$4. \int e^u du = e^u + C ;$$

$$5. \left(\int shu du = chu + C \right);$$

$$6. \int \sin u du = -\cos u + C \quad \int \cos u du = \sin u + C; \quad \left(\int chu du = shu + C \right)$$

$$7. \int tg u du = -\ln|\cos u| + C ;$$

$$8. \int ctg u du = \ln|\sin u| + C$$

$$9. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C; \quad \left(\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C \right);$$

$$10. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C; \quad \left(\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C \right);$$

$$11. \left(\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C \right);$$

$$12. \int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$13. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$$

$$14. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + C;$$

$$15. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$$

$$16. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C;$$

$$17. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin \frac{u}{a} + C; \quad 18. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \cdot \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$$

Тікелей интегралдау әдісі

Берілген интегралдардың астындағы функцияға қарапайым түрлендірулер енгізіп және анықталмаған интегралдардың қасиетіне сүйеніп кестелік интегралдарға келтіріп интегралдауға болады. Мұндай интегралдау әдісін *тікелей интегралдау әдісі* деп атайды.

Берілген интегралды кестелік интегралға келтіруі үшін дифференциалды келесі түрде түрлендіру жиі қолданылады («интеграл астына енгізу» операциясы).

Жалпы алғанда, $f'(u)du = d(f(u))$ формуласы интегралдарды есептегенде жиі қолданылады.

Мысалдар:

$$1) \quad \int \frac{x dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 3)}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 3| + C. \quad (\text{интегралдар кестесіндегі 2 формула});$$

$$2) \quad \int (2x-1)^5 dx = \frac{1}{2} \int (2x-1)^5 d(2x-1) = \frac{(2x-1)^6}{12} + C.$$

$$3) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C,$$

$$4) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4-16x^2}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{d(4x)}{\sqrt{2^2 - (4x)^2}} = \frac{1}{4} \arcsin \frac{4x}{2} + C.$$

$$5) \quad \int \cos^2 4x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 8x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 8x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \int \cos 8x d(8x) =$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{16} \sin 8x + C$$

$$6) \quad \int \left(2x + \frac{5}{\cos^2 3x} + 3^{5x} \right) dx = 2 \int x dx - \frac{5}{3} \int \frac{d(3x)}{\cos^2 3x} - \frac{1}{5} \int 3^{5x} d(5x) = x^2 + \frac{5}{3} \operatorname{tg} 3x + \frac{3^{5x}}{5 \ln 3} + C$$

Көрініп тұрғандай, интегралдарды есептегенде «әрбір интеграл астындағы функцияға ыңғайлы түрлендірулер жасау керек».

Айнымалыны ауыстыру әдісі

Айнымалы ауыстыру әдісі интегралдау айнымалысының орнына жаңа айнымалыны енгізу арқылы кестелік интегралдарға келтіру ұғымына әкеледі. Айнымалыны ауыстырудың жалпы ережесі жоқ.

$\int f(x)dx$ интегралын есептеу керек болсын. $x = \varphi(t)$ ауыстыруын қолданайық, мұндағы $\varphi(t)$ – үзіліссіз туындылары бар функция болсын.

Сонда $dx = \varphi'(t)dt$ және анықталмаған интегралды интегралдау

формулаларының инварианттылығы қасиетінің негізінде айнымалы ауыстыру

формуласын аламыз:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \quad (1)$$

(1) формуласын анықталмаған интегралда айнымалыны ауыстыру формуласы деп атайды. Бұл теңдіктің оң жағындағы интегралын есептегеннен кейін, жаңа

t айнымалынан x айнымалысына көшу керек.

Кейбір жағдайда, $t = \varphi(x)$ ауыстыруын қолданған ыңғайлы. Сонда

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int f(t) dt, \text{ мұндағы } t = \varphi(x).$$

1-мысал. $\int e^{\sin x} \cos x dx$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\sin x = t$ ауыстыруын қолданғанда, алатынымыз $\cos x dx = dt$. Бұдан

$$\int e^{\sin x} \cos x dx = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{\sin x} + C.$$

2-мысал. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$ интегралын табу керек.

Шешуі: $\sqrt{2x-9} = t$ болсын, онда $2x-9 = t^2, x = \frac{t^2+9}{2}, dx = t dt$. Сондықтан

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} = \int \frac{t dt}{\frac{t^2+9}{2} \cdot t} = 2 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C.$$

3-мысал. $\int \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$ интегралын табу керек. Шешуі: $t = 4-x^2$ болсын, онда

$$dt = -2x dx, x dx = -\frac{1}{2} dt. \quad \text{Бұдан} \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{4-x^2} + C.$$

4-мысал. $\int \frac{dx}{e^x + 1}$ табу керек. $x = \ln t, dx = \frac{dt}{t}$

Шешуі: $e^x = t$ белгілейміз, онда

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{\overline{dt}}{t+1} = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2 + t} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = -\int \frac{d\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(t + \frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{\frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}} \right| + C = -\ln \left| \frac{t+1}{-t} \right| = \ln \left| \frac{e^x}{e^x + 1} \right| + C.$$

Бөліктеп интегралдау әдісі

$u = u(x)$ және $v = v(x)$ – үзіліссіз туындылары бар функциялар болсын. Онда

$$d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$$

Осы теңдікті интегралдап

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du \quad \text{немесе} \quad \int u dv = uv - \int v du$$

Алынған формула *бөліктеп интегралдау формуласы* деп аталады. Бөліктеп интегралдау формуласын $\int u dv$ интегралын есептеуден, $\int v du$ интегралын есептеу жеңілдірек болған жағдайда қолданылады.

Бөліктеп интегралдау формуласын қолдану үшін интеграл астындағы өрнекті u және dv көбейткіштің көбейтіндісі түрінде жазу керек; u және dv тапқаннан кейін бөліктеп интегралдау формуласы қолданылады. Бөліктеп интегралдау формуласын бірнеше рет қолдануға болады.

Бөліктеп интегралдау арқылы табылатын интегралдардың кейбір түрлерін көрсетейік:

1) $\int P(x)e^{kx} dx$, $\int P(x) \cdot \sin kx dx$, $\int P(x) \cdot \cos kx dx$ түріндегі интегралдар, мұндағы көпмүше, k - сан. Бұл интегралдарда $u = P(x)$ арқылы белгілеп, ал басқа көбейткіштер dv арқылы белгіленеді.

2) $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \cdot \sin kx dx$, $\int P(x) \ln x dx$, $\int P(x) \arctg x dx$, $\int P(x) \cdot dx = dv$ - деп, ал қалған көбейткіштер u арқылы белгіленеді.

3) $\int e^{\alpha x} \cdot \sin b x dx$, $\int e^{\alpha x} \cdot \cos b x dx$ мұндағы a және b сандар, u деп $u = e^{\alpha x}$ функциясын аламыз.

1-мысал. $\int x e^{3x} dx$ табу керек.

Шешуі: $\left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right]$ болсын ($C=0$ деп қарастыруға болады).

Бөліктеп интегралдау формуласы бойынша:

$$\int x \cdot e^{3x} dx = x \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx = \frac{1}{3} x \cdot e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$$

2-мысал. $\int \ln x dx$ Табу керек.

Шешуі: $\left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right]$ болсын. Сондықтан

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - x + C$$

Бақылау сұрақтары:

- 1. Анықталмаған интегралдың анықтамасын тұжырымдаңыз.*
- 2. Анықталмаған интегралдың қасиеттері. Интегралдар кестесі.*
- 3. Анықталмаған интегралда айнымалыны ауыстыру формуласын жазыңыз.*
- 4. Бөліктеп интегралдау әдісі формуласы қалай өрнектеледі?*

ҰСЫНЫЛАТЫН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления.- М.: Интеграл-пресс, 2002.

Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. -М., 2004.

Рябушко А.П. Жоғары математикадан жеке тапсырмалар: 1,2,3 бөлімдер.- Қарағанды, 2011.

Письменный Д.Т. Жоғары математикадан дәрістер жинағы: Толық курс. - М.: Қарағанды, 2012. - 524б.

Тутанов С.Қ., Шаихова Г.С. Жоғары математика 1,2 -бөлім. -Қарағанды, 2011.

Махмеджанов Н.М. Жоғары математика есептерінің жинағы. -Алматы, 2008. -392 б.

Қажыкенова с.Ш, Пак Ю.Н, Шаихова Г.С. Жоғары математика курсы. - Қарағанды, 2020. - 290б.

8.Шаихова Г.С. Төлеутаева Ж.М. Бір айнымалы функциялардың дифференциалдық есептеулірі. - Қарағанды, 2018. -98б.

9. Дүйсек Қ.Е., Қасымбек Е.Ә. Жоғары математика. - Алматы, 2008.

10. К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. Сборник задач по высшей математике. АЙРИС ПРЕСС. - Москва, 2004.- 57 с.

11. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 1. Оқулық. - Алматы. 2007ж. - 280б.

12. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 2. Оқулық. Алматы. 2007ж.

*Назарларыңызға
рахмет!*