Қазақстан Республикасы білім және ғылым министрлігі
Қарағанды техникалық университеті

Кеңістіктегі аналитикалық геометрия

«Жоғары математика» кафедрасы
Авторы: доцент қ.а, т.ғ.к Шаихова Г.С

Дәріс Тақырыбы:
Кеңістіктегі жазықтықтың жалпы теңдеуі.
Кеңістіктегі жазықтықтың, түзудің теңдеулері.
Кеңістіктегі түзу мен жазықтық.

Дәріс жоспары:

1.Жазықтықтың жалпы теңдеуі
2.Берілген үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі
3.Жазықтықтың кесінділер арқылы берілген теңдеуі
4. Жазықтықтың нормаль теңдеуі
5. Жазықтықтың негізгі есептері. Екі жазықтықтың арасындағы бұрышы. Екі жазықтықтың параллельдік және перпендикулярлық шарттары
6. Кеңістіктегі түзудің теңдеулері
7.Түзудің векторлық теңдеуі
8. Кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуі. Түзудің параметрлік теңдеуі
9. Екі нүкте арқылы өтетін кеңістіктегі түзудің теңдеуі.9. Түзудің жалпы теңдеуі
10. Екі түзудің арасындағы бұрышы. Түзулердің перпендикулярлық және параллельдік шарттары
11. Кеңістіктегі түзу мен жазықтық.Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш. Түзу мен жазықтықтың параллель, перпендикуляр болу шарттары
12.Түзудің жазықтықпен қиылысу шарты. Түзудің жазықтыққа тиісті болу шарты

Жазықтықтың жалпы теңдеуі

x, y және z үш белгісізді бірінші дәрежелі теңдеуді қарастырайық:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

Осы теңдеуде *A, B, C* коэффициентері бірдей нөлге тең емес болсын, мысалы,

$B \neq 0$ онда () теңдеуін былайша жазуға болады:

$$A(x-0) + B\left(y + \frac{D}{B}\right) + C(z-0) = 0 \qquad (2)$$

(1) және (2) жазықтықтары $\bar{n} = (A; B; C)$ нормаль векторына перпендикуляр

және $M_1\left(0; \frac{D}{B}; 0\right)$ нүктесі арқылы өтеді.

(1) теңдеуі $Oxyz$ координаталар жүйесіндегі қандайда бір жазықтықты анықтайды. (1) теңдеуі *жазықтықтың жалпы теңдеуі* деп аталады.

.

Жазықтықтың жалпы теңдеуінің дербес жағдайы

1. Егер $D=0$ болса, онда жазықтық $Ax+By+Cz=0$ түрінде болады. Бұл теңдеуді $O(0;\ 0;\ 0)$ нүктесі қанағаттандырады. Демек, бұл жағдайда жазықтық координаталардың бас нүктесі арқылы өтеді.

2. Егер $C=0$ болса, онда жазықтық $Ax+By+D=0$. $\bar{n}=(A;B;0)$ нормаль векторы Oz өсіне перпендикуляр болады. Демек, жазықтық Oz өсіне параллель; егер $B=0$ болса, онда Oy осіне параллель, егер $A=0$ болса, онда Ox осіне параллель болады.

3. $C=D=0$ болса, онда жазықтық $O(0;\ 0;\ 0)$ нүктесі арқылы өтіп Oz жазықтығына параллель болады, яғни $Ax+By=0$ жазықтығы Oz өсі арқылы өтеді. Тура осылайша $By+Cz=0$ және $Ax+Cz=0$ жазықтары сәйкес Ox және Oy өстері арқылыөтеді.

4. Егер $A = B = 0$ онда, (1) теңдеуі $Cz + D = 0$ түріне келеді, яғни $z = -\frac{D}{C}$

Бұл Oxy жазықтығына параллель жазықтық. Тура осылайша, $Ax + D = 0$ және $By + D = 0$ жазықтықтары сәйкес, Oyz және Oxz жазықтықтарына параллель жазықтықтарды анықтайды.

5. $A = B = D = 0$ болса, (1) теңдеуі $Cz = 0$ түріне келеді, яғни Oxy. Бұл $z = 0$ жазықтығының теңдеуі. Тура осылайша, $y=0$ - Oxz жазықтығының теңдеуі, $x=0$ - Oyz жазықтығының теңдеуі.

Берілген үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі

Кеңістікте бір түзудің бойында жататын үш нүкте бір ғана жазықтықты анықтайды. Бір түзуде жатпайтын $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ және $M_3(x_3; y_3; z_3)$ нүктелері арқылы өтетін Q жазықтығының теңдеуін табайық.

Жазықтықтан қалауымызша кез келген $M(x; y; z)$ нүктесін алайық және

$$\overline{M_1M} = (x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1)$$

$$\overline{M_2M_1} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1),$$

$$\overline{M_3M_1} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$$

векторларын құрайық. Бұл векторлар Q жазықтығында жатады, демек, олар компланарлы векторлар. Векторлардың компланар болу шартын қолданып (олардың аралас көбейтіндісі нөлге тең), $\overline{M_1M} \cdot \overline{M_2M_1} \cdot \overline{M_3M_1} = 0$, аламыз, яғни

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

(3) теңдеуі берілген үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі.

Жазықтықтың кесінділер арқылы берілген теңдеуі

Жазықтықтың кесінділік теңдеуін қорытып шығару үшін оның $Ax+By+Cz+D=0$ жалпы теңдеуін пайдаланайық. Бұл теңдеуді мына түрде жазайық: $Ax+By+Cz=-D$,

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1 \qquad (4)$$

Енді $-\frac{D}{A}=a,\ -\frac{D}{B}=b,\ -\frac{D}{C}=c$ деп белгілесек, онда теңдеу мына түрге келеді:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (5)$$

Бұл теңдеу жазықтықтың *кесінділер арқылы берілген теңдеуі* деп аталады. Яғни a,b,c өзіне сәйкес Ox, Oy, Oz өстерінің бойындағы кесінділерді көрсетеді.

(5) теңдеуі координаталар өстеріндегі жазықтықтың кесінділер бойынша теңдеуі деп аталады. Бұл теңдеуді жазықтықтарды салғанда қолданған ыңғайлы.

Жазықтықтың нормаль теңдеуі

$OK=p$ болсын, онда $\overline{e}$ бірлік векторының Ox, Oy, Oz өстерімен жасайтын бұрыштары α, β және γ болады. Онда $\overline{e}=(\cos\alpha, \cos\alpha, \cos\gamma)$ жазықтықпен кез келген $M(x;y;z)$ нүктесін алып, оны координаталар басымен қосайық. Сонда $\overline{r}=\overline{OM}(x;y;z)$ векторын аламыз.

$$\overline{r}\cdot\overline{e}-p=0 \qquad (6)$$

(6) теңдеуі векторлық формадағы *жазықтықтың нормаль теңдеуі* деп аталады. $\overline{r}$ және $\overline{e}$ векторларының координаталары белгісіз, (9) теңдеуін

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\rho=0. \qquad (7)$$

(7) теңдеуі координаталық формадағы жазықтықтың нормаль теңдеуі. (1) жазықтықтың жалпы теңдеуін (7) түріндегі нормальдық теңдеуіне келтіруге болады, яғни (1) теңдеудің екі жағында

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

нормальдық көбейткішке көбейтеміз, мұндағы $\rho-$ның таңбасы жазықтықтың жалпы теңдеуіндегі бос мүшесінің таңбасына қарама-қарсы етіп алынады.

Жазықтықтың негізгі есептері. Екі жазықтықтың арасындағы бұрышы. Екі жазықтықтың параллельдік және перпендикулярлық шарттары

Q_1 және Q_2 жазықтықтары берілсін.

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \;,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \;.$$

Q_1және Q_2жазықтықтарының арасындағы бұрыш осы жазықтықтардан құралған екі жақты бұрыш ұғымымен түсіндіріледі.

Q_1 және Q_2 жазықтықтарының арасындағы бұрыш, осы жазықтықтардың $\overline{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ және $\overline{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ нормаль векторларының арасындағы бұрышына тең.

Сондықтан

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|}$$

немесе

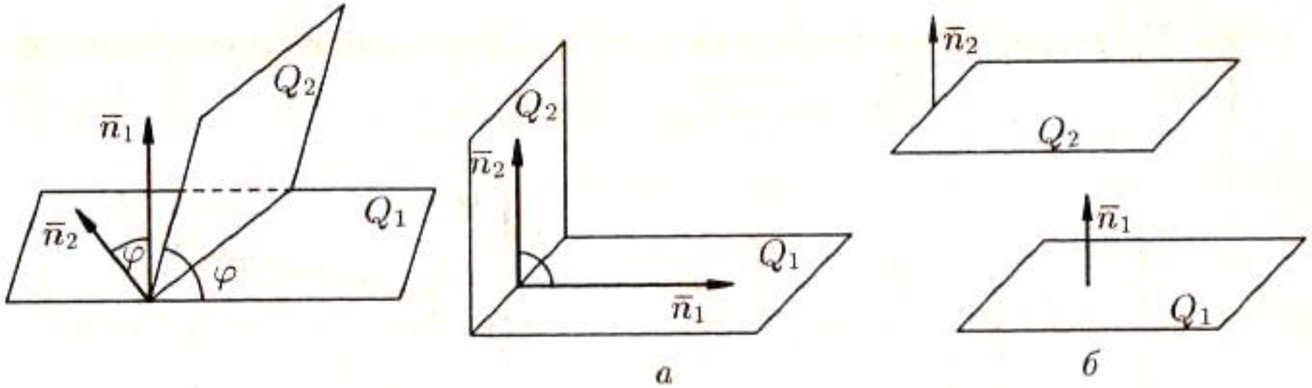
$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \;.$$

Сүйір бұрышты табу үшін осы теңдіктің оң жағын модульге аламыз. Егер Q_1және Q_2 жазықтықтары перпендикуляр болса (1, а - сурет), онда олардың нормаль векторлары перпендикуляр болады, яғни $\overline{n_1} \perp \overline{n_2}$ (және керісінше).

Онда $\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}=0$, яғни $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$. Бұл теңдік екі Q_1 және Q_2 жазықтықтарының перпендикуляр болу шарты.

Егер Q_1 және Q_2 жазықтықтары параллель болса, онда олардың $\overline{n_1}$ және $\overline{n_2}$ нормаль векторлары параллель болады. Онда олардың координаталары пропорционал болады: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

Бұл Q_1 және Q_2 жазықтықтарының параллель болу шарты.



1-мысал. $M_1(1,-2,6), M_2(5,-4,-2)$ нүктелері арқылы өтетін Ox, Oy өстерін тең кесінділер қиып өтетін жазықтықтың теңдеуін жазыңыздар.

Шешуі: Жазықтық теңдеуін $\frac{x}{a}+\frac{y}{в}+\frac{z}{c}=1$ түрінде іздестіреміз.

Есеп шарты бойынша $a = b$, сондақтан жазықтық теңдеуін $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{c}=1$ түрінде жазуға болады. Осы теңдеуге, M_1 және M_2 нүктелерін қоямыз, сонда

$\frac{1}{a}-\frac{2}{a}+\frac{6}{c}=1$, $\frac{5}{a}-\frac{4}{a}-\frac{2}{c}=1$ немесе $-\frac{1}{a}+\frac{6}{c}=1$, $\frac{1}{a}-\frac{2}{c}=1$. Осы жүйеден $c=2$, $a=\frac{1}{2}$ аламыз. Ізделінді теңдеу

$$\frac{x}{\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}+\frac{z}{2}=1$$ Немесе $4x+4y+z-2=0$ болады.

.

Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі мен Q жазықтығы $Ax + By + Cz + D = 0$ теңдеуімен берілсін. M_0 нүктесінен Q жазықтығына дейін d қашықтығы келесі формула арқылы анықталады:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (8)$$

Бұл формуланың қорытындысы $M_0(x_0; y_0)$ нүктесінен $Ax + By + C = 0$ түзуіне дейінгі қашықтық формуласы сияқты болады. M_0 нүктесінен Q жазықтығына дейінгі d қашықтығы $\overline{M_1M_0}$ векторының $\bar{n} = (A; B; C)$ векторына бағытталған проекциясына тең, мұндағы $M_1(x_1; y_1; z_1)$ - Q жазықтығының кез келген нүктесі.

Демек,

$$d = \left|np_{\bar{n}} \overline{M_1M_0}\right| = \left|\frac{\overline{M_1M_0} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|}\right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

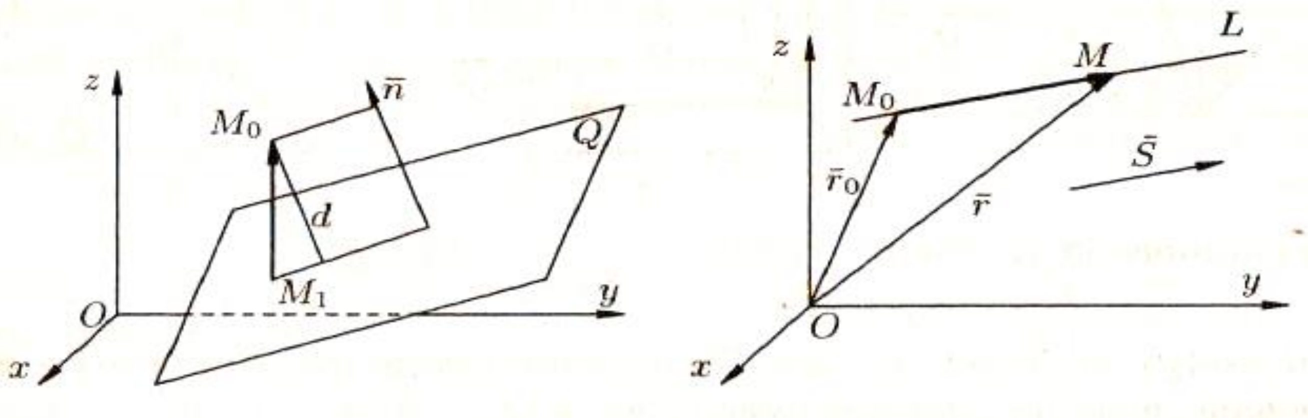
$M_1(x_1; y_1; z_1)$ нүктесі мен Q жазықтығына тиісті болғандықтан

$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, яғни $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$

Сондықтан $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ формуласымен анықталады.

Q жазықтығы $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, түрінде берілсе онда $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесінен Q жазықтығына дейінгі қашықтық

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|$$



5-мысал. $M(2;4:2)$ нүктесінен $2x + 4y + 2z + 6 = 0$ жазықтығына дейінгі арақашықтықты анықтау керек.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (9)$$

формуласы бойынша

$$d=\frac{2\cdot 2+4\cdot 4+2\cdot 2+6}{\sqrt{4+16+4}}=\frac{30}{\sqrt{24}}=\frac{\cancel{30}}{\cancel{2}\sqrt{6}}=\frac{15}{\sqrt{6}}\qquad d=\frac{15}{\sqrt{6}}$$

КЕҢІСТІКТЕГІ ТҮЗУДІҢ ТЕҢДЕУЛЕРІ

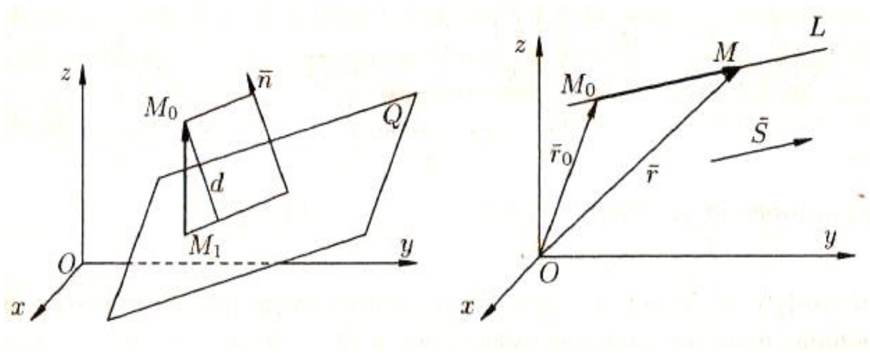
Түзудің векторлық теңдеуі

Түзудің теңдеуі осы түзуде жататын кез келген M_0 нүктесі және осы түзуге параллель $\overline{s}$ векторымен анықталады. $\overline{s}$ векторы түзудің *бағыттауыш векторы* деп аталады. L түзуі өзінің $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесімен және $\overline{S}=(m,n,p)$ бағыттауыш векторымен берілсін. Түзудің бойынан кез келген $M(x; y; z)$ нүктесін белгілеп алайық. M_0 және M нүктелерінің радиус векторларын $\overline{r_0}$ және $\overline{r}$ арқылы белгілейік.

$\overline{r_0}, \overline{r}, \overline{M_0M}$ үш векторы

$$\overline{r}=\overline{r}_0+\overline{M_0M} \qquad (1)$$

L түзуінің бойында жатқан $\overline{M_0M}$ векторы $\overline{s}$ бағыттауыш векторына параллель, сондықтан $\overline{M_0M}=t\cdot\overline{S}$, мұндағы t —параметр деп аталатын скалярлық көбейткіш, ол түзудің М нүктесінен тәуелді әртүрлі мәндер қабылдайды.



(1) формуласын

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{S} \qquad (2)$$

түрінде жазуға болады.

Бұл шыққан теңдеу түзудің *векторлық теңдеуі деп* аталады.

Кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуі. Түзудің параметрлік теңдеуі

$\bar{r} = (x; y; z)$, $\bar{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $t\bar{S} = (tm; tn; tp)$ ескере отырып (2) теңдеуін

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x_0 + tm)\bar{i} + (y_0 + tn)\bar{j} + (z_0 + tp)\bar{k}$$

түрінде жазуға болады.

Бұдан $$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \qquad (3)$$

теңдігі шығады.

Бұл теңдеуді *түзудің параметрлік теңдеуі деп* атайды.

Түзудің канондық теңдеуі

$\overline{S} = (m, n, p)$ векторы L түзуінің бағыттауыш векторы, ал $M_0(x_0; y_0; z_0)$ нүктесі осы түзуде жататын нүктесі. L түзуінің бойындағы $M(x; y; z)$ нүктесін M_0 нүктесімен қосып, $\overline{S}$ векторына параллель $\overline{M_0M}$ векторын жүргіземіз. Сондықтан, $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ және $\overline{S} = (m, n, p)$ пропорционал болады:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (4)$$

(4) теңдеуі **түзудің канондық теңдеуі** деп аталады.

Ескерту: 1) (4) теңдеуін (3) теңдеуіндегі t параметрін шығарып тастап, алуға болады. (3) теңдеуінен $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t$

(4) теңдеуіндегі өрнектердің біреуінің бөлімі нөлге тең болса, онда оған сәйкес алымы нөлге тең болады.

1-мысал: $M_0(2;-4;1)$ нүктесі арқылы өтетін, Oz өсіне перпендикуляр $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z-1}{0}$ түзуінің теңдеуі берілген. Бұл жазықтықтың $z=1$ жазықтығында жататынын білдіреді, сондықтан жазықтығында жататынын білдіреді, сондықтан $z-1=0$.

Екі түзудің бір жазықтықта орналасу шарты. Екі канондық теңдеу берілсін:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \qquad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Бұл екі түзу бір жазықтықта орналасса, онда мына $\overline{M_1M}=\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$, $\bar{s}_1=\{m_1, n_1, p_1\}$, $\bar{s}_2=\{m_2, n_2, p_2\}$ векторлары өзара компланар болады. Сондықтан үш вектордың компланар болу шарты бойынша бұл үш вектордың аралас көбейтіндісі нөльге тең:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (5)$$

Бұл (5) теңдеу екі түзудің бір жазықтықта орналасу шарты.

Екі түздің арасындағы бұрышты φ деп белгілесек, онда екі вектордың арасындағы бұрышты анықтайтын формула бойынша:

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\pm\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} + \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \qquad (8)$$

Егер екі түзу перпендикуляр болса, ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), онда $cos\frac{\pi}{2} = 0$ болады.

Кеңістіктегі екі түздің перпендикулярлық шарты мына түрде болады:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \qquad (9)$$

Егер екі түзу өзара параллель болса, онда $\varphi=0$, яғни олардың бағыттауыш косинустары тең болады немесе шамалары бірдей болады. Яғни кеңістіктегі екі түздің параллельдік шарты мына түрде болады:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \qquad (10)$$

3-мысал: $A(3;6;-7)$, $B(-5;2;3)$ және $C(4;-7;-2)$ нүктелері берілген. С төбесінен жүргізілген медиананың параметрлік теңдеуін тап.

Шешуі: *CD* медианасы *AB* қабырғасын дәл ортасынан бөледі. Сондықтан AB кесіндісінің ортасы *D* нүктесінің координатасын табамыз

$$x_D = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_D = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_D = \frac{z_A + z_B}{2}$$

$$x_D = -1, y_D = 4, z_D = -2.$$

CD медианасының канондық теңдеуін анықтау үшін екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуін табу формуласын қолданамыз:

$$\frac{x - x_C}{x_D - x_C} = \frac{y - y_C}{y_D - y_C} = \frac{z - z_C}{z_D - z_C}, \quad \frac{x-4}{-1-4} = \frac{y+7}{4+7} = \frac{z+2}{-2+2}, \quad \frac{x-4}{-5} = \frac{y+7}{11} = \frac{z+2}{0}.$$

CD түзуінің параметрлік теңдеуін анықтаймыз: $\frac{x-4}{-5} = t, \ \frac{y+7}{11} = t, \ \frac{z+2}{0} = t$

Ізделінді теңдеу: $x = 5t - 7, y = 11t - 7, z = -2.$

4-мысал. Түзудің жалпы теңдеуі берілген: $\begin{cases} x + 2y + 3z + 2 = 0 \\ 2x - 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$

Осы түзудің параметрлік теңдеуі мен бағыттауыш косинустарын табыңыздар.

Шешуі: 1) Бұл есепті шешу үшін осы түзудің кез келген бір нүктесі мен бағыттаушы s векторын білуіміз керек. Ол үшін кез келген x, y, z – тің біреуін 0-ге теңестіріп, мысалы, $z = 0$ деп алып, нүктенің қалған екі координатасын табамыз:

$$\begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ 2x - 2y - 5 = 0 \end{cases}.$$

Осы жүйені шешіп $x = 1, y = -\frac{3}{2}$. Сонда түзудегі нүкте $\left(1; -\frac{3}{2}; 0\right)$.

Енді бағыттаушы векторын табамыз. Ал бағыттаушы векторы екі жазықтықтың нормаль векторларын векторлық көбейту арқылы анықталады:

$$\bar{s} = \overline{n_1} \times \overline{n_2} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4\bar{i} - 7\bar{j} - 6\bar{k}, \qquad \bar{s} = \{-4, -7, -6\}$$

Енді түзудің канондық теңдеуін жазамыз: $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y + \frac{3}{2}}{-7} = \dfrac{z-0}{-6}$.

Осы канондық теңдеуден параметрлік теңдеуге көшеді.

$$\begin{cases} x = -4t + 1 \\ y = -7t - \dfrac{3}{2}, \; t - \text{параметр} \\ z = -6t \end{cases}$$

2) Бағыттауыш косинустарын анықтаймыз: $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{101}}, \cos\beta = \frac{7}{\sqrt{101}}, \cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{101}}.$

Кеңістіктегі түзу мен жазықтық
Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш. Түзу мен жазықтықтың параллель, перпендикуляр болу шарттары

Q жазықтығы $Ax + By + Cz + D = 0$ теңдеуімен L түзуі

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

теңдеуімен берілсін.

Түзу мен жазықтық арасындағы бұрышы деп, оның жазықтыққа түсірілген проекциясы мен түзудің арасындағы екі сыбайлас бұрыштың кез келген біреуін айтады. φ деп Q жазықтығы мен L түзуі арасындағы бұрышты, ал θ бұрышы деп $\bar{n} = (A;\ B; C)$ нормаль векторы мен $\bar{s} = (m;\ n;\ p)$ бағыттауыш векторы арасындағы бұрышты белгілейік (4.10, а-сурет). Сонда $\cos\theta = \frac{\bar{n} \cdot \bar{s}}{|\bar{n}| \cdot |\bar{s}|}$, $\varphi \le \frac{\pi}{2}$ деп есептеп

синус φ бұрышын табамыз:

$$\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$\sin\varphi \geq 0$ болғандықтан

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \qquad (1)$$

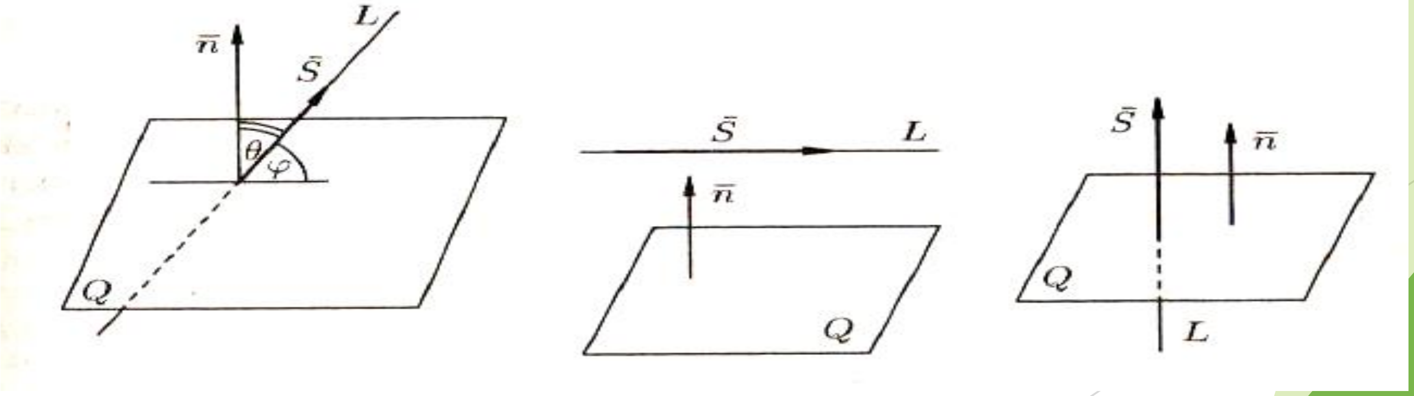
Егер $\varphi=0$ болса, онда $\sin\varphi=0$ болады. Сондықтан (1) теңдік мына түрде болады:

$$\frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} = 0$$

Егер L түзуі Q жазықтығына параллель болса, онда $\bar{n}$ және $\bar{s}$ векторлары перпендикуляр болады, сондықтан , яғни $s \cdot n = 0$

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (2)$$

Бұл түзу мен жазықтықтың параллель болу шарты.



а) б) в)

L түзуі Q жазықтығына перпендикуляр болса, онда бағыттауыш векторымен нормаль векторлары параллель болады болады. Сондықтан

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \qquad (3)$$

түзу мен жазықтықтың перпендикуляр болу шарты.

Түзудің жазықтықпен қиылысу шарты. Түзудің жазықтыққа тиісті болу шарты

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad (4)$$

түзуінің

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (5)$$

жазықтығымен қиылысу нүктесін табу керек болсын. Ол үшін (4) түзудің теңдеуін параметрлік түрде жазамыз:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}$$

x, *y* және *z* өрнектерінің мәндерін (5) жазықтықтың теңдеуіне қойып $A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0$ немесе

$$t(Am+Bn+Cp)+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0 \qquad (6)$$

теңдеуін аламыз. Егер *L* түзуі жазықтыққа параллель болмаса, яғни $Am+Bn+Cp\neq 0$, онда (6) теңдеуінен *t* параметрін табамыз:

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}$$

Содан соң *t* – ның табылған мәнін түзудің параметрлік теңдеуіне қойып, түзудің жазықтықпен қиылысу нүктесін табамыз.

Енді $L \parallel Q$, яғни $Am+Bn+Cp=0$ болған жағдайды қарастырамыз:

а) Егер $F=Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$ болса, онда *L* түзуі жазықтыққа параллель және қиылыспайды (онда (6) теңдеуінің шешімі болмайды, яғни $0\cdot t+F=0$, мұндағы $F\neq 0$).

б) Егер $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$ болса, онда (6) теңдеуі $t\cdot 0+0=0$ болады, *t* - ның кез келген нүктесі оны қанағаттандырады және түзудің кез келген мәні оны қанағаттандырады, онда түзудің кез келген нүктесі түзу мен жазықтықтың қиылысу нүктесі болады. Онда түзу жазықтыққа тиісті деп қорытындылаймыз. Осылайша,

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$$

теңдіктері орындалса, онда ол түзудің жазықтыққа тиісті болу шарты болады.

1-мысал: $P(5;2;-1)$ нүктесінің $2x-y+3z+23=0$ жазықтығына проекциясын анықтау керек.

Шешуі: Нүктенің жазықтыққа проекциясы нүкте болады. Сондықтан нүктенің координаталарын табу керек. Ізделінді нүкте $Q(x;y;z)$ болсын. $2x-y+3z+23=0$ жазықтығының нормаль векторы $\overline{N}=\{2;-1;3\}$ болады. $P(5;2;-1)$нүктесінің $\overline{N}=\{2;-1;3\}$ векторына параллель түзу теңдеуін анықтайық:

$\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{3}$. Осы түзу мен берілген жазықтықтың қиылысу нүктесі ізделінді $Q(x;y;z)$ нүктесі болады. Қиылысу нүктесін табамыз. Ол үшін түзудің параметрлік теңдеуін анықтаймыз: $x=2t+5, y=-t+26, z=3t-1$. Бұл теңдеуді жазықтық теңдеуіне қойып, t параметрін табамыз: $4t+10+t-2+9t-3+23=0, 14t=-28, t=-2$.

t параметрінің мәнін түзудің параметрлік теңдеуіне қойып, $Q(x;y;z)$ нүктесінің координаталарын анықтаймыз: $x=1, y=4, z=-7$.

Ізделінді $Q(1;4;-7)$ нүктесі анықталды.

2-мысал: $3x + y - 2z = 0$ жазықтығына қатысты нүктесіне симметриялы Q нүктесін табыңыздар.

Шешуі: $P(1;3;-4)$ нүктесі арқылы $\overline{N}(3;1;-2)$ векторына параллель өтетін түзудің параметрлік теңдеуін табамыз:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-2}$$

$x = 3t + 1, y = t + 3, z = -2t - 4.$

Осы түзу және берілген жазықтықтың қиылысу нүктесін анықтаймыз:

$3(3t+1) + t + 3 - 2(-2t-4) = 0, 14t = -14, t = -1, x = -2, y = 2, z = -2.$

Бұл нүктені $A(-2;2;-2)$ деп белгілейік. $A(-2;2;-2)$ нүктені PQ кесіндісінің ортасы болады. Сондықтан $x_A = \frac{x_P + x_Q}{2};\ y_A = \frac{y_P + y_Q}{2};\ z_A = \frac{z_P + z_Q}{2}$

Осы нүктеден Q нүктесінің координатасын табамыз:

$$-2 = \frac{1 + x_Q}{2},\ 2 = \frac{3 + y_Q}{2}\ -2 = \frac{-4 + z_Q}{2}. \qquad x_Q = -5 \quad y_Q = 1 \quad z_Q = 0$$

Ізделінді $Q(-5;1;0)$ нүктесі анықталды.

3-мысал: $P(2;-1;3)$ нүктесінің $x = 3t, y = 5t - 7, z = 2t + 2$ түзуіне проекциясын анықтайық.

Шешуі: $P(2;-1;3)$ нүктесінің берілген түзуге проекциясы $Q(x;y;z)$ нүктесі болады. Сондықтан нүктенің координаталарын табу керек. $Q(x;y;z)$ ізделінді нүкте болсын. $\vec{a} = \{3;5;2\}$ векторы – берілген түздің бағыттауыш векторы. Осы векторға перпендикуляр және $P(2;-1;3)$ нүктесі арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін табамыз:

$$3(x-2)+5(y+1)+2(z-1)=0, 3x+5y+2z-7=0.$$

Табылған $3x+5y+2z-7=0$ жазықтығы мен берілген $x = 3t, y = 5t - 7, z = 2t + 2$ түзуінің қиылысу нүктесі $Q(x;y;z)$ болады.

Сондықтан жазықтық және түздің қиылысу нүктесін табамыз:

$$9t+25t-35+4t+4-7=0,\ 38t=38,\ \ t=1,\ \ x=3,\ \ y=5-7=-2,\ \ z=2+2=4.$$

$P(2;-1;3)$ нүктесінің $x = 3t, y = 5t - 7, z = 2t + 2$ түзуіне проекциясы $Q(3;-2;4)$ болады.

4-мысал: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases}$ түзуімен $4x - 2y - 2z = 0$ жазықтығы арасындағы бұрышты табыңыздар.

Шешуі: (1) формуласы бойынша

$$\sin\varphi = \frac{|4\cdot 1 + (-2)\cdot 1 + (-2)\cdot(-2)|}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{16+4+4}} = \frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{24}} = \frac{1}{2},\ \varphi = 30^0.$$

5-мысал: $3x - 4y + 5z + 16 = 0$ жазықтығы мен $\begin{cases} x = -6 + 2t \\ y = 7 - t \\ z = 8 - 3t \end{cases}$ түзуінің қиылысу нүктелерін табайық.

Шешуі: Жазықтық пен түзудің теңдеулерін біріктіріп теңдеуді шешеміз. x,y,z мәнін жазықтықтың теңдеуіне апарып қоямыз:

$$3(-6 + 2t) - 4(7 - t) + 5(8 - 3t) + 16 = 0$$

$$-5t + 10 = 0 \quad t = 2$$

Түзудің теңдеуіндегі t-ның орнына апарып қойсақ, ізделінді қиылысу нүктесі анықталады. $x = -2, y = 5, z = 2.$

6-мысал: $P(3;2-1)$ нүктесінің $x-5y+4z-31=0$ жазықтығына проекциясын табыңыздар.

Шешуі: Есеп P нүктесінен α жазықтығына түсірілген перпендикулярды іздеуге әкеледі. Яғни, осы перпендикулярдың теңдеуін жазамыз.

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+1}{4},$$ параметрлік теңдеуге келтірсек: $$\begin{cases} x=3+t \\ y=2-5t \\ z=-1+4t \end{cases}.$$

Q нүктесі осы теңдеумен жазықтықтың қиылысу нүктесі болады:

$$(3+t)-5(2-5t)+4(-1+4t)-31=0, \quad t=1, \quad Q(4,-3,3).$$

Бақылау сұрақтары:

1.Жазықтықтың жалпы теңдеуі
2. Берілген $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтетін $n(A, B, C)$ нормаль векторға перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін жазыңыздар.
3.Берілген үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі
4.Жазықтықтың кесінділер арқылы берілген теңдеуі
5. Жазықтықтың нормаль теңдеуі, нормаль көбейткіштің формуласы
6. Жазықтықтың негізгі есептері. Екі жазықтықтың арасындағы бұрышы. Екі жазықтықтың параллельдік және перпендикулярлық шарттары
7. Кеңістіктегі түзудің теңдеулері. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтетін $s(A, B, C)$ бағыттауыш векторына параллель түзудің теңдеуі
8.Түзудің векторлық теңдеуі
9. Кеңістіктегі түзудің канондық теңдеуі. Түзудің параметрлік теңдеуі
10. Екі нүкте арқылы өтетін кеңістіктегі түзудің теңдеуі. Түзудің жалпы теңдеуі
11. Екі түзудің арасындағы бұрышы. Түзулердің перпендикулярлық және параллельдік шарттары
21. Кеңістіктегі түзу мен жазықтық.Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш. Түзу мен жазықтықтың параллель, перпендикуляр болу шарттары
13.Түзудің жазықтықпен қиылысу шарты. Түзудің жазықтыққа тиісті болу шарты

Ұсынылатын әдебиеттер тізімі:

1.Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления.- М.: Интеграл-пресс, 2002.
2.Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. -М., 2004.
3.Рябушко А.П. Жоғары математикадан жеке тапсырмалар: 1,2,3 бөлімдер.- Қарағанды, 2011.
4.Письменный Д.Т. Жоғары математикадан дәрістер жинағы: Толық курс. - М.: Қарағанды, 2012. - 524б.
5.Туганов С.Қ., Шаихова Г.С.Жоғары математика 1,2 -бөлім. -Қарағанды, 2011.
6.Махмеджанов Н.М. Жоғары математика есептерінің жинағы. -Алматы, 2008. -392 б.
7.Қажыкенова с.Ш, Пак Ю.Н, Шаихова Г.С. Жоғары математика курсы. - Қарағанды, 2020. - 290б.
9. Шаихова Г.С. Аналитикалық геометрия курсы. - Қарағанды, 2010. -98б.
10. Дүйсек Қ.Е., Қасымбек Е.Ә. Жоғары математика. - Алматы, 2008.
11. К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. Сборник задач по высшей математике. АЙРИС ПРЕСС. - Москва, 2004.- 57 с.
12. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 1. Оқулық. - Алматы. 2007ж. - 280б.
13. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 2. Оқулық. Алматы. 2007ж.

- *Назарларыңызға рахмет!*