

Модуль 2 «Бинарные отношения. Комбинаторика»

2.1 Векторы.

Вектор – это упорядоченный набор элементов. Его элементы называются координатами или компонентами вектора.

Длина (размерность) вектора – число координат вектора.

В отличие от элементов множества, его координаты могут совпадать. Обозначение вектора: в круглых скобках, координаты – через запятую (0, 5, 4, 5, 0, 1). Иногда скобки и даже запятые опускаются.

Векторы длины 2 называют упорядоченными парами; длины 3 – тройками; и так далее, длины n – n -ками.

Два вектора равны, если они имеют одинаковую длину, и соответствующие координаты равны, то есть.

$$\text{Если } (a_1, a_2, \dots, a_m) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \text{ и } m = n \\ a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_m = b_n.$$

Прямое произведение n множеств

Прямое произведение множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется множеством
всех векторов $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, длины n таких, что
 $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$.

Иначе говоря

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \\ = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Пример 1:

Найти прямое произведение множеств A_1, A_2 и A_3 где
 $A_1 = \{0, 1\}, A_2 = \{m, n\}, A_3 = \{1, 3\}$.

Перечисляем тройки элементов в лексико-графическом порядке.

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(0, m, 1), (0, m, 3), (0, n, 1), \\ (0, n, 3), (1, m, 1), (1, m, 3), (1, n, 1), (1, n, 3)\}.$$

Пусть A – конечное множество, элементами которого являются символы (буквы, цифры, знаки препинания, знаки операций и т. д.). Такие множества обычно называют алфавитом.

Примеры алфавитов:

- 1) 33 русских буквы,
- 2) 26 латинских букв,
- 3) 10 арабских цифр;
- 4) Таблица ASCII.

Слова длины n в алфавите A – это элементы множества A^n . Множество всех слов в алфавите A – это множество

$$A^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i = A^1 \cup A^2 \cup \dots \cup A^n \cup \dots$$

Здесь слово определено как вектор.

При написании слова не принято пользоваться разделителями: скобками, запятыми; они могут оказаться символами самого алфавита. Поэтому слово в алфавите обозначается как конечная последовательность символов из алфавита A .

Пример 2:

1. Десятичное число – слово в алфавите цифр $\{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$.
2. Двоичное слово в алфавите $\{0, 1\}$.
3. Текст, отпечатанный на машинке – слово в алфавите, определяемом клавиатурой этой машинки.

Теорема (о мощности прямого произведения множеств)

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ конечные множества и $|A_1| = m_1, |A_2| = m_2, \dots, |A_n| = m_n$.

Тогда мощность множества $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ равна произведению мощностей множеств: $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$.

Следствие:

$$|A^n| = |A|^n.$$

Например, множество B_3 – двоичных векторов длины 3, содержит

$$|B_3| = |B^3| = |B|^3 = 2^3.$$

2.2 Соответствия.

Соответствием $[2, 4, 5]$ множеств A и B называется подмножество G такое, что $G \subseteq A \times B$. Если, то говорят, что « b соответствует a при соответствии G ».

Область определения соответствия G – множество $\text{pr}_1 G \subseteq A$.

Область значений соответствия G – множество $\text{pr}_2 G \subseteq B$.

Соответствие G называется всюду (полностью) определенным – если $\text{pr}_1 G = A$ (в противном случае – частично определенное соответствие).

Соответствие G называется сюръективным, если $\text{pr}_2 G = B$.

Образ элемента $a \in np_1 G$ в множестве В при соответствии G – это множество всех элементов $b \in np_2 G$, которые соответствуют а. Обозначим образ а – G(a).

Прообраз элемента $b \in np_2 G$ в множестве А при соответствии G – это множество всех $a \in np_1 G$, которым соответствует b. Обозначим прообраз b – G⁻¹(b).

Образом множества $C \subseteq np_1 G$ называется объединение образов всех элементов C. Прообразом множества $D \subseteq np_2 G$ называется объединение прообразов всех элементов D.

Соответствие G называется функциональным (однозначным) соответствием, если образом любого элемента из $np_1 G$ является единственный элемент из $np_2 G$. Иначе говорят, соответствие G обладает свойством единственности образа.

Соответствие G называется инъективным соответствием, если прообразом любого элемента из $np_2 G$ является единственный элемент из $np_1 G$. Иначе говорят, соответствие G обладает свойством единственности прообраза.

Соответствие G является функцией f типа $F : A \rightarrow B$, если оно функционально. Обозначение функции: $F(a) = b$.

Соответствие G является отображением множества А в множество В, если оно функционально и полностью определено.

Отображение будет отображением А в В, если G – не сюръективно.

Отображение будет отображением А на В, если G – сюръективно.

Соответствие G является взаимно однозначным, если оно: 1) всюду определено; 2) сюръективно; 3) функционально; 4) инъективно.

Пример 1:

Определить свойства соответствия G между множествами А и В.

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$.

$G = \{(a, 2), (b, 2), (c, 3)\}$.

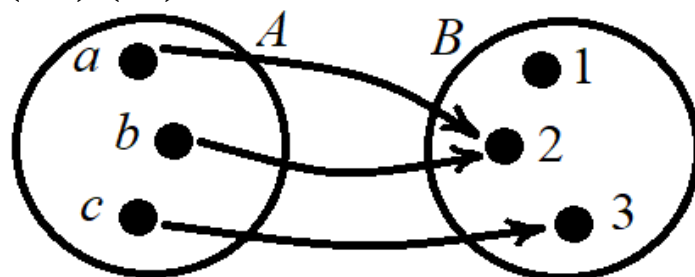


Рисунок 2.1 – Соответствие примера 1

Область определения:

$D(G) = \text{pr}1G = \{a, b, c\} = A$, значит полностью определено.

Область значений:

$E(G) = \text{pr}2G = \{2, 3\} \neq B$, значит не сюръективно.

Образы элементов области определения:

$G(a) = \{2\}; G(b) = \{2\}; G(c) = \{3\}$.

Видим, что есть единственность образа, значит соответствие функционально.

Прообразы элементов области значений:

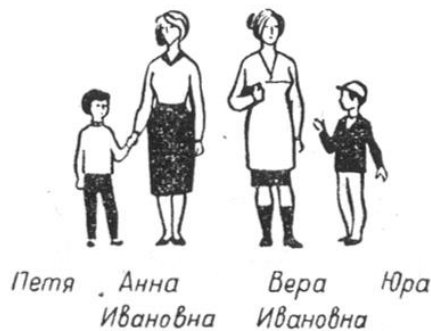
$G^{-1}(2) = \{a, b\}; G^{-1}(3) = \{c\}$.

Нет единственности прообраза, значит не инъективно.

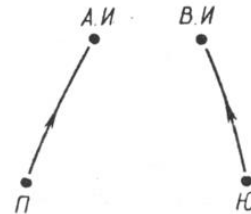
Выводы:

1. Соответствие является функцией, так как функционально.
2. Соответствие является отображением, так как полностью определено и функционально.
3. Соответствие является отображением A в B , так как не сюръективно.
4. Соответствие не является взаимно однозначным, так как не сюръективно и не инъективно.

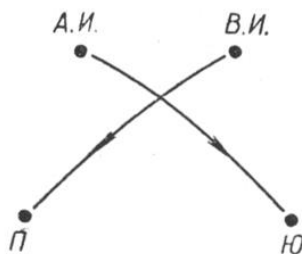
2.3 Бинарные отношения.



Отношение: «быть сыном»



Отношение: «Быть тётей»



Отношение: «быть сестрой или матерью»

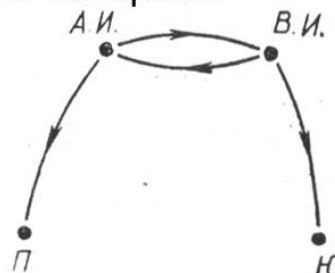


Рисунок 2.2 – Бинарные отношения.

Отношение: «меньше»

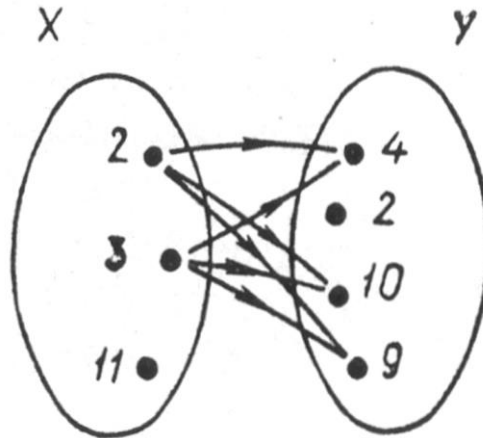


Рисунок 2.3 - Отношение: «меньше»

$\{(2; 4), (2; 10), (2; 9), (3; 4), (3; 10), (3; 9)\}$.

Вспомним:

Декартовым (прямым) произведением множеств $A \times B$ называется множество всех упорядоченных пар (всех кортежей), в которых первый элемент принадлежит множеству A , а второй элемент принадлежит множеству B .

Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)\}$; $|A \times B| = 9$.

$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a_1, a_2, a_3) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3\}$

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$

Бинарным отношением между элементами множеств A и B называется любое подмножество $R \subseteq A \times B$.

Если множества A и B совпадают $A=B$, то R называют бинарным отношением на множестве A . (однородное отношение)

Если $(x, y) \in R$, то это обозначают еще xRy и говорят, что между элементами x и y установлено бинарное отношение R .

Для отношения R обратным является отношение

$$R^{-1} = B \times A.$$

Способы задания бинарных отношений.

1. Перечислением элементов

2

$V = \{a, b, c, d, e\}$, $T \subseteq V$

$T = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, d), (c, e), (d, b), (d, c), (e, c), (d, e)\}$

2. Характеристическим свойством

2

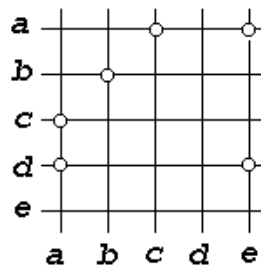
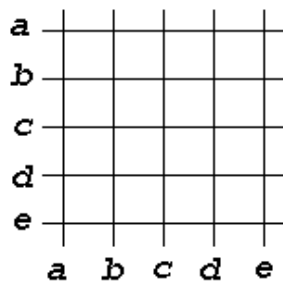
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R \subseteq Z$

$R = \{(x, y) | x < y\}$

$R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$

3. Графический метод задания

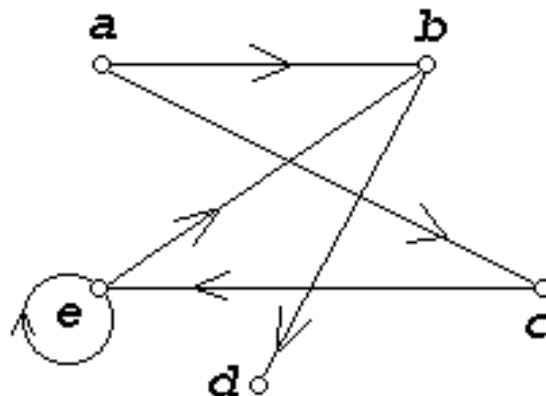
$R = \{(a, d), (a, c), (b, b), (c, a), (e, d), (e, a)\}$



4. Графовое представление

Граф - фигура состоящая из точек (вершин) соединенных линиями (дугами). Вершины графа соответствуют элементам множества A , то есть x_i , а наличие дуги, соединяющей вершины x_i и x_j , означает, что $(x_i, x_j) \in R$. Чтобы подчеркнуть упорядоченность пары на дуге ставится стрелка.

$A = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, e), (e, b), (e, e)\}$



5. Матричная форма задания

Пусть на некотором конечном множестве X задано отношение A . Упорядочим каким-либо образом элементы множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и определим матрицу отношения $A = [a_{ij}]$ следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, x_j) \text{ принадлежит } \alpha, \\ 0, & \text{если } (x_i, x_j) \text{ не принадлежит } \alpha. \end{cases}$$

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{matrix}$$

Операции над бинарными отношениями

- Пересечение двух бинарных отношений R_1 и R_2 - это отношение

$$R_1 \cap R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ и } (x, y) \in R_2 \}.$$

$$\geq \cap \neq >$$

- Объединение двух бинарных отношений R_1 и R_2 - это отношение

$$R_1 \cup R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ или } (x, y) \in R_2 \}.$$

- Разностью отношений R_1 и R_2 называется такое отношение, что:

$$R_1 \setminus R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ и } (x, y) \notin R_2 \}$$

- Дополнение к отношению

$$R = \{ (x, y) \mid (x, y) \in (A \times A) \setminus R \}.$$

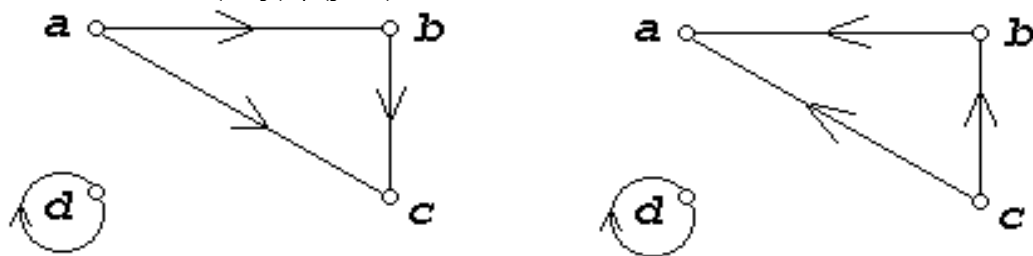
Обратное отношение

- Обратное отношение

$$R^{-1} \in B \times A$$

$$R^{-1} = \{ (y, x) \mid y \in B, x \in A, (x, y) \in R \}.$$

$$R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in R \}.$$



2.4 Свойства бинарных отношений

Отношение R на M называется рефлексивным, если для любого $a \in M$ выполняется aRa . Главная диагональ матрицы такого отношения содержит только единицы.

Отношение R на M называется антирефлексивным, если ни для какого $a \in M$ не выполняется aRa . Главная диагональ матрицы отношения содержит только нули.

Отношение R на M называется симметричным, если для любой пары из aRb следует bRa (иначе говоря, для любой пары отношение R выполняется в обе стороны или не выполняется вообще). Матрица симметричного отношения – симметрична относительно главной диагонали: для всех i, j , то есть $C = C^T$.

Отношение R на M называется антисимметричным, если из того, что выполняется aRb и bRa следует, что $a = b$ (то есть ни для каких различных элементов множества M отношение R не выполняется в обе стороны). Матрица антисимметричного отношения не имеет ни одного симметричного относительно главной диагонали единичного элемента.

Отношение R на M называется транзитивным, если для любых a, b, c из множества M из того, что выполняется aRb и bRc следует, что aRc .

Отношение эквивалентности

Отношение R на M называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Равенство – это минимальное отношение эквивалентности в том смысле, что при удалении любой пары из E (то есть любой единицы на диагонали матрицы E) оно перестает быть рефлексивным и, следовательно, уже не является эквивалентным.

Пусть на множестве M задано отношение эквивалентности R . Осуществим построение классов эквивалентности, на которые разбивается множество M этим отношением.

Выберем элемент a_1 и образуем класс C_1 (подмножество M), состоящий из и всех элементов, эквивалентных.

Затем выберем элемент a_2 , и образуем класс C_2 , состоящий из и всех элементов, эквивалентных, и так далее.

Получится система классов (возможно бесконечная) такая, что любой элемент из M входит хотя бы в один класс, то есть.

Эта система обладает свойствами:

- 1) она образует разбиение, то есть классы попарно не пересекаются;
- 2) любые два элемента из одного класса эквивалентны;
- 3) любые два элемента из разных классов неэквивалентны.

Мощность системы классов эквивалентности называется индексом разбиения.

Совокупность классов эквивалентности, на которые разбивается множество M по отношению эквивалентности R , называется фактор-множеством множества M по отношению R . Тогда классы эквивалентности – это элементы фактор-множества, а индекс разбиения – мощность фактор-множества.

С другой стороны, любое разбиение M на классы определяет некоторое отношение эквивалентности.

Отношение порядка

Отношение называется отношением нестрогого порядка, если оно рефлексивно, антисимметрично, транзитивно.

Отношение называется отношением строгого порядка, если оно антирефлексивно, антисимметрично, транзитивно.

Оба типа таких отношений называются отношениями порядка.

Элементы a и b сравнимы по отношению порядка R , если выполняется aRb или bRa .

Множество M , на котором задано отношение порядка, называется полностью упорядоченным, если любые два элемента M сравнимы. Иначе говорят, обладает свойством полноты.

Множество M , на котором задано отношение порядка, называется частично упорядоченным, если не любые два элемента M сравнимы.

2.5 Комбинаторика

Одно из основных правил комбинаторики – правило суммы [1–3]. Его классическая формулировка имеет вид: если элемент α можно выбрать k способами, а элемент β можно выбрать m способами, тогда α или β можно выбрать $k + m$ способами. Например, если в вазе 5 яблок и 6 груш, то 1 фрукт (яблоко или грушу) можно выбрать $5 + 6 = 11$ способами.

Современная формулировка правила суммы известна как теорема о мощности объединения множеств:

мощность объединения двух множеств равна сумме мощностей первого и второго множества, за вычетом мощности их пересечения:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Причем, если множества не пересекаются, то теорема приобретает вид, аналогичный классической формулировке:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Для трех множеств теорема имеет вид:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Пример 1

Из 35 учащихся по итогам года имели «5» по математике – 14 человек; по физике – 15 человек; по химии – 18 человек; по математике и физике – 7 человек; по математике и химии – 9 человек; по физике и химии – 6 человек; по всем трем предметам – 4 человек.

Сколько человек имеют “5” по указанным предметам? Сколько человек не имеет “5” по указанным предметам? Имеет “5” только по математике? Имеет “5” только по двум предметам?

Введем обозначения. Обозначим буквой U множество всех учащихся, буквой M множество учащихся, имеющих «5» по математике, буквой Φ – имеющих «5» по физике, X – имеющих «5» по химии. Тогда, согласно условию,

$$|U| = 35, |M| = 14, |\Phi| = 15, |X| = 18,$$

$$|M \cap \Phi| = 7, |M \cap X| = 9, |\Phi \cap X| = 6, |M \cap \Phi \cap X| = 4.$$

На рисунке 1 приведено множество, состоящее из учащихся, имеющих «5» хотя бы по одному из указанных предметов.

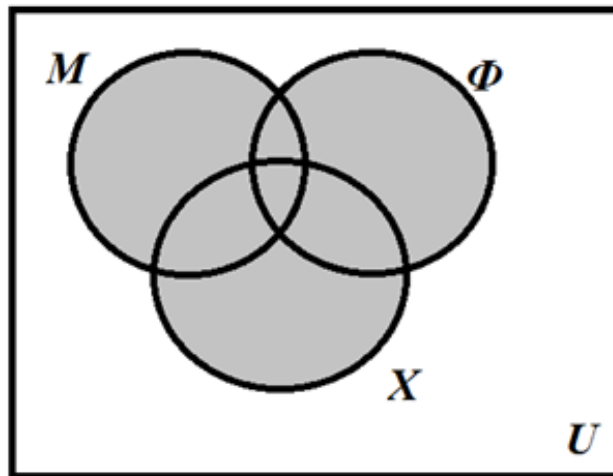


Рисунок 2.5 – Пересечение 3-х множеств.

Очевидно, что это объединение множеств M , Φ и X . Для нахождения количества элементов объединения воспользуемся правилом суммы.

$$\begin{aligned}
 |M \cup \Phi \cup X| &= |M| + |\Phi| + |X| - \\
 &- |M \cap \Phi| - |M \cap X| - |\Phi \cap X| + |M \cap \Phi \cap X|, \\
 |M \cup \Phi \cup X| &= 14 + 15 + 18 - 7 - 9 - 6 + 4 = 29.
 \end{aligned}$$

На рисунке 2 приведено множество, состоящее из учащихся, не имеющих «5» ни по одному из указанных предметов. Обозначим его буквой H .

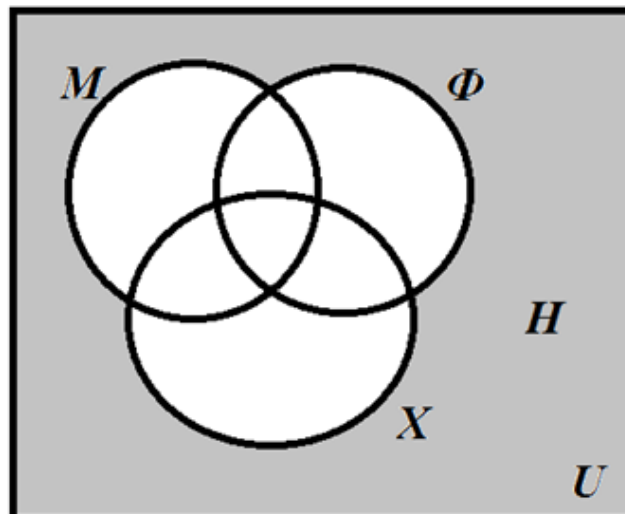


Рисунок 2.6 – Дополнение пересечения 3-х множеств.

Очевидно, что это разность между универсальным множеством U и объединением множеств M , Φ и X .

$$\begin{aligned}
 |U| &= |H \cup (M \cup \Phi \cup X)| = |H| + |M \cup \Phi \cup X|, \\
 |H| &= |U| - |M \cup \Phi \cup X|. \\
 |H| &= 35 - 29 = 6.
 \end{aligned}$$

На рисунке 3 приведено множество, состоящее из учащихся, имеющих «5» только по математике. Обозначим его буквами TM .

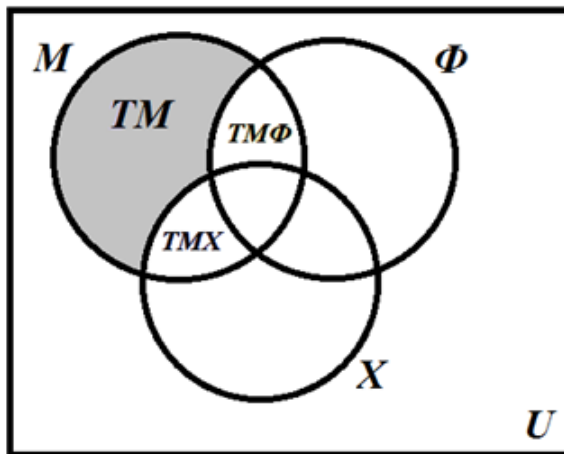


Рисунок 2.7 – Только математика.

Очевидно, что это разность между множеством M и множествами $TM\Phi$ – имеющих «5» только по математике и физике, TMX – имеющих «5» только по математике и химии, и

$$M \cap \Phi \cap X.$$

$$|TM| = |M| - |M \cap \Phi| - |M \cap X| + |M \cap \Phi \cap X|.$$

$$|TM| = 14 - 7 - 9 + 4 = 18 - 16 = 2.$$

На рисунке 4 приведено множество, состоящее из учащихся, имеющих «5» только по двум предметам. Обозначим его $T2$. Очевидно, что $T2$ является суммой трех непересекающихся множеств $TM\Phi$, TMX , $T\Phi X$.

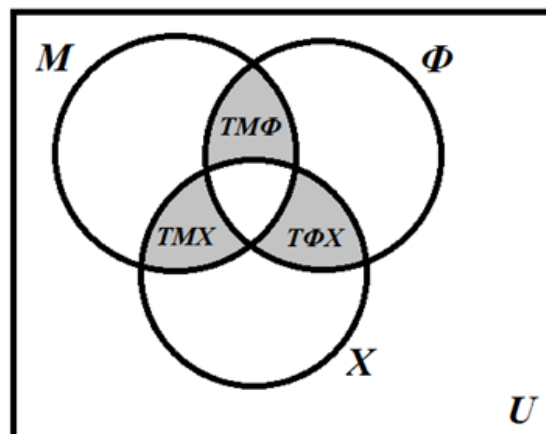


Рисунок 2.8 – Сумма трех непересекающихся множеств $TM\Phi$, TMX , $T\Phi X$.

Найдем мощность каждой части искомого множества:

$$|TM\Phi| = |M \cap \Phi| - |M \cap \Phi \cap X|;$$

$$|TMX| = |M \cap X| - |M \cap \Phi \cap X|;$$

$$|T\Phi X| = |\Phi \cap X| - |M \cap \Phi \cap X|.$$

Тогда искомая мощность примет вид:

$$\begin{aligned} |T2| &= |TM\Phi| + |TMX| + |T\Phi X| = \\ &= |M \cap \Phi| + |M \cap X| + |\Phi \cap X| - 3|M \cap \Phi \cap X|. \end{aligned}$$

Правило произведения

Классическая формулировка

Если элемент α можно выбрать k способами, а элемент β можно выбрать m способами.

Тогда пару α и β можно выбрать km способами.

Теорема о мощности прямого произведения множеств (современная формулировка)

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Пример:

Из 3 экземпляров учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 6 экземпляров учебника физики, надо выбрать комплект, содержащий все учебники по одному разу. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: $3 \times 7 \times 6 = 126$.

Пример:

Из 10 арабских цифр составляют 5-значный код. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы: а) все цифры были разными; б) на последнем месте четная цифра.

а) $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$;

б) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 5$.

1.6 Комбинаторные формулы

Число размещений без повторений из n по k – это число способов, сколькими можно из n различных элементов построить векторов с k различными координатами.

Число размещений без повторений находится по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Пример

Сколькими способами можно построить 3-значное число с различными цифрами, не содержащее цифры 0?

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} = 7 \cdot 8 \cdot 9.$$

Число размещений с повторениями из n по k – это число способов, сколькими можно из n различных элементов построить векторов с k координатами, среди которых могут быть одинаковые.

Число размещений с повторениями находится по формуле:

$$B_n^k = n^k$$

Пример

Сколько слов длины 6 можно составить из 26 букв латинского алфавита?

$$B_{26}^6 = 26^6$$

Число перестановок без повторений из n элементов – это число способов, сколькими можно расположить на n различных местах n различных элементов.

Число перестановок без повторений находится по формуле:

$$P_n = n!$$

Задача на рассадки и расстановки.

В задачах на рассадки и расстановки используется тот факт, что n различных элементов на n различных местах можно расставить $n!$ различными способами

Пример

Сколькими способами можно расставить на книжной полке 5 различных книг? Всего вариантов расстановки 5 книг на 5 местах :

$$5! = 120$$

Число сочетаний без повторений из n по k – это число способов, сколькими можно из n различных элементов выбрать k штук без учета порядка.

Число сочетаний без повторений находится по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Свойства числа сочетаний

$$1. C_n^0 = 1;$$

$$2. C_n^n = 1;$$

$$3. C_n^1 = n;$$

$$4. C_n^{n-1} = n;$$

$$5. C_n^k = C_n^{n-k};$$

$$6. C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2};$$

$$7. C_n^3 = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}.$$

Типы выборок

	Повторений элементов нет	Повторения элементов есть
Порядок важен	A_n^r размещения	$\overline{A}_n^r$ размещения с повторениями
Порядок не важен	C_n^r сочетания	$\overline{C}_n^r$ сочетания с повторениями

Бином Ньютона позволяет продолжить ряд формул сокращенного умножения.

$$(a+b)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 a b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^n a^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

Биномиальными коэффициентами являются величины, которые выражают число сочетаний из n элементов по k

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

В n-ой строке треугольника Паскаля стоят коэффициенты разложения бинома $(a+b)^n$.

