

Модуль 3 «Логика».

3.1 Основные определения.

Логическое множество $B = \{0, 1\}$,

где 0 – ложь, нет, false; 1 – истина, да, truth.

Логическая функция (или функция алгебры логики) это операция типа:

$$f : B^n \rightarrow B.$$

Иначе говоря, логическая функция от n переменных

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

функция, для которой выполняется:

$$y \in B, x_i \in B, \forall i = \overline{1, n}.$$

Таблица истинности отображает значения переменных и значения функции.

x_1	x_2	$F(x_1, x_2)$
0	0	$F(0, 0)$
0	1	$F(0, 1)$
1	0	$F(1, 0)$
1	1	$F(1, 1)$

Задание логической функции таблицей

x	y	z	f (x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
....			

В левой части перечислены все наборы значений переменных в лексикографическом порядке.

В правой части – значение функции на каждом наборе.

Количество наборов значений переменных логической функции от n переменных равно:

$$|B_n| = |B^n| = 2^n.$$

Если функция зависит от 2-х переменных, то будет 4 набора: 0 0, 0 1, 1 0, 1 1.

Если от 3-х, то будет 8 наборов

Наборы значений для функции от 2-х и 3-х переменных

x_1	x_2	$F(x_1, x_2)$
0	0	$F(0, 0)$
0	1	$F(0, 1)$
1	0	$F(1, 0)$
1	1	$F(1, 1)$

x1	x2	x3	F(x1,x2,x3)
0	0	0	F(0,0,0)
0	0	1	F(0,0,1)
0	1	0	F(0,1,0)
0	1	1	F(0,1,1)
1	0	0	F(1,0,0)
1	0	1	F(1,0,1)
1	1	0	F(1,1,0)
1	1	1	F(1,1,1)

Переменная x_i называется фиктивной (несущественной), если от ее значения не зависит значение функции:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Единичным набором значений аргументов называется набор, на котором функция равна 1.

Нулевым набором значений аргументов называется набор, на котором функция равна 0.

Число все возможных вариаций логических функций

$$|P_2(n)| = 2^{2^n}.$$

Таблица функций одной переменной

При $n = 1$ число логических функций равно:

$$|P_2(1)| = 2^{2^1} = 4.$$

0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Названия функций одной переменной.

$\varphi_0(x) = 0$ функция-константа 0;

$\varphi_3(x) = 1$ функция-константа 1;

$\varphi_1(x) = x$ тождество переменной x ;

$\varphi_2(x) = \bar{x}$ отрицание переменной x .

Функции-константы имеют 1 фиктивную переменную x .

Функции тождество и отрицание – не имеют фиктивных переменных.

Три основных операции логики

	Варианты обозначения		
	and	&	$\wedge$
Конъюнкция			
	or		$\vee$
Дизъюнкция			
	not	!	$\neg$
Отрицание			

3.2 Таблицы функций двух переменных.

При $n = 2$ число логических функций равно:

$$|P_2(2)| = 2^{2^2} = 16.$$

		№ 0	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Продолжение таблицы логических функций 2 переменных

		№ 8	№ 9	№ 10	№ 11	№ 12	№ 13	№ 14	№ 15
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Названия и свойства функций двух переменных

Функция № 0 – константа 0.

Она принимает одно и то же значение 0 при любых наборах значений аргументов.

Функция № 15 – константа 1.

Она принимает одно и то же значение 1 при любых наборах значений аргументов.

Функция № 1 – конъюнкция x и y .

Обозначение

$$x \wedge y = x \& y = x \cdot y = xy$$

Конъюнкция принимает значение 1 только в случае, когда x и y равны 1.

Функция № 7 – дизъюнкция x и y .

Обозначение $x \vee y$.

Дизъюнкция принимает значение 1 тогда, когда x или y равны 1 (т. е. хотя бы один аргумент).

Функция № 9 – эквивалентность x и y .

Обозначение $x \sim y$.

Эквивалентность принимает значение 1 только в случае, когда x и y равны.

Функция № 6 – сложение по модулю 2 x и y .

Обозначение $x \oplus y$.

Сложение по модулю 2 принимает значение 1 только в случае, когда сумма x и y нечетна.

Функция № 13 – импликация x и y .

Обозначение $x \rightarrow y$.

Импликация принимает значение 0 только в случае, когда из «истины» следует «ложь».

Функция № 11 – импликация y и x .

Обозначение $y \rightarrow x$.

Функция № 14 – штрих Шеффера x и y .

Обозначение $x \mid y$.

Штрих Шеффера является отрицанием конъюнкции: $x \mid y = \overline{xy}$.

Функция № 8 – стрелка Пирса x и y .

Обозначение $x \downarrow y$.

Стрелка Пирса является отрицанием дизъюнкции:

$$x \downarrow y = \overline{x \vee y}$$

Функции № 0 и № 15 – константы 0 и 1 имеют две фиктивные переменные.

Фиктивную y имеют

№ 3 – тождество x и

№ 12 – отрицание x .

Фиктивную x имеют

№ 5 – тождество y и

№ 10 – отрицание y .

Общее количество функций с фиктивными переменными равно 6.

Пример формирования таблицы истинности по формуле

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 * x_2 * (x_1 + x_3)$$

x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	$x_1 * x_2$	$x_1 + x_3$	$F(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0

3.3 Булева алгебра.

Булевы операции – это конъюнкция ($\wedge$), дизъюнкция ($\vee$) и отрицание ($\neg$).

Булева алгебра – это множество логических функций с введенными на нем булевыми операциями.

$$A = (P_2, \wedge, \vee, \neg).$$

Формулы, представляющие одну и ту же функцию, называются равносильными (эквивалентными).

Закон коммутативности

$$1) x \vee y = y \vee x,$$

$$2) x \cdot y = y \cdot x,$$

Закон ассоциативности

$$3) (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z),$$

$$4) (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),$$

Закон дистрибутивности

$$5) (x \vee y) \cdot z = x \cdot z \vee y \cdot z,$$

$$6) (x \cdot y) \vee z = (x \vee z) \cdot (y \vee z),$$

Закон де Моргана

$$7) \overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y},$$

$$8) \overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y},$$

Закон уничтожения кратности

$$9) x \vee x = x,$$

$$10) x \cdot x = x,$$

Закон исключенного третьего

$$11) x \vee \bar{x} = 1,$$

Закон противоречия

$$12) x \cdot \bar{x} = 0,$$

Закон поглощения

$$13) x \vee xy = x,$$

$$14) x \cdot (x \vee y) = x,$$

Закон двойного отрицания

$$15) \overline{\bar{x}} = x,$$

Свойства констант

$$16) x \vee 0 = x, \quad 17) x \cdot 0 = 0,$$

$$18) x \vee 1 = 1, \quad 19) x \cdot 1 = x,$$

$$20) 0 \vee 1 = 1, \quad 21) 0 \cdot 1 = 0.$$

Закон простого склеивания

$$22) x\bar{y} \vee xy = x,$$

$$23) (x \vee \bar{y}) \cdot (x \vee y) = x,$$

Закон расщепления

$$24) x = x\bar{y} \vee xy,$$

$$25) x = (x \vee \bar{y}) \cdot (x \vee y),$$

Первый закон обобщенного склеивания

$$26) xz \vee y\bar{z} \vee xy = xz \vee y\bar{z},$$

Второй закон обобщенного склеивания

$$27) x \vee \bar{x}y = x \vee y.$$

Эквивалентность

$$28) x \sim x = 1, \quad 29) x \sim \bar{x} = 0,$$

$$30) x \sim 1 = x, \quad 31) x \sim 0 = \bar{x}.$$

Сложение по модулю 2

$$32) x \oplus x = 0, \quad 33) x \oplus \bar{x} = 1,$$

$$34) x \oplus 1 = \bar{x}, \quad 35) x \oplus 0 = x.$$

Импликация

$$36) x \rightarrow x = 1, \quad 39) x \rightarrow 0 = \bar{x},$$

$$37) x \rightarrow \bar{x} = \bar{x}, \quad 40) x \rightarrow 1 = 1,$$

$$38) \bar{x} \rightarrow x = x, \quad 41) 0 \rightarrow x = 1,$$

$$42) 1 \rightarrow x = x.$$

3.4 Разложение функции по переменным.

Формула алгебры логики – запись суперпозиции логических функций с использованием знаков переменных, скобок и знаков логических функций (логических связок):

$$1) \neg, 2) \wedge, 3) \vee, \oplus, \sim, \rightarrow, \vdash, \downarrow.$$

Порядок записи логических связок определяет иерархию, на основании которой расставляются скобки.

Каждая подформула окружается скобками.

Скобки можно не ставить, если они внешние.

$$(x \vee y) = x \vee y.$$

Отрицание связывает сильнее всех.

$$\overline{(x \vee y)} = \overline{x} \vee \overline{y}.$$

Конъюнкция связывает сильнее остальных

$$\begin{aligned} & ((x \vee y) \cdot \bar{z}) \oplus ((\bar{x} \rightarrow z) \cdot y) = \\ & = (x \vee y) \cdot \bar{z} \oplus (\bar{x} \rightarrow z) \cdot y. \end{aligned}$$

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

$$1, \quad x, \quad \bar{x} \cdot y, \quad x \cdot \bar{y} \cdot z.$$

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций.

$$x \vee \bar{x} y \vee x \bar{y} z.$$

Дизъюнктивная форма будет совершенной (СДНФ), если каждая элементарная конъюнкция содержит все наименования переменных.

$$x y z \vee \bar{x} y z \vee x \bar{y} \bar{z} \vee \bar{x} y \bar{z}.$$

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция переменных или их отрицаний, в которой каждая переменная встречается не более одного раза.

$$0, \quad x, \quad \bar{x} \vee y, \quad x \vee \bar{y} \vee z.$$

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

$$x \cdot (\bar{x} \vee y) \cdot (x \vee \bar{y} \vee z).$$

Конъюнктивная форма будет совершенной (СКНФ), если каждая элементарная дизъюнкция содержит все наименования переменных.

$$(\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \cdot (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).$$

Правило построения СДНФ из вектор-столбца

Функция задана таблицей

1. Выбрать все единичные наборы значений аргументов.
2. Каждому единичному набору сопоставить элементарную конъюнкцию всех переменных, так чтобы переменная в конъюнкции была с отрицанием, если в наборе она равна 0.
3. Соединить полученные конъюнкции знаком дизъюнкции

$$\bar{x} \bar{y} \vee x \bar{y} \vee x y.$$

3.4 Карта Вейча.

Карта Вейча (её модификацию называют диаграммой Карно) — это изобретение, позволяющее легко осуществлять различные преобразования булевых функций до пяти-шести аргументов.

Сначала рассмотрим карту двух аргументов. Левая половина карты обозначена буквой А, правая—той же буквой, но с инверсией. По горизонтали карта также разделена на две части. Верхняя половина обозначена буквой В, нижняя—буквой $\bar{B}$.

	$\overline{A}$	A	
B	$\bar{A}B$	AB	
$\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}$	$A\bar{B}$	

	$\overline{A}$	A	
B	1	3	
	0	2	

Левая верхняя клетка находится на пересечении двух областей А и В. В связи с этим записываем в неё минтерм $\bar{A}B$. Правая верхняя клетка находится на пересечении областей А и В. Записываем в эту клетку минтерм AB .

Аналогично записываем $A\bar{B}$ и $\bar{A}\bar{B}$ в оставшиеся две клетки. Так же приведена та же карта, но в клетках её указаны десятичные номера минтермов.

	$\overline{A}$	A	
B	$\bar{A}B$	AB	
$\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}$	$A\bar{B}$	

	$\overline{A}$	A	
B	1	3	
	0	2	

Рассмотрим карту Вейча трёх аргументов.

В ней также для каждого минтерма отведена одна клетка, и, как и в случае карты двух аргументов, алгебраическая запись минтермов строго соответствует системе расположения букв вокруг карты. На другой карте в клетках указаны номера минтермов.

	$\overline{A}$	A		
B	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}B\bar{C}$	$A\bar{B}\bar{C}$	$AB\bar{C}$
$\bar{B}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}C$	ABC

	$\overline{A}$	A		
B	2	3	7	6
	0	1	5	4

Карта четырёх аргументов, где в клетках указаны минтермы в их аналитической записи.

Вокруг карты размещены переменные, для каждой из которых строго закреплена своя зона. Оставшаяся зона по каждой стороне карты закреплена за инверсной переменной.

		A					
B	D	$AB\bar{C}\bar{D}$	$ABCD$	$\bar{A}BC\bar{D}$	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	B	D
		$AB\bar{C}D$	$ABCD$	$\bar{A}BCD$	$\bar{A}B\bar{C}D$		
		$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$		
		$A\bar{B}\bar{C}D$	$A\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$		
		C					

		A					
B	D	12	14	6	4	B	D
		13	15	7	5		
		9	11	3	1		
		8	10	2	0		
		C					

Если функция представлена в виде суммы минтермов, то нанесение ее на карту сводится к отысканию клеток, за которыми закреплены номера соответствующих минтермов. В найденные клетки записываются единицы. Поясним это на примере функции

$$f = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}\bar{C} + ABC.$$

Переведем минтермы в их номера:

$$f = (2, 3, 4, 7).$$

Воспользуемся картой

		A					
B	D	6	7	3	2	B	D
		4	5	1	0		
		C					

В ее клетках записаны числа. Но их можно не писать, поскольку система расположения букв вокруг карты точно определяет место каждого минтерма. Удалим с карты номера и нанесем на нее функцию $f = (2, 3, 4, 7)$.

Единицы на карте обозначают номера минтермов, взятых из выражения. Самая правая единица (верхний ряд) занимает клетку с номером 2.

Это постоянное место минтерма $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Поскольку он входит в заданную функцию, то в этой клетке и поставлена единица. То же самое относится и ко всем остальным единицам карты. Пустые клетки обозначают, что соответствующие минтермы не входят в функцию.

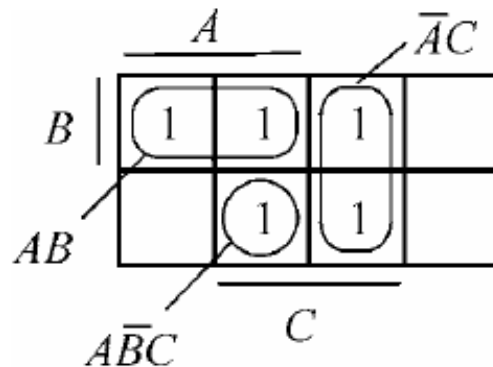
		A					
B	D		1	1	1	B	D
		1					
		C					

Пусть дана функция

Она зависит от трех аргументов А, В, С.

$$f = AB + \bar{A}C + A\bar{B}C.$$

Соответствующая ей карта Вейча



Первая конъюнкция, входящая в функцию, равна AB . Находим на карте эту область. Она расположена на пересечении двух областей: буквы A и буквы B . Это две верхние левые клетки. В них ставим единицы. Эти две единицы обведены и обозначены конъюнкцией AB . Вторая конъюнкция имеет вид AC . Находим область на карте, являющуюся общей для зон A и C . Это две клетки, расположенные вертикально.

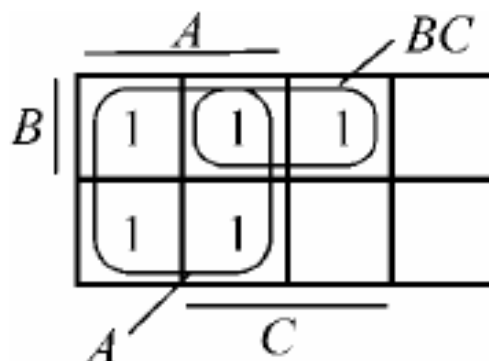
Наконец, наносим на карту конъюнкцию ABC . Она на карте занимает одну клетку на пересечении зон A , B и C .

Мы рассмотрели случай, когда каждая конъюнкция на карте занимает новые области, не пересекающиеся с другими. Рассмотрим еще один пример. Нанесем на карту функцию

$$f = A + BC.$$

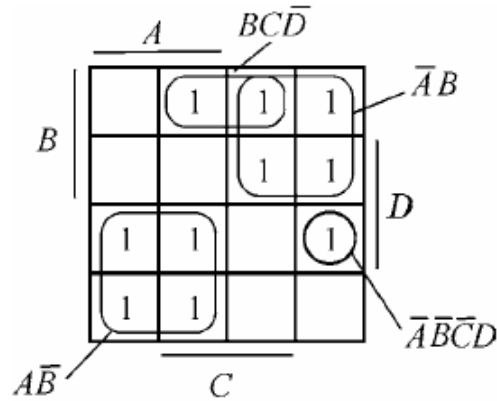
Первая конъюнкция состоит из одной буквы. Конечно, это не конъюнкция, но для общности и одиночную переменную, входящую в функцию, удобно называть конъюнкцией. Нанесем эту одиночную переменную на карту. Ей соответствует вся область A , состоящая из четырех клеток, следовательно, всю ее заполняем единицами.

Конъюнкция BC частью занимает новую клетку, а частью — уже занятую буквой A . Это значит, что седьмой минтерм нанесен на карту буквой A , поэтому вторично обозначать его нет необходимости.



Функция от 4х элементов:

$$f = (1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14).$$



3.6 Метод Квайна.

Алгебраическая минимизация требует очень большой изобретательности и с практической точки зрения интереса не представляет, за исключением простейших случаев. Многими специалистами предпринимались попытки разработать методы (алгоритмы), позволяющие найти минимальную форму и не требующие никакой изобретательности. Одним из них является метод Квайна. Проиллюстрируем его на примере функции четырех аргументов вида:

$$f = (0, 1, 3, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15).$$

Запишем минтермы в алгебраической форме:

$$f = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BC\bar{D} + \bar{A}BCD + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + AB\bar{C}\bar{D} + ABC\bar{D} + ABCD.$$

Суть метода Квайна весьма проста. Основу его составляет теорема склеивания, которая применяется к каждой паре минтермов заданной функции.

Чтобы не пропустить ни одной пары, начнем с нулевого минтерма и поочередно сравним его со всеми остальными. Если сравниваемые минтермы отличаются инверсией только одного аргумента, то эти минтермы отмечаем, например, подчеркиваем, а их общую часть запишем отдельно. В данном случае минтермы m_0 и m_1 , а также m_0 и m_8 дают соответственно:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D = \bar{A}\bar{B}\bar{C};$$

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D = \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

Минтермы m_0 , m_1 и m_8 подчеркиваем, при этом ранее подчеркнутый минтерм вторично можно не подчеркивать.

Берем минтерм m_1 . Сравниваем его со всеми, кроме нулевого, в том числе и с подчеркнутыми. Получаем:

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D = \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

Минтерм m_3 подчеркиваем. Аналогично сравниваем все остальные минтермы независимо от того, подчеркнуты они или нет, после чего заданная функция представится в виде дизъюнкции конъюнкций, полученных в результате склеивания минтермов.

На этом заканчивается первый этап минимизации по методу Квайна.

Получилось выражение, все конъюнкции которого содержат не менее трех аргументов:

$$f = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}D + \overline{A}CD + B\overline{C}\overline{D} + \overline{A}BC + \\ + BCD + A\overline{C}\overline{D} + AB\overline{D} + AB\overline{C} + ABD + ABC.$$

Переходим ко второму этапу. Конъюнкции полученного выражения точно так же сравниваем. Начинаем с левой конъюнкции $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$. Она не склеивается ни с одной конъюнкцией выражения. Поэтому ее не подчеркиваем и переходим к конъюнкции $\overline{B}\overline{C}\overline{D}$. Она также не склеивается ни с одной конъюнкцией. То же самое относится и к конъюнкциям $\overline{A}\overline{B}D$ и $\overline{A}CD$. Все их не подчеркиваем и сравниваем конъюнкцию $B\overline{C}\overline{D}$:

$$B\overline{C}\overline{D} + BCD = BC.$$

Конъюнкции $B\overline{C}\overline{D}$ и BCD подчеркиваем и переходим к конъюнкции $\overline{A}BC$:

$$\overline{A}BC + ABC = BC.$$

Получилась та же самая конъюнкция. Поскольку она является повторной, то вторично ее не записываем. Выполнив все операции сравнения, получим две неповторяющиеся конъюнкции BC и AB. Дизъюнкция этих двух и всех неподчеркнутых конъюнкций образует выражение, являющееся результатом действий второго этапа:

$$f = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{B}\overline{C}\overline{D} + \overline{A}\overline{B}D + \overline{A}CD + BC + AB + A\overline{C}\overline{D}.$$

Получили выражение, в котором нет ни одной пары склеивающихся конъюнкций. На этом метод Квайна заканчивается.

Выражение, полученное методом Квайна, называется сокращенной дизъюнктивной нормальной формой заданной функции, а каждая его конъюнкция называется простой импликантой. Для всякой булевой функции существует единственная сокращенная ДНФ и единственная сокращенная КНФ.