

Модуль 4 «Графы»

4.1 Основные понятия.

Из истории теории графов. Основоположником теории графов считается Леонард Эйлер, который доказал невозможность маршрута прохождения всех четырех частей суши в задаче о кенигсбергских мостах (1736)



Рисунок 4.1 - Леонард Эйлер

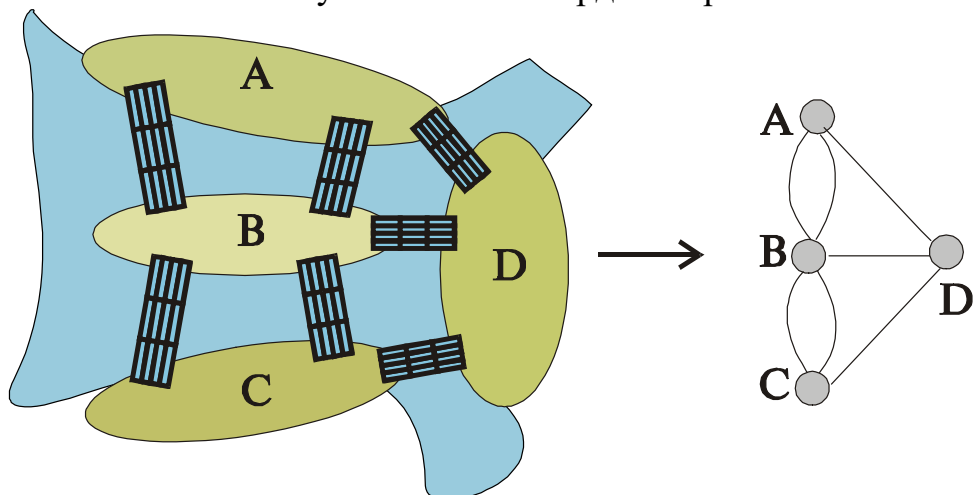
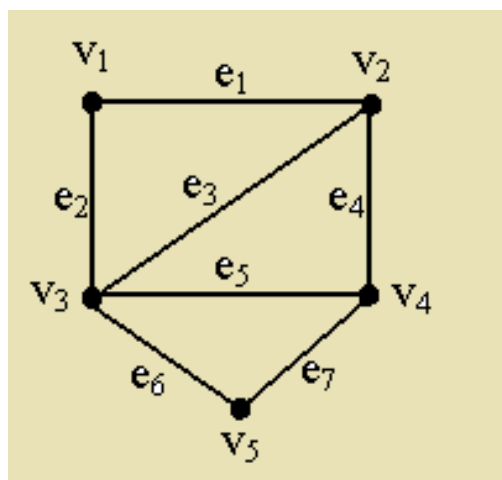


Рисунок 4.2 - Задача о кенигсбергских мостах.

Граф $G=(V,E)$ состоит из двух множеств: конечного множества элементов, называемых вершинами, и конечного множества элементов, называемых ребрами.



Граф $G=(V, E)$

$$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\};$$

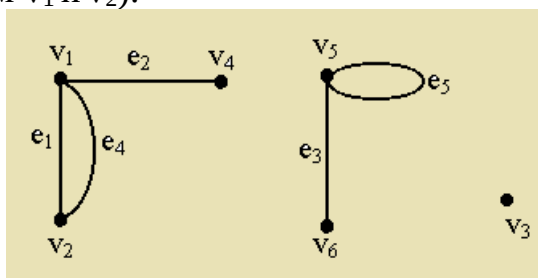
$$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$$

Вершины v_i и v_j , определяющие ребро e_k , называются концевыми вершинами ребра e_k .

Ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются параллельными (e_1, e_4).

Петля (e_5).

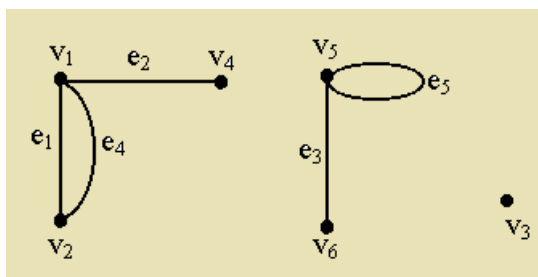
Ребро, принадлежащее вершине, называется инцидентным (ребро e_1 инцидентно вершинам v_1 и v_2).



Изолированная вершина не инцидентна ни одному ребру (v_3).

Две вершины смежны, если они являются концевыми вершинами некоторого ребра (v_1, v_4).

Если два ребра имеют общую концевую вершину, они называются смежными (e_1, e_2).



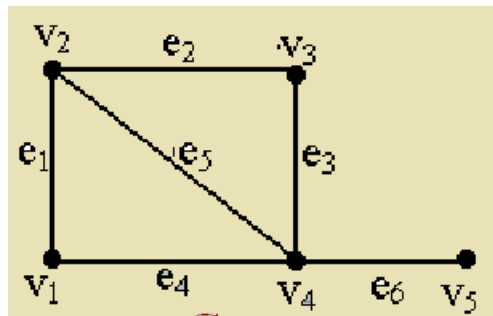
Граф, содержащий направленные ребра (дуги) с началом v' и концом v'' , называется ориентированным графом (ор-графом). Для ор-графа

$$(v', v'') \neq (v'', v').$$

Граф, содержащий ненаправленные ребра с концами v' и v'' , называется неориентированным графом (н-графом). Для н-графа

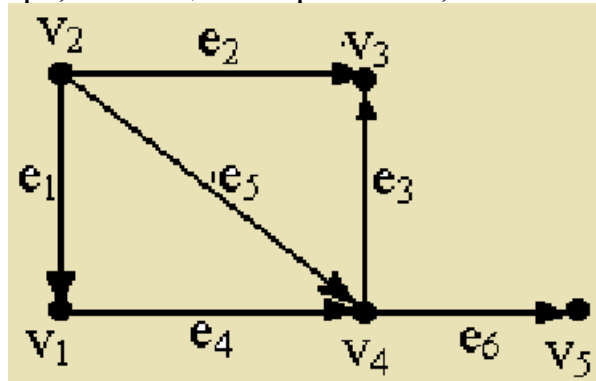
$$(v', v'') = (v'', v').$$

Граф G , рёбра которого не имеют определённого направления, называется неориентированным.



Граф G , имеющий определённое направление, называется ориентированным графом или орграфом.

Ребра, имеющие направление, называются дугами.



Неориентированное ребро (a, b)



Ориентированное ребро (a, b)



Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется петлей.

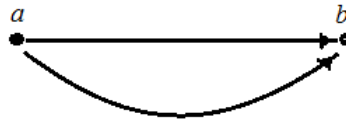


Неориентированная петля и ориентированная петля

Ребра (дуги), имеющие одинаковые начало и конец, называются параллельными или кратными.

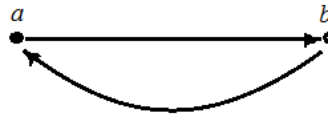


Кратные неориентированные ребра



Кратные ориентированные ребра

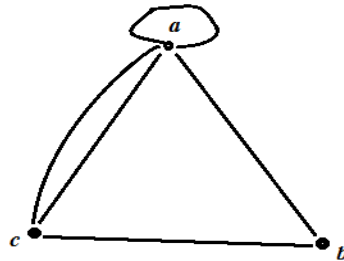
Ребра ор-графа, соединяющие одну и ту же пару вершин в разных направлениях называются симметричными или противоположно-направленными.



Симметричные ребра

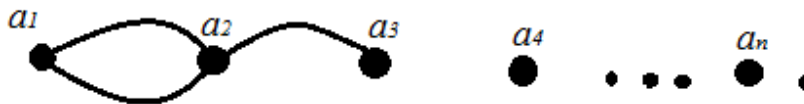
Определение графа.

Граф называется конечным, если множество его элементов (вершин и ребер) конечно.

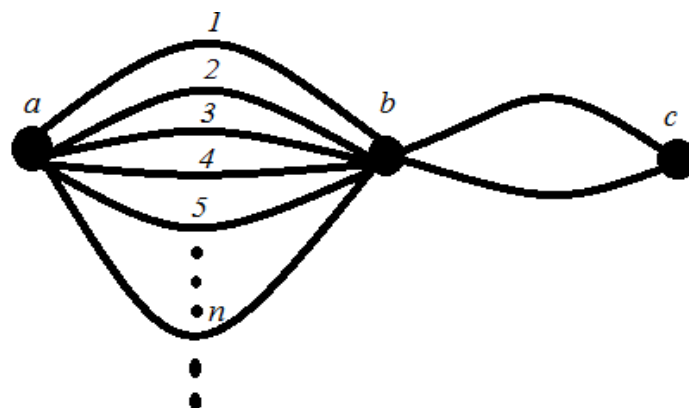


Конечный граф

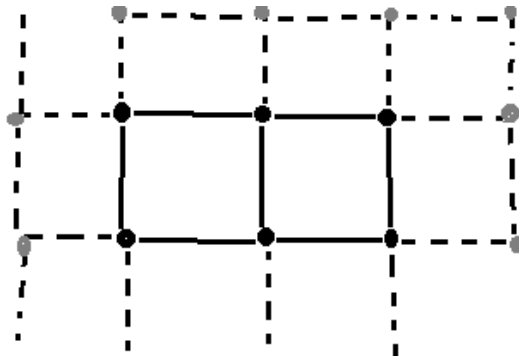
Граф называется бесконечным, если бесконечно множество вершин или множество его ребер. Граф с бесконечным числом вершин:



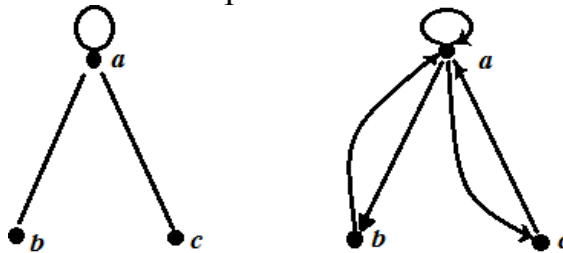
Граф с бесконечным числом ребер:



Бесконечный граф:

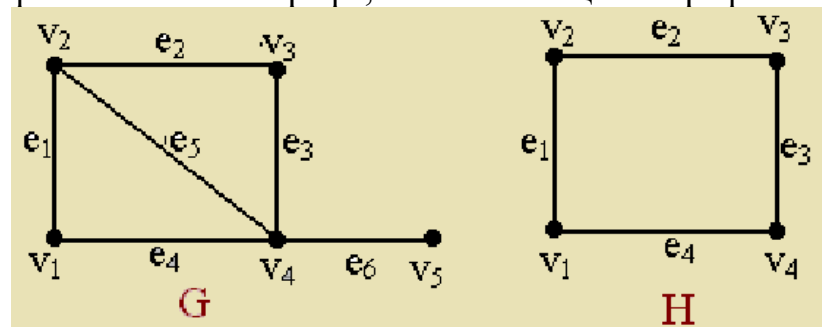


Каждому неориентированному графу канонически соответствует ориентированный граф с тем же множеством вершин, в котором каждое ребро заменено двумя ориентированными ребрами, инцидентными тем же вершинам и имеющим противоположные направления.



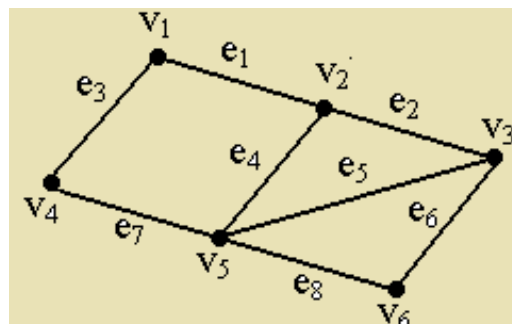
Канонически соответствующие графы

Подграф – любая часть графа, сама являющаяся графом.

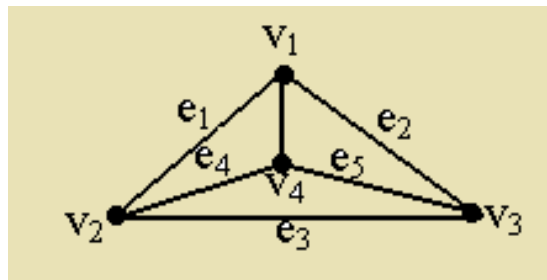


4.2 Виды графов

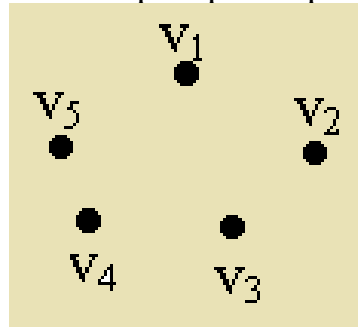
Граф $G=(V,E)$ называется простым, если он не содержит петель и параллельных ребер.



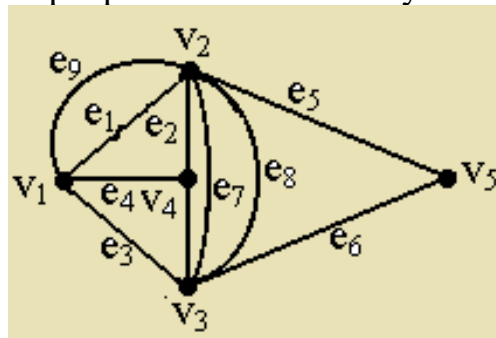
Граф $G=(V,E)$ называется полным, если он простой и каждая пара вершин смежна.



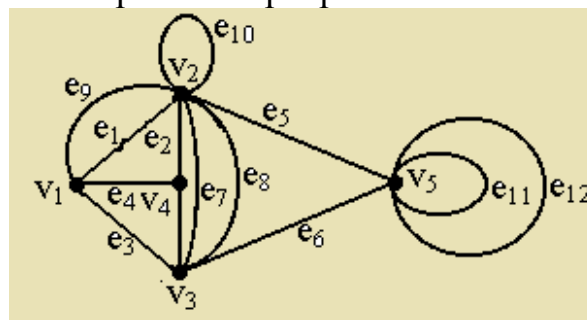
Ноль-граф - граф, множество ребер которого пусто.



Граф G с кратными ребрами называется мультиграф.

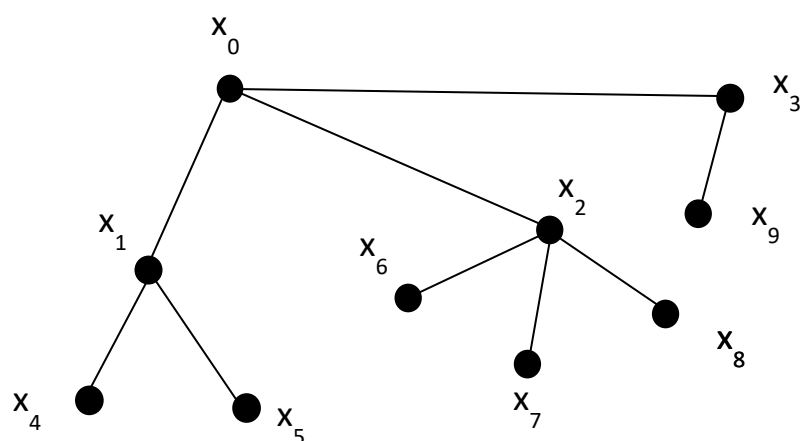


Граф G с петлями и кратными ребрами называется псевдограф.



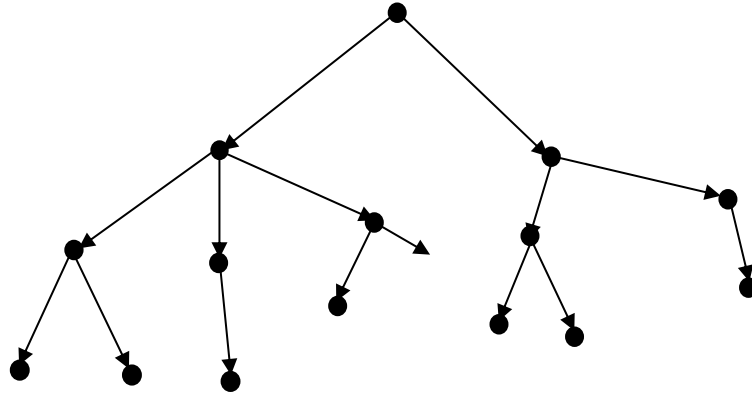
На практике широко используются такие виды графов, как деревья и прадеревья.

Деревом называется конечный связный неориентированный граф, состоящий, по крайней мере, из двух вершин и не содержащий циклов. Такой граф не имеет петель и кратных ребер



Лесом называется несвязный граф, каждая компонента связности которого является деревом.

Прадеревом называется ориентированный граф $G(X)$ с корнем $x_0 \in X$, если в каждую вершину $x_i \neq x_0$ ($x_i \in X$) заходит ровно одна дуга, а в корень x_0 не заходит ни одна дуга. Прадерев не содержит контуров



4.3 Способы задания графа.

Задать граф – значит описать множества его вершин и ребер, а также отношение инцидентности.

Пусть вершины графа $v_1, v_2, \dots, v_n$ и $e_1, e_2, \dots, e_m$ ребра графа G .

Граф задают:

- 1) матрицей инцидентности.
- 2) матрицу смежности.
- 3) списком ребер.
- 4) рисунком.

Матрица инцидентности $\|\varepsilon_{ij}\|$ размера $m \times n$ (строкам соответствуют ребра, столбцам – вершины графа), в которой для n -графа элементы имеют вид:

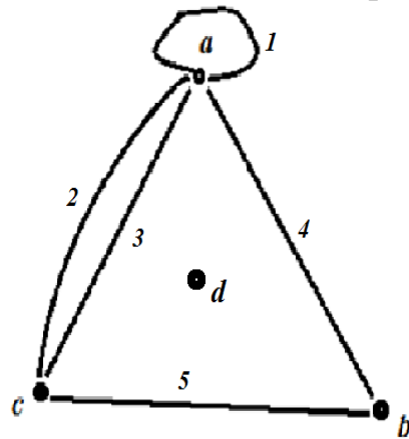
$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ребро } e_i \text{ инцидентно вершине } v_j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица инцидентности для ор-графа

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если вершина } v_j \text{ – начало ребра } e_i; \\ 1, & \text{если вершина } v_j \text{ – конец ребра } e_i; \\ \alpha, & \text{если } e_i \text{ – петля вокруг вершины } v_j; \\ 0 & \text{– в остальных случаях.} \end{cases}$$

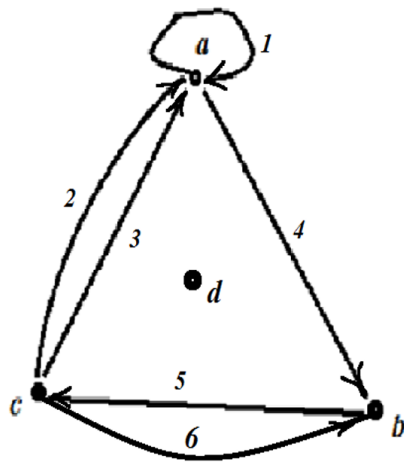
Пример:

Матрица инцидентности для неориентированного графа



	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	1	0	0	0
2	1	0	1	0
3	1	0	1	0
4	1	1	0	0
5	0	1	1	0

Матрица инцидентности ор-графа



	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
1	<i>a</i>	0	0	0
2	1	0	-1	0
3	1	0	-1	0
4	-1	1	0	0
5	0	-1	1	0
6	0	1	-1	0

Матрица смежности $\|\delta_{ij}\|$
 размера $n \times n$, столбцам и строкам которой соответствуют вершины графа.

Для н-графа δ_{ij} равно количеству ребер, связывающих *i*-ю и *j*-ю вершины,

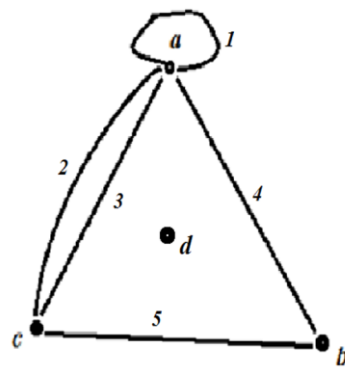
для ор-графа δ_{ij} равно количеству ребер выходящих из *i*-й и входящих в *j*-ю вершину.

Свойства:

- Матрица смежности н-графа всегда симметрична.
- Матрица смежности ор-графа в общем случае не симметрична.
- Она симметрична, если данному орграфу есть канонически соответствующий н-граф.

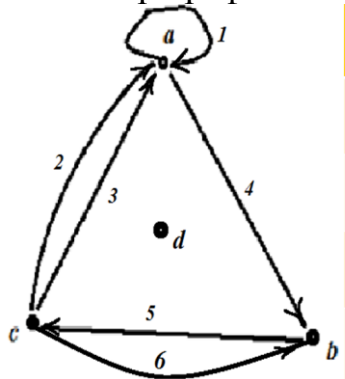
Пример:

Матрица смежности н-графа



	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	1	1	2	0
<i>b</i>	1	0	1	0
<i>c</i>	2	1	0	0
<i>d</i>	0	0	0	0

Матрица смежности ор-графа



	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>a</i>	1	1	0	0
<i>b</i>	0	0	1	0
<i>c</i>	2	1	0	0
<i>d</i>	0	0	0	0

Списком ребер можно задать граф без кратных ребер.

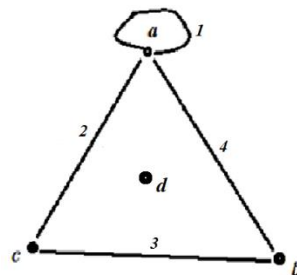
— Ребро представляется парой вершин, инцидентных ему, например $e = (v, w)$.

— Для н-графа порядок вершин в строке произволен, для ор-графа первым стоит номер вершины – начала ребра.

Рисунок или геометрическая интерпретация появляется, если сопоставить вершинам точки плоскости, ребрам – линии на плоскости, причем, линия соединяет только те точки, которые соответствуют вершинам, инцидентным данной линии-ребру.

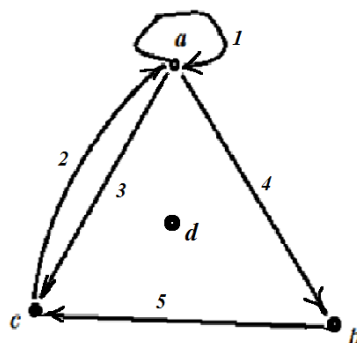
Пример:

Список ребер н-графа



$$E = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,c)\}.$$

Список ребер н-графа



$$E = \{(a,a), (a,b), (a,c), (c,a), (b,c)\}.$$

4.4 Степени вершин графа.

Пусть $G = (V, E)$ – н-граф.

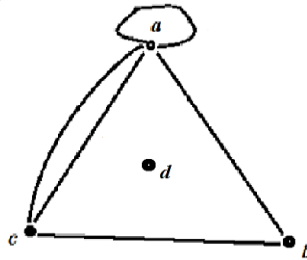
Локальной степенью вершины $v \in V$ называется число $\rho(v)$ равное числу ребер, инцидентных вершине v .

При этом вклад петли в степень вершины равен 2.

Вектор степеней н-графа

$G = (V, E)$ – вектор размерности n , составленный из степеней вершин графа, расположенных по убыванию.

Степени вершин н-графа



$$\rho(a) = 5$$

$$\rho(b) = 2$$

$$\rho(c) = 3$$

$$\rho(d) = 0$$

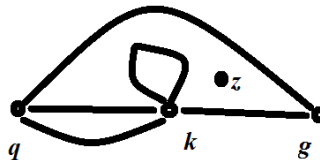
Вектор

степеней

$$\rho = (5, 3, 2, 0)$$

Векторы степеней изоморфных графов одинаковы:

$$\rho = (5, 3, 2, 0)$$



Граф, изоморфный предыдущему графу

Сумма всех локальных степеней вершин н-графа равна удвоенному количеству ребер.

$$\sum_{i=1}^n \rho(v_i) = 2\mu_e$$

μ_e - число ребер н-графа.

Локальные степени вершин ор-графа

Пусть $G = (V, E)$ – ор-граф.

Локальной степенью исхода вершины $v \in V$

называется число $\rho^-(v)$,

равное числу ребер, выходящих из вершины v .

Локальной степенью захода вершины $v \in V$ называется число

$\rho^+(v)$ равное числу ребер, входящих в вершину v .

Вектор степеней исхода

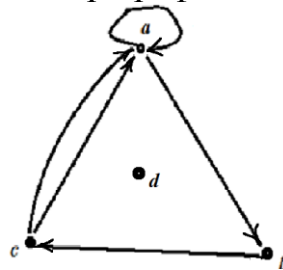
ор-графа $G = (V, E)$ – вектор размерности n , составленный из степеней исхода вершин графа, расположенных по убыванию.

Вектор степеней захода

ор-графа – вектор размерности n , составленный из степеней захода вершин графа, расположенных по убыванию.

Пример:

Локальные степени вершин ор-графа



$$\rho^-(a) = 3; \rho^+(a) = 2;$$

$$\rho^-(b) = 1; \rho^+(b) = 1;$$

$$\rho^-(c) = 1; \rho^+(c) = 2;$$

$$\rho^-(d) = 0; \rho^+(d) = 0.$$

$$\rho^- = (3, 1, 1, 0),$$

$$\rho^+ = (2, 2, 1, 0).$$

Сумма всех локальных степеней исхода вершин и сумма всех локальных степеней захода ор-графа равна количеству ребер.

$$\sum_{i=1}^n \rho^-(v_i) = \sum_{i=1}^n \rho^+(v_i) = \mu_e.$$

4.5 Операции над графами.

Сумма (объединение графов)

Объединение выполняется только в том случае, если у графов одинаковое количество вершин.

Объединением графов $G_1 \cup G_2$ называется граф с теми же вершинами, что и графы G_1 и G_2 , и с теми, и только теми ребрами, которые входят в G_1 , или в G_2 , или в оба графа одновременно.

Пересечение (произведение графов)

Пересечение графов возможно только в том случае, если у графов одинаковое количество вершин.

Пересечением $G_1 \cap G_2$ называется граф с теми же вершинами, что графы G_1 и G_2 , и только с теми ребрами, которые входят и в G_1 , и в G_2 .

Разность графов

Разность графов выполняется только над графами с одинаковым количеством вершин.

Разностью G_1/G_2 графа называется граф с теми же вершинами, что и рассматриваемые

графы и только с теми ребрами, которые входят в G_1 и не входят в G_2 .

Разностное сложение

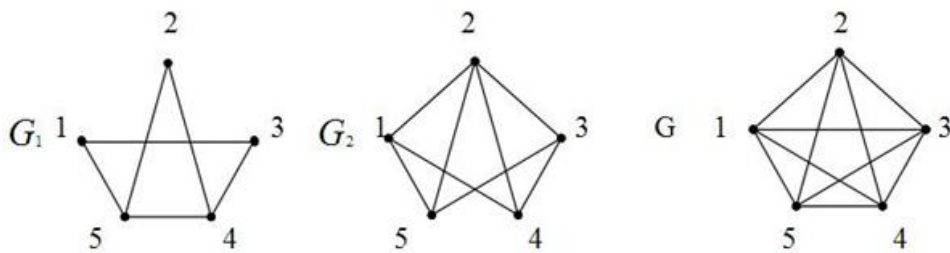
Разностное сложение

Выполняется только над графами с одинаковым количеством вершин.

Разностным сложением $G_1 \oplus G_2$ называется объединение разностей этих графов.

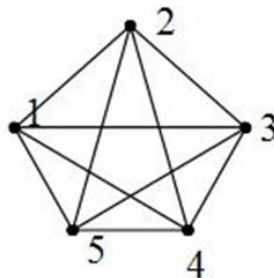
$$G_1 \oplus G_2 = (G_1 / G_2) \cup (G_2 / G_1)$$

Пример

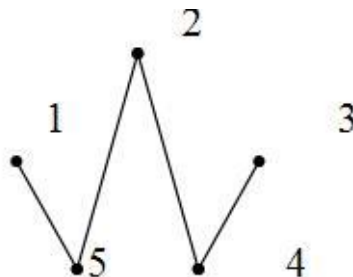


Заданные полный граф G и два неполных графа G_1 и G_2

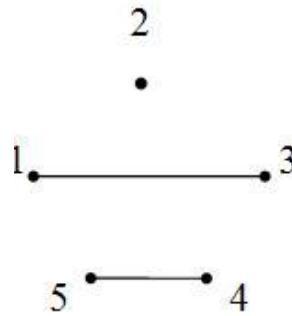
Объединение $G_1 \cup G_2$:



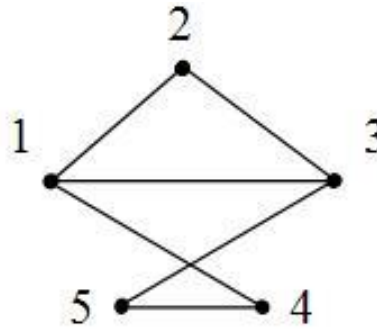
Пересечение графов



Разность графов G_1 / G_2 :

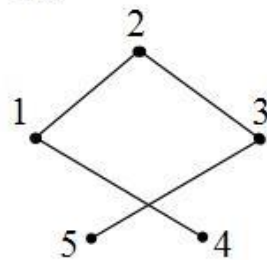


Разностное сложение G_1 и G_2 :

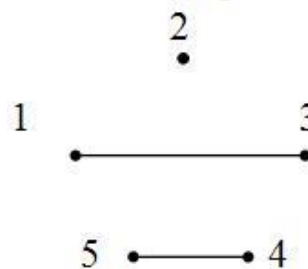


Дополнение неполных графов G_2 и G_1 до полного графа G

G_1 :



G_2 :



4.6 Маршруты.

Пусть $G = (V, E)$ – н-граф.

Маршрутом в графе G называется чередующаяся последовательность вершин и ребер

$$M = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$$

где ребро e_i инцидентно v_{i-1}, v_i .

Вершина v_0 – начальная вершина маршрута M ,
 v_n – конечная,

v_i – внутренняя вершина,

$M(v_0, v_n)$ – маршрут,
соединяющий v_0 и v_n .

Длина маршрута – число его ребер.

Маршрут M называется

маршрутом общего вида, если вершины и ребра повторяются,

цепью – если его ребра не повторяются,
простой цепью – если его вершины не повторяются.

Маршрут M называется циклическим, если начальная и конечная вершина совпадают.

Замечание: совпадают, не значит повторяются.

Циклический маршрут M называется маршрутом общего вида, если вершины и ребра повторяются, циклом – если его ребра не повторяются,

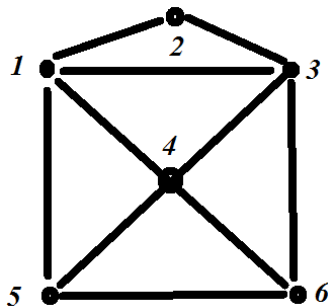
простым циклом – если его вершины не повторяются (кроме начала и конца).

$M1 = (1, 2, 3, 4, 1, 3, 4, 5)$ – общего вида.

$M2 = (1, 2, 3, 4, 1, 5)$ – цепь

$M3 = (5, 6, 3, 4, 1)$ –

простая цепь.



Циклические маршруты

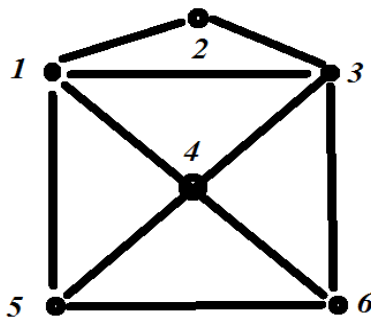
$M1 = (1, 2, 3, 1, 2, 3, 1)$ – циклический маршрут общего вида.

$M1 = (1, 3, 4, 5, 6, 4, 1)$ – цикл

(не простой)

$M1 = (1, 2, 3, 4, 1)$ –

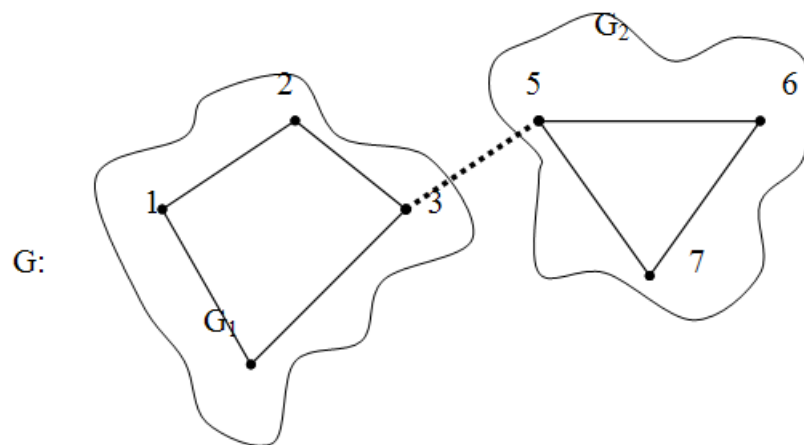
простой цикл.



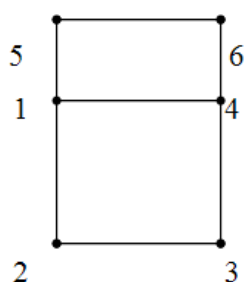
Рассматриваемый граф G имеет два компонента связности: $G1$ и $G2$.

Добавив ребро $3 - 5$ получаем связанный граф.

Мост в графе – это ребро, добавление которого делает несвязанный граф связанным.



Эйлеров граф - граф, содержащий пути, в которые входят все ребра графа.



Гамильтонов граф — это граф, через все вершины которого можно пойти только один раз.

Примером может служить вид сверху на додекаэдр (многогранник, гранями которого служат 12 правильных пятиугольников).