Дәріс тақырыбы: *Функция диффренциалы, оны жуықтап есептеуде қолдану.*

«Жоғары математика» кафедрасы
Авторы: доцент, т.ғ.к Шаихова Г.С

Дәріс жоспары:

1. Дифференциал туралы ұғым

2. Жоғары ретті дифференциалдар

3.Функция диффренциалы оны жуықтап есептеуде қолдану.

Дифференциал туралы ұғым

$y = f(x)$ функциясының x нүктесінде нөлден өзгеше туындысы бар болсын. Сонда, функция оның шегі мен ақырсыз аз функция арасындағы байланыс туралы теорема бойынша $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, $\Delta x \to 0$ ұмтылғанда $\alpha \to 0$ ұмтылады. Екі жағын $\Delta x -$ ке көбейтсек

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

теңдігін аламыз. Осылайша, Δy функция өсімшесі $\Delta x \to 0$ ұмтылғанда ақырсыз аз функция болып табылатын $f'(x)\cdot\Delta x$ пен $\alpha\cdot\Delta x$ екі

қосылғыштың қосындысын береді. Сонымен қатар, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\cdot\Delta x}{\Delta x} = f'(x)\neq 0$

болғандықтан, бірінші қосылғыш Δx –пен бірдей ретті ақырсыз аз

функция, ал екінші қосылғыш Δx –қарағанда жоғары ретті ақырсыз

аз функция:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\alpha = 0$$

Сондықтан, $f'(x)\cdot\Delta x$ бірінші қосылғышын Δy функция өсімшесінің бас бөлігі деп атайды.

$y=f(x)$ функциясының x нүктесіндегі дифференциалы деп функция туындысы мен аргумент өсімшесінің көбейтіндісіне тең функция өсімшесінің бас бөлігі аталады деп және dy немесе $df(x)$ арқылы белгіленеді.

$$dy=f'(x)\cdot\Delta x \qquad (1)$$

dy дифференциалын *бірінші ретті дифференциал* деп те атайды.

Тәуелсіз x айнымалысының дифференциалын, яғни $y=x$ функциясының дифференциалын табайық.

$y' = x' = 1$ болғандықтан, (1) формуласы бойынша $dy = dx = \Delta x$ болатындығын аламыз, яғни тәуелсіз айнымалының дифференциалы осы айнымалының өсімшесіне тең: $dx = \Delta x$

Сондықтан да (1) формуласын мына түрде жазуға болады:

$$dy = f'(x)dx \qquad (2)$$

Басқаша айтқанда, *функция дифференциалы осы функцияның туындысы мен тәуелсіз айнымалының дифференциалының көбейтіндісіне тең.*

(2) формуласынан $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ теңдігі шығады.

Туындының $\dfrac{dy}{dx}$ белгілеуін енді dy пен dx дифференциалдарының

қатынасы ретінде қарастыруға болады.

Дифференциалдың қасиеттері

$u(x)$ және $\upsilon(x)$ функциялары х нүктесінде дифференциалданатын функциялар, сонда:

1) $dC = 0$ мұндағы С – константа
2) $d(\alpha u) = \alpha \cdot du,$ мұндағы $\alpha -$тұрақты
3) $d(u \pm \upsilon) = du \pm d\upsilon.$
4) $d(u \cdot \upsilon) = ud\upsilon + \upsilon du.$
5) $d\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right) = \dfrac{\upsilon du - ud\upsilon}{\upsilon^2}$ мұндағы $\upsilon(x) \neq 0.$

Мысалы. $y = e^{x^3}$ функциясының диференциалын табыңдар:

$dy = y'dx,$ біздің жағдайымызда $dy = \left(e^{x^3}\right)' dx = 3x^2 \cdot e^{x^3} dx.$

Мысалы. $x_0 = 2$ нүктесіндегі $y = x^3 - 3x + 1$ функциясының

дифференциалы мен өсімшесін табыңдар, егер $\Delta x = 0{,}1.$

Ең алдымен Δy өсімшесін жалпы түрде табамыз.

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \left[(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1\right] - \left(x^2 - 3x + 1\right) = x^2 + 2x\Delta x +$$

$$+ (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 - x^2 + 3x - 1 = 2x\Delta x - 3\Delta x + (\Delta x)^2 = (2x - 3)\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Шыққан өрнектен Δy өсімшесінің x_0 нүктесіндегі сызықтық бөлігі

$(2x_0 - 3)\Delta x$ тең. Берілген функцияның дифференциалы, анықтама бойынша

$dy = (2x-3)\Delta x$ немесе $dy = (2x-3)dx.$ тең болады.

Шыққан Δy өсімшесінің екінші қосылғышы, яғни $(\Delta x)^2$ бірінші

қосылғышқа қарағанда жоғары ретті шексіз аз шама dy диференциалын бірден

$dy = y'dx$ формуласымен табуға болады, сонда

$dy = (x^2 - 3x + 1)'dx = (2x-3)dx.$ $x_0 = 2$ нүктесіндегі $\Delta x = 0{,}1$ болғанда

Δy табамыз:

$$\Delta y = (2 \cdot 2 - 3) \cdot 0{,}1 + (0{,}1)^2 = 0{,}1 + 0{,}01 = 0{,}11, dy = 0{,}1$$

Жоғары ретті дифференциалдар

$y = f(x)$ функциясы (a,b) интервалында дифференциалданатын функция болсын. Онда осы интервалдың әрбір нүктесінде $f(x)$ функциясының $dy = f'(x)dx$ дифференциалы анықталсын және оны *бірінші ретті дифференциал* деп атайды.

$y = f(x)$ функциясы $x \in (a,b)$ нүктесіндегі *екінші ретті дифференциалы* деп $f(x)$ функциясының осы нүктедегі бірінші ретті дифференциалынан алынған дифференциалды айтады.

Екінші ретті дифференциал d^2y немесе $d^2f(x)$ түрінде белгіленеді.

Сонымен $d^2y = d(dy), dy = f'(x)dx -$ ті ескере отырып, келесі теңдікті аламыз:

$d^2y = f''(x)(dx)^2$ немесе қысқаша $d^2y = f''(x)dx^2$, мұндағы $dx - x -$ тен тәуелді емес. Үшінші ретті және одан жоғары ретті дифференциалдар дәл осылайша анықталады: $d^3y = d(d^2y), d^4y = d(d^3y),...$

Жалпы жағдайда $f(x)$ функциясының n- ретті дифференциалы деп (n-1) ретті дифференциалдан алынған дифференциалды айтады:

$$d^n y = d(d^{n-1}y),$$

яғни $d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n$ немесе қысқаша $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$. Бұдан $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}$

дербес жағдайда $f''(x) = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$.

Жуықтап есептеуде дифференциалды қолдану

$y = f(x)$ функциясының x нүктесіндегі Δy өсімшесін $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$

Мұндағы, $\Delta x \to 0$ ұмтылғанда $\alpha \to 0$ түрінде немесе $\Delta y = dy + \alpha \cdot \Delta x$ түрінде

көрсетуге болады. $\alpha \cdot \Delta x$ - ке қарағанда жоғары ретті ақырсыз аз

функцияны алып тастап,

$$\Delta y \approx dy \qquad (3)$$

жуық мәнін аламыз. Сонымен қатар, Δx кіші болған сайын теңдік нақтылана түседі.

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \qquad (4)$$

Бұл теңдік кез келген дифференциалданатын функцияның өсімшесін үлкен дәлдікпен жуықтап есептеуге мүмкіндік береді.

Функция дифференциалы функция өсімшесіне қарағанда әлдеқайда жеңіл табылғандықтан, (4) формуласы есептеу тәжірибесінде кеңінен қолданылады.

1) Жуық мәнін есептеп шығарыңдар: $\ln 1{,}02;$

Жуықтап есептеу формуласын пайдаланамыз

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

$f(x) = \ln x$ орнына қойсақ, $\ln(x_0 + \Delta x) \approx \ln x_0 + \dfrac{1}{x_0} \cdot \Delta x.$

$x_0 = 1, \Delta = 0{,}02$

$$\ln 1{,}02 \approx \ln 1 + \frac{1}{1} \cdot 0{,}02 = 0{,}02.$$

Сонымен, $\ln 1{,}02 \approx 0{,}02$

2) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 25, \Delta x = -1$ ескере отырып $\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x,$

$$\sqrt{24} \approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot (-1) = 4{,}9.$$

Дифференциалданатын функциялар туралы теоремалар

1-теорема. (Ролль). Егер $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз, $(a;b)$ интервалында дифференциалданатын болса және кесінді шеткі нүктелерінде бірдей $f(a)=f(b)$ мәнін қабылдаса, ең болмағанда бір $c\in(a;b)$ нүктесі табылып, бұл нүктеде туындысы нөлге тең болады, яғни

$$f'(c)=0$$

2-теорема. (Коши). Егер $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз, $(a;b)$ интервалында дифференциалданатын болса, және $x \in (a;b)$ үшін $\varphi'(x) \neq 0$ болса, онда

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

3-теорема. (Лагранж). Егер $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз, ал $(a;b)$ интервалында дифференциалданатын болса, онда

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

1-салдар. Егер функция туындысы қандай да аралықта нөлге тең болса, функция осы аралықта тұрақты.

2-салдар. Егер екі функциялар қандай да аралықта тең туындыларға ие болса, онда олардың бір-бірінен тұрақты қосылғышқа айырмашылығы бар.

Лопиталь ережесі

Туындының қолданумен негізделген $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықтарды ашу әдісін қарастырайық.

1-теорема. ($\frac{0}{0}$ анықталмағандығын ашудың Лопиталь ережесі).

$f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары x_0 нүктесінің маңайында үзіліссіз, дифференциалданатын болсын және осы нүктеде нөлге айналсын: $f(x_0) = \varphi(x_0) =$

x_0 нүктесінің маңайында $\varphi'(x) \neq 0$ болсын. Егер $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$ шегі бар болса, онда

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l$$

1-мысал. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x}$ шегін табамыз.

Шешуі:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(x\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+1}=1$$

2-мысал. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{2x^2}$ шегін табамыз.

Шешуі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 6x}{1}=9$$

2-теорема. ($\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықты ашудың Лопиталь ережесі).

$f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары x_0 нүктесінің (x_0- дің өзінде де болуы мүмкін) маңайында үзіліссіз және дифференциалданатын болсын. Бұл маңайда

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, $\varphi'(x) \neq 0$. Егер $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ шегі бар болса, онда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

болады

3-мысал. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tg5x}$ шегін табамыз.

Шешуі: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tg5x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\cdot\cos^2 5x}{\cos^2 3x\cdot 5}=\frac{3}{5}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 10x}{1+\cos 6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$

$$=\frac{3}{5}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-10\sin 10x}{-6\sin 6x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 10x}{\sin 6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{10\cos 10x}{6\cos 6x}=\frac{5}{3}$$

Әртүрлі анықталмағандықтарды ашу

Лопиталь ережесі $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ түріндегі негізгі деп аталатын анықталмағандықтарды шешуде қолданылады. $0\cdot\infty, \infty-\infty, 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ түріндегі анықталмағандықтарды тепе-тең түрлендірулер арқылы негізгі екі түрге келтіріледі.

1. $x \to x_0$ болғанда $f(x) \to 0$, $\varphi(x) \to \infty$ болсын. Сонда келесі түрлендірулер орынды:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\varphi(x)\right)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

немесе

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Мысалы,

$$\lim_{x\to 2} tg\frac{\pi x}{4}(2-x)=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{ctg\frac{\pi x}{4}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{4}}\cdot\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}$$

2. $\chi \to \chi_0$ ұмтылғанда $f(\chi) \to \infty$, $\varphi(x) \to \infty$ болсын. Онда

былай жазуға болады:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-\varphi(x)\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{\varphi(x)}}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}\,\frac{1}{f(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Тәжірибеде тіпті оңай, мысалы

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{\ln x\cdot(x-1)}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}$$

$x \to x_0$ ұмтылғанда не $f(x) \to 1$ және $\varphi(x) \to \infty$ не $f(x) \to \infty$ және $\varphi(x) \to 0$ не $f(x) \to 0$ және $\varphi(x) \to 0$ болсын. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$ түріндегі шекті табу үшін

$$A = f(x)^{\varphi(x)}$$

өрнегін, алдымен, логарифмдеу ыңғайлы.

1-мысал. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ шегін тап.

Шешуі: 1^{∞} түріндегі анықталмағандық. $A = (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ өрнегін логарифмдеп,

$\ln A = \dfrac{1}{x^2} \ln \cos 2x$ теңдігін аламыз. Кейін шегін табамыз:

$$\lim_{x \to 0} \ln A = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x) \cdot 2}{2x} = -2 \lim_{x \to 0} \frac{tg 2x}{2x} = -2$$

яғни $\ln\lim\limits_{x\to 0} A = -2$. Содан, $\lim\limits_{x\to 0} A = e^{-2}$, және $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$

Есептің шешуін «дайын» формуланы қолданып, қысқаша

жазуға болады:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)\ln f(x)} = \exp\left(\lim_{x\to x_0} \varphi(x)\ln f(x)\right)$$

1-ескерту: Лопиталь ережесінің шарттары орындалса, анықталмағандықтарын ашу үшін Лопиталь ережесін бірнеше рет қолдануға болады.

2-ескерту: Лопиталь ережесін қолданғанда қатынастарды түрлендіріп қысқартуға және шектерді есептеудің басқа да әдістеріне келтіруге болады.

Бақылау сұрақтары:

1. *Функция диффренциалы дегеніміз ен?*
2. *Жуықтап есептеу формуласын жазыңыз.*
3. *Лопиталь ережесін тұжырымдаңыз.*

ҰСЫНЫЛАТЫН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления.- М.: Интеграл-пресс, 2002.
2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. -М., 2004.
3. Рябушко А.П. Жоғары математикадан жеке тапсырмалар: 1,2,3 бөлімдер.- Қарағанды, 2011.
4. Письменный Д.Т. Жоғары математикадан дәрістер жинағы: Толық курс. - М.: Қарағанды, 2012. - 524б.
5. Тутанов С.Қ., Шаихова Г.С.Жоғары математика 1,2 -бөлім. -Қарағанды, 2011.
6. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика есептерінің жинағы. -Алматы, 2008. -392 б.
7. Қажыкенова с.Ш, Пак Ю.Н, Шаихова Г.С. Жоғары математика курсы. - Қарағанды, 2020. - 290б.
8 . Шаихова Г.С. Төлеутаева Ж.М. Бір айнымалы функциялардың дифференциалдық есептеулрі. - Қарағанды, 2018. -98б.
9. Дүйсек Қ.Е., Қасымбек Е.Ә. Жоғары математика. - Алматы, 2008.
10. К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. Сборник задач по высшей математике. АЙРИС ПРЕСС. - Москва, 2004.- 57 с.
11. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 1. Оқулық. - Алматы. 2007ж. - 280б.
12. Айдос Е.Ж. Жоғары математика 2. Оқулық. Алматы. 2007ж.

Назар қойып тыңдағаныңызға рахмет!