Қазақстан Республикасы білім және ғылым министрлігі
Қарағанды техникалық университеті

Дәріс тақырыбы: *Туынды туралы ұғым. Туындының анықтамасы. Туындылар кестесі. Туындының геометриялық, физикалық мағыналары.*

«Жоғары математика» кафедрасы
Авторы: доцент, т.ғ.к Шаихова Г.С

Дәріс жоспары:

1.Туындының анықтамасы. Туындылар кестесі.
2.Туындының геометриялық, физикалық мағыналары.
3.Күрделі функция туындысы
4.Айқындалмаған, параметрлік түрде берілген функция туындысы.
5.Логарифмдік дифференциалдар. Жоғары ретті туындылар. Лопиталь ережесі.

Функцияның туындысы туралы ұғым

$y = f(x)$ функциясы қандайда бір $(a;b)$ интервалында анықталсын.

$x \in (a;b)$ -осы интервалдың белгілі бір нүктесі болсын.

x аргументіне $\Delta x: x + \Delta x \in (a;b)$ өсімшесін берейік, онда функция сәйкес

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

өсімшесін қабылдайды. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасын құрайық, ол $[x, x + \Delta x]$ аралығындағы y функциясының x-ке қарағанда өзгеруінің *орташа жылдамдығын* анықтайды.

Анықтама. $y = f(x)$ функциясының өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатынасының, аргументтің өсімшесі нөлге ұмтылғандағы шегі бар болса, онда оны осы $y = f(x)$ функциясының *туындысы* деп атайды және f_x', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, y_x' символдарының бірі арқылы белгілейді.

Сонымен, анықтама бойынша:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (3)$$

$(a;b)$ интервалының әрбір нүктесінде туындысы болатын $y=f(x)$ функциясы осы интервалда *дифференциалданатын функция* деп аталады, функция туындысын табу амалы – *дифференциалдау амалы* деп аталады.

$y=f(x)$ функциясының $x=x_0$ нүктесіндегі туындысының мәні $f'(x_0)$ $y'\big|_{x=x_0}$ немесе $y'(x_0)$ арқылы белгіленеді.

1-мысал. $y = x^2$ функциясының туындысын тап.

Шешуі:

- x аргументіне Δx өсімшесін береміз;

- функция өсімшесін табамыз: Δy: $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ қатынасын табайық, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$

-осы қатынастың шегін табайық: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$

Осылайшы, $(x^2)' = 2x$.

Туындының физикалық мағынасы. Түзу сызықты қозғалыс жылдамдығы туралы есептеу $V=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ алынған. Бұл теңдікті $V=S_t'$ түрінде қайта жазсақ,

бұл материалдық нүктенің t уақыт мезетіндегі түзу сызықты қозғалысының жылдамдығы осы процестің өту жылдамдығына тең болатындығын көрсетеді.

Жалпылай айтсақ, $y=f(x)$ функциясы қандайда физикалық процесті көрсетсе, онда *туындысы осы процестің өту жылдамдығын көрсетеді.*

Туындының геометриялық мағынасы. Қисыққа жүргізілген жанама туралы есепте жанаманың бұрыштық коэффициенті $k = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ табылған болатын. Осы теңдікті $f'(x) = tg\alpha = k$ түрінде жазамыз, яғни x нүктесіндегі $f'(x)$ туындысы $y = f(x)$ *функциясының графигіне абсциссасы x-ке тең нүктедегі жүргізілген жанамасының бұрыштық коэффициентіне тең*.

Егер M жанасу нүктесінің координатасы $(x_0; y_0)$ болса, онда жанаманың бұрыштық коэффициенті $k = f'(x_0)$ тең. Берілген нүкте арқылы берілген бағытта өтетін түзудің теңдеуінің $y - y_0 = k(x - x_0)$

көмегімен жанаманың теңдеуін жазуға болады:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Жанамаға жанасу нүктесінде жүргізілген перпендикуляр *қисыққа жүргізілген нормаль* деп аталады. Нормаль жанамаға перпендикуляр болғандықтан, оның бұрыштық коэффициенті мынаған тең:

$$k_{норм.} = -\frac{1}{k_{жан.}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Сондықтан нормальдың теңдеуі мынадай түрде жазылады:

(егер $f'(x) \neq 0$ болса).

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Функцияның үзіліссіздігі мен дифференциалдануы арасындағы байланыс

1-теорема. Егер функция қандай да нүктеде дифференциалданса, онда функция сол нүктеде үзіліссіз .

Функцияларды диффереціалдау ережелері

Функцияның туындысының анықтамасы бойынша табу көп жағдайда белгілі бірқиындықтар мен ұштасып жатады. Ал, практикада функцияны белгілі формулалар мен ережелердің көмегімен дифференциалдайды.

$u = u(x)$ және $v = v(x)$ функциялары қандай да $(a;b)$ интервалында

дифференциалданатын болсын.

2-теорема. Екі функцияның қосындысының (айырмасының) туындысы осы функциялардың туындыларының қосындысына (айырмасына) тең:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

3-теорема. Екі функцияның көбейтіндісінің туындысы бірінші көбейткіштердің туындысын екінші көбейткішке көбейтіп, екінші көбейткіштің туындысын бірінші көбейткішке көбейтіп қосқанға:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

4-теорема. $\frac{u(x)}{v(x)}$ бөлшегінің туындысы алымының туындысын бөліміне көбейтіп, бөлімінің туындысын алымына көбейтіп, олардың айырымы бөлімінің квадратына тең болады:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}, v \neq 0 \quad , v(x) \neq 0.$$

Күрделі және кері функцияның туындысы

$y = f(u)$ және $u = \varphi(x)$ болсын. Сонда $y = f(\varphi(x)) -$ аралық u аргументті және x тәуелсіз аргументті күрделі функция.

1-теорема. Егер $u = \varphi(x)$ функциясының x нүктесінде u'_x туындысы, ал сәйкес $u = \varphi(x)$ нүктесінде $y = f(u)$ функциясының y'_u туындысы бар болса, онда $y = f(\varphi(x))$ күрделі функция x нүктесінде y'_x туындысы бар және ол келесі:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad (1)$$

формуласы арқылы табылады.

2-теорема. $y = f(x)$ функциясы $(a;b)$ интервалында қатаң Монотонды болса және осы интервалдың кез келген нүктесінде 0-ге тең емес $f'(x)$ туындысы бар болса, онда берілген функцияға кері $x = \varphi(y)$ функциясы да сәйкес нүктелерде $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$ немесе $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$ теңдіктерімен анықталатын $\varphi'(y)$ туындысы болады.

Дифференциалдау формулалары

Практикада күрделі функцияның туындысын табу жиі кездеседі. Сондықтан, төменде көрсетілген дифференциалдау формулалардың кестесінде «x» аргументі аралық «u» аргументімен ауыстырылған.

1) $(c)' = 0$;

2) $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$, дербес жағдайда $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;

3) $(a^{u})' = a^{u} \cdot \ln a \cdot u'$, дербес жағдайда $(e^{u})' = e^{u} \cdot u'$;

4) $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, дербес жағдайда $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$;

5) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; 6) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$; 7) $(tg\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

8) $(ctg\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$; 9) $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; 10) $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

11) $(arctg\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$; 12) $(arcctg\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

13) $(shu)' = chu \cdot u'$;

14) $(chu)' = shu \cdot u'$;

15) $(thu)' = \dfrac{1}{ch^2 u} \cdot u'$;

16) $(cthu)' = -\dfrac{1}{sh^2 u} \cdot u'$;

Дифференциалдау ережелері

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) $(u \cdot v) = u'v + uv'$, дербес жағдайда $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;

3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, дербес жағдайда $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$;

4) $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, егерде $y = f(u),\ u = \varphi(x)$;

5) $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$, егерде $y = f(x)$ және $x = \varphi(y)$;

Логарифмдік туынды

Көрсеткішті-дәрежелік $u(x)^{\upsilon(x)}$ функцияларынан, басқа да күрделі өрнектерден туынды тапқанда логарифмдік туынды өте ыңғайлы.

$y = f(x)$ *функциясының логарифмдік туындысы* деп осы функцияның логарифмінен алынған туындыны айтады:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Логарифмдік туындыны пайдаланып, $u(x)^{\upsilon(x)}$ көрсеткіштік-дәрежелік функциялар үшін формуланы шығару қиын емес.

$$(u^{\upsilon})' = u^{\upsilon} \cdot \upsilon' \cdot \ln u + u^{\upsilon-1} \cdot u' \cdot \upsilon.$$

Жоғары ретті туындылар

$y = f(x)$ функциясының $y' = f'(x)$ туындысы х-тан тәуелді функция болып табылады және *бірінші ретті туынды* деп аталады.

Егер $f'(x)$ функциясы дифференциалданатын болса, онда оның туындысы *екінші ретті туындысы* деп аталып, y'' (немесе $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\frac{dy'}{dx}$) арқылы белгіленеді. Сонымен, $y'' = (y')'$.

.

Екінші ретті туындыдан алынған туынды бар болса, онда ол үшінші ретті туынды деп аталып, y''' (немесе $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$,….) арқылы белгіленеді.

Сонымен, $y''' = (y'')'$

n- ретті туынды деп, *(n-1)* - ретті туындыдан алынған туынды аталады:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$$

Реті екіден жоғары туындылар *жоғары ретті* туындылар деп аталады.

Төртінші ретті туындыдан бастап рим цифрлары арқылы немесе жақшаға алынған сандармен (y^V немесе $y^{(5)}$ – бесінші ретті туынды) белгіленеді.

Айқындалмаған функцияның туындысы

Егер функция *у-ке* қатысты шешілген $y = f(x)$ түрінде берілсе, функция айқындалған түрде берілген дейміз. *Айқындалмаған түрде берілген* функция деп *у-ке* қатысты шешілмеген $F(x; y) = 0$ түрінде берілген функция түсіндіріледі.

Кез келген $y = f(x)$ айқындалған функцияны $f(x) - y = 0$ теңдеуімен берілген айқындалмаған функция түрінде жаза аламыз, бірақ керісінше жаза алмаймыз.

Теңдеуді y-ке қатысты шешу әрқашан оңай емес, кей жағдайда, тіпті мүмкін емес (мысалы, $y+2x+\cos y-1=0$ немесе $2^{y}-x+y=0$).

Егер айқындалмаған функция $F(x;y)=0$ түрінде берілсе, *y-тен x* бойынша туынды табу үшін теңдеуді y- ке қатысты шешу қажет емес: *ол үшін y-ті x-тан тәуелді деп алып, берілген теңдеуді x бойынша дифференциалдап, алынған теңдеуді* y' – қа қатысты шешу жеткілікті.

Айқындалмаған функцияның туындысы x аргументі мен y функциясы арқылы өрнектеледі және мына формула арқылы есептеледі:

$$y'_x=-\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}.$$

Мысал. $x^3+y^3-3xy=0$ Теңдеуімен берілген y функциясының туындысын тап.

Шешуі: y функциясы айқындалмаған $x^3+y^3-3xy=0$ теңдігін x бойынша дифференциалдайық. Алынған

$$3x^2+3\cdot y^2\cdot y'-3(1\cdot y+x\cdot y')=0$$

Қатынасынан $y^2\cdot y'-x\cdot y'=y-x^2$ болатындығы, яғни $y'=\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$.

Параметрлік түрде берілген функцияның туындысы

$y=f(x)$ функциясы $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases}$ параметрлік функцияларымен берілсін.

Егер $x(t)$ және $y(t)$ функцияларының t_0 нүктесінде туындылары бар болса, $x'(t_0)\neq 0$ онда $f(x)$ функциясы $x_0=x(t_0)$ нүктесіндегі туындысы болады, бұл туынды келесі формуламен анықталады:

$$y'(x_0)=\frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} \text{ немесе } y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$$

Екінші ретті туындысы келесі формуламен анықталады:

$$y''_{xx} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Дифференциал туралы ұғым

$y = f(x)$ функциясының x нүктесінде нөлден өзгеше туындысы бар болсын. Сонда, функция оның шегі мен ақырсыз аз функция арасындағы байланыс туралы теорема бойынша $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, $\Delta x \to 0$ ұмтылғанда $\alpha \to 0$ ұмтылады. Екі жағын $\Delta x -$ке көбейтсек

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

теңдігін аламыз. Осылайша, Δy функция өсімшесі $\Delta x \to 0$ ұмтылғанда, ақырсыз аз функция болып табылатын $f'(x)\cdot\Delta x$ пен $\alpha\cdot\Delta x$ екі

қосылғыштың қосындысын береді. Сонымен қатар, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\cdot\Delta x}{\Delta x}=f'(x)\neq 0$

болғандықтан, бірінші қосылғыш Δx –пен бірдей ретті ақырсыз аз

функция, ал екінші қосылғыш Δx – ке қарағанда жоғары ретті ақырсыз

аз функция:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0$$

Бақылау сұрақтары:

1.*Туындының анықтамасы. Туындылар кестесі.*
2. *Туындының геометриялық, физикалық мағыналары.*
3. *Күрделі функция туындысы*
4. *Айқындалмаған, параметрлік түрде берілген функция туындысы.*
5. *Логарифмдік дифференциалдар. Жоғары ретті туындылар.*

ҰСЫНЫЛАТЫН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления.- М.: Интеграл-пресс, 2002.
2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. -М., 2004.
3. Рябушко А.П. Жоғары математикадан жеке тапсырмалар: 1,2,3 бөлімдер.- Қарағанды, 2011.
4. Письменный Д.Т. Жоғары математикадан дәрістер жинағы: Толық курс. - М.: Қарағанды, 2012. - 524б.
5. Тутанов С.Қ., Шаихова Г.С.Жоғары математика 1,2 -бөлім. -Қарағанды, 2011.
6. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика есептерінің жинағы. -Алматы, 2008. -392 б.
7. Қажыкенова с.Ш, Пак Ю.Н, Шаихова Г.С. Жоғары математика курсы. - Қарағанды, 2020. -290б.
8 . Шаихова Г.С. Төлеутаева Ж.М. Бір айнымалы функциялардың дифференциалдық есептеулрі. - Қарағанды, 2018. -98б.
9. Дүйсек Қ.Е., Қасымбек Е.Ә. Жоғары математика. - Алматы, 2008.
10. К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. Сборник задач по высшей математике. АЙРИС ПРЕСС. - Москва, 2004.- 57 с.
11. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 1. Оқулық. - Алматы. 2007ж. - 280б.
12. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 2. Оқулық. Алматы. 2007ж.

Назар қойып тыңдағандарыңызға рахмет!