

Векторы.

Вектор – это упорядоченный набор элементов. Его элементы называются **координатами** или **компонентами** вектора.

Длина (размерность) вектора – число координат вектора.

В отличие от элементов множества, его координаты могут совпадать. Обозначение вектора: в круглых скобках, координаты – через запятую (0, 5, 4, 5, 0, 1). Иногда скобки и даже запятые опускаются.

Векторы длины 2 называют упорядоченными парами; длины 3 – тройками; и так далее, длины n – n -ками.

Два вектора **равны**, если они имеют одинаковую длину, и соответствующие координаты равны, то есть.

Если

$$(a_1, a_2, \dots, a_m) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

и $m = n$

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_m = b_n.$$

Прямое произведение n множеств

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

Прямое произведение множеств

называется множеством всех векторов

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

, длины n таких, что

$$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n.$$

Иначе говоря

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n =$$

$$= \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}.$$

Пример 1:

Найти прямое произведение множеств

A_1, A_2 и A_3 где

$$A_1 = \{0,1\}, A_2 = \{m,n\}, A_3 = \{1,3\}.$$

Перечисляем тройки элементов в лексико-графическом порядке.

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(0,m,1), (0,m,3), (0,n,1), (0,n,3), (1,m,1), (1,m,3), (1,n,1), (1,n,3)\}.$$

Пусть A – конечное множество, элементами которого являются *символы* (буквы, цифры, знаки препинания, знаки операций и т. д.). Такие множества обычно называют *алфавитом*.

Примеры алфавитов:

- 1) 33 русских буквы,
- 2) 26 латинских букв,
- 3) 10 арабских цифр;
- 4) Таблица ASCII.

Слова длины n в алфавите A – это элементы множества

Множество всех слов в алфавите A – это множество

$$A^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^i = A^1 \cup A^2 \cup \dots \cup A^n \cup \dots$$

Здесь слово определено как вектор.

При написании слова не принято пользоваться разделителями:

скобками, запятыми; они могут оказаться символами самого алфавита.

Поэтому слово в алфавите обозначается как конечная последовательность символов из алфавита A .

Пример 2:

1. Десятичное число – слово в алфавите цифр $\{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$.
2. Двоичное слово в алфавите $\{0, 1\}$.
3. Текст, отпечатанный на машинке – слово в алфавите, определяемом клавиатурой этой машинки.

Теорема (о мощности прямого произведения множеств)

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

Пусть

конечные множества и

$$|A_1| = m_1, |A_2| = m_2, \dots, |A_n| = m_n.$$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

Тогда мощность множества
равна произведению мощностей множеств:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n.$$

Следствие:

$$|A^n| = |A|^n.$$

$$B_3 -$$

Например, множество B_3 — двоичных векторов длины 3,
содержит

$$|B_3| = |B^3| = |B|^3 = 2^3.$$

Соответствия.

Соответствием [2, 4, 5] множеств A и B называется подмножество G

$$G \subseteq A \times B.$$

такое, что . Если , то говорят, что « b соответствует a при соответствии G ».

Область определения соответствия G – множество pr_1

$$G \subseteq A.$$

$$G \subseteq B.$$

Область значений соответствия G – множество pr_2

Соответствие G называется *всюду (полностью) определенным* – если $pr_1 G = A$ (в противном случае – частично определенное соответствие).

Соответствие G называется *сюръективным*, если $pr_2 G = B$.

$$a \in pr_1 G$$

Образ элемента

в множестве B при соответствии

$$b \in pr_2 G$$

G – это множество всех элементов , которые соответствуют a . Обозначим образ a – $G(a)$.

$$b \in pr_2 G$$

Прообраз элемента

в множестве A при

$$a \in pr_1 G$$

соответствии G – это множество всех , которым соответствует b . Обозначим прообраз b – $G^{-1}(b)$.

$$C \subseteq pr_1 G$$

Образом множества

называется объединение

$$D \subseteq pr_2 G$$

образов всех элементов C . *Прообразом множества*

называется объединение прообразов всех элементов D .

Соответствие G называется *функциональным (однозначным)*

соответствием, если образом любого элемента из $pr_1 G$ является единственный элемент из $pr_2 G$. Иначе говорят, соответствие G обладает свойством единственности образа.

Соответствие G называется *инъективным* соответствием, если прообразом любого элемента из $pr_2 G$ является единственный элемент из pr_1

G . Иначе говорят, соответствие G обладает свойством единственности прообраза.

$$F : A \rightarrow B,$$

Соответствие G является *функцией f типа*, если оно функционально. Обозначение функции:

$$F(a) = b.$$

Соответствие G является *отображением* множества A в множество B , если оно функционально и полностью определено.

Отображение будет *отображением A в B* , если G – не сюръективно.

Отображение будет *отображением A на B* , если G – сюръективно.

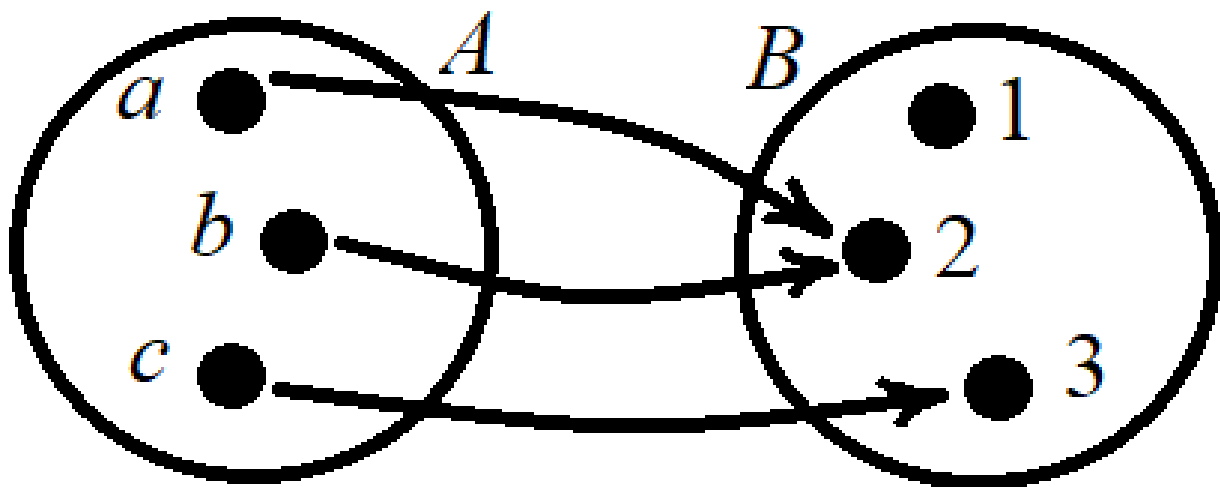
Соответствие G является *взаимно однозначным*, если оно: 1) всюду определено; 2) сюръективно; 3) функционально; 4) инъективно.

Пример 1:

Определить свойства соответствия G между множествами A и B .

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$.

$G = \{(a, 2), (b, 2), (c, 3)\}$.

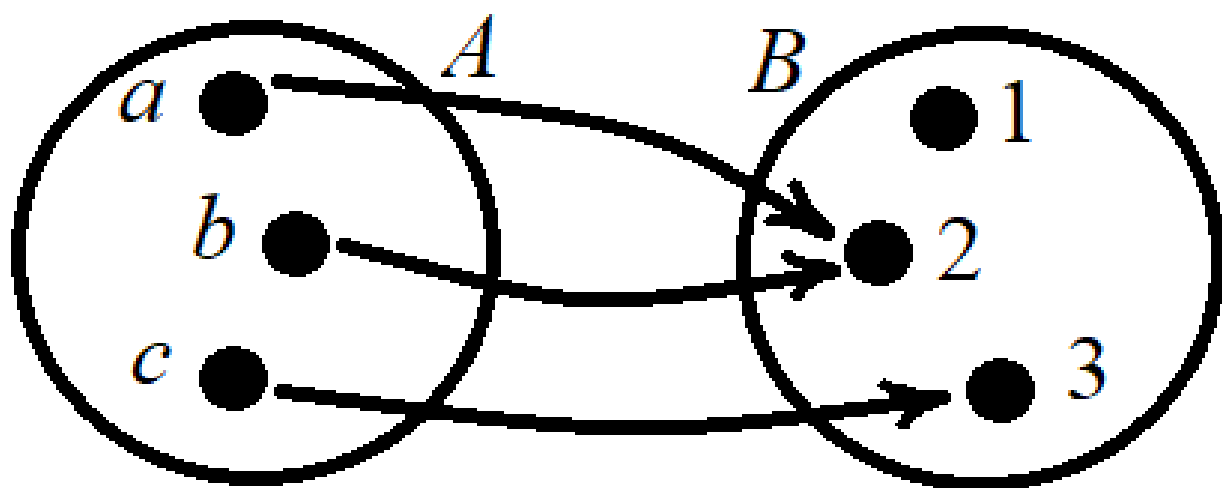


Область определения:

$D(G) = pr1G = \{a, b, c\} = A$, значит *полностью определено*.

Область значения:

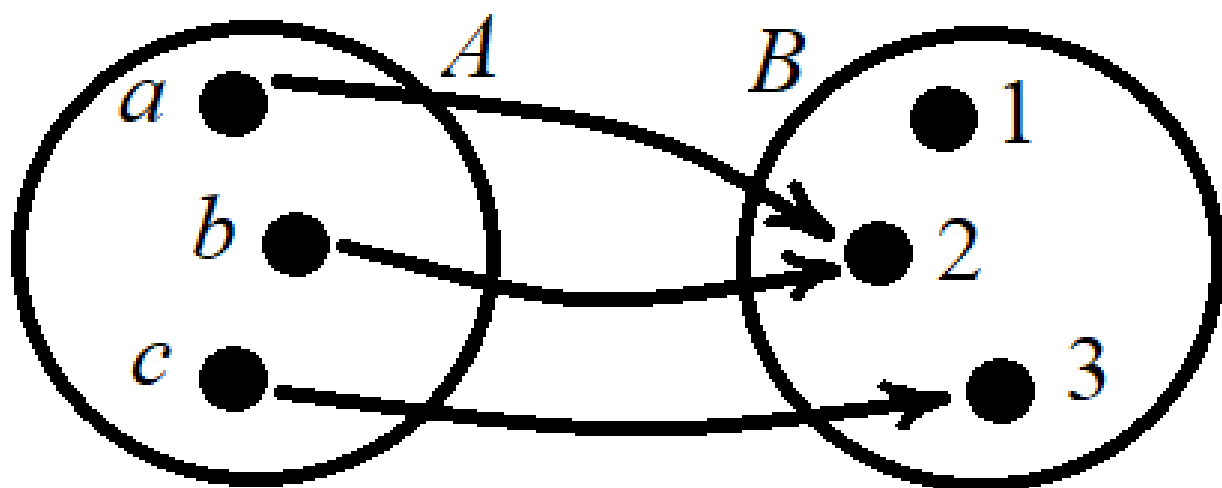
$E(G) = pr2G = \{2, 3\} \neq B$, значит *не сюръективно*.



Образы элементов области определения:

$$G(a) = \{2\}; G(b) = \{2\}; G(c) = \{3\}.$$

Видим, что есть единственность образа, значит соответствие *функционально*.



Прообразы элементов области значений:

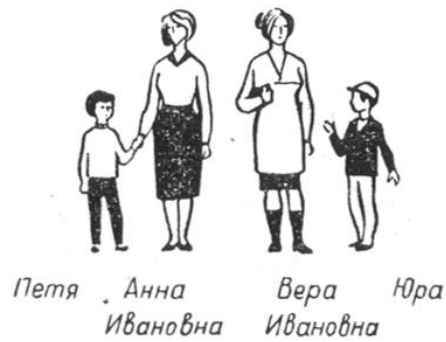
$$G^{-1}(2) = \{a, b\}; G^{-1}(3) = \{c\}.$$

Нет единственности прообраза, значит *не инъективно*.

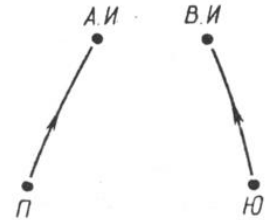
Выводы:

1. Соответствие является функцией, так как функционально.
2. Соответствие является отображением, так как полностью определено и функционально.
3. Соответствие является отображением A в B , так как не сюръективно.
4. Соответствие не является взаимно однозначным, так как не сюръективно и не инъективно.

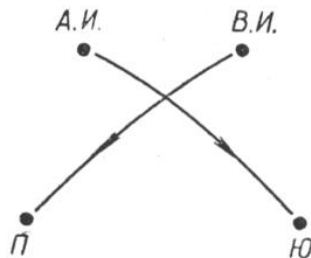
Бинарные отношения.



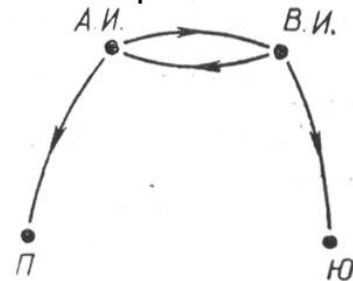
Отношение: «быть сыном»



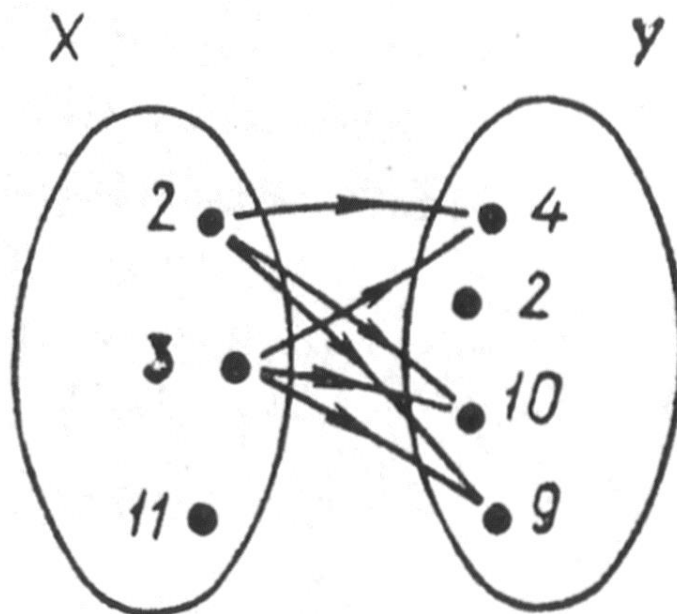
Отношение: «Быть тётей»



Отношение: «быть сестрой или матерью»



Отношение: «меньше»



$\{(2; 4), (2; 10), (2; 9), (3; 4), (3; 10), (3; 9)\}$.

Вспомним:

Декартовым (прямым) произведением множеств $A \times B$ называется множество всех упорядоченных пар (всех кортежей), в которых первый

элемент принадлежит множеству А, а второй элемент принадлежит множеству В.

Пример Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

$$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)\}; |A \times B| = 9.$$

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a_1, a_2, a_3) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3\}$$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

Бинарным отношением между элементами множеств А и В называется любое подмножество $R \subseteq A \times B$.

Если множества А и В совпадают $A=B$, то R называют бинарным отношением на множестве А. (*однородное отношение*)

Если $(x, y) \in R$, то это обозначают еще xRy и говорят, что между элементами x и y установлено бинарное отношение R.

Для отношения R обратным является отношение

$$R^{-1} = B \times A.$$

Способы задания бинарных отношений.

1. **Перечислением элементов**

$$V = \{a, b, c, d, e\}, T \subseteq V$$

$$T = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, d), (c, e), (d, b), (d, c), (e, c), (d, e)\}$$

2. **Характеристическим свойством**

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, R \subseteq Z$$

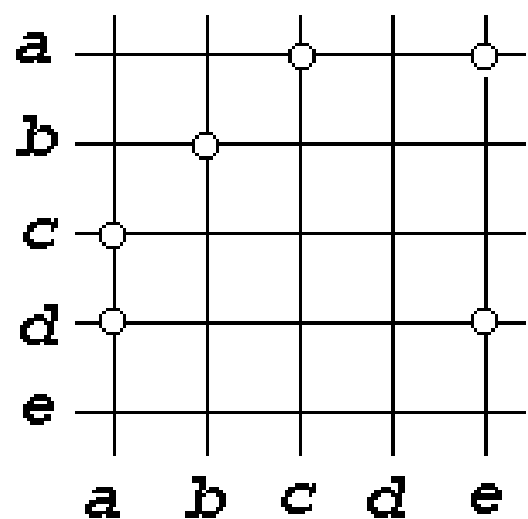
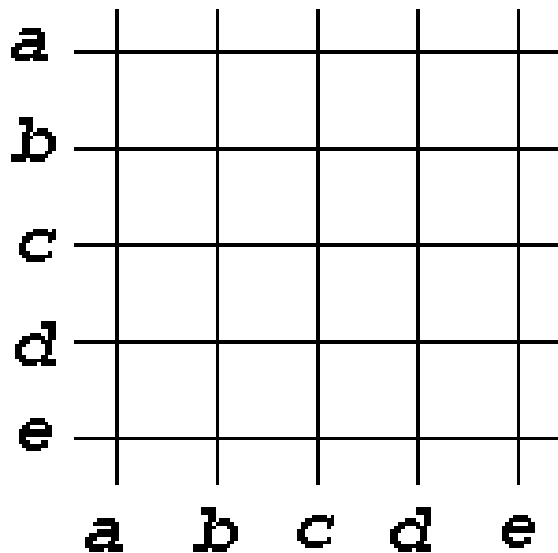
$$R = \{(x, y) | x < y\}$$

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}$$

Способы задания

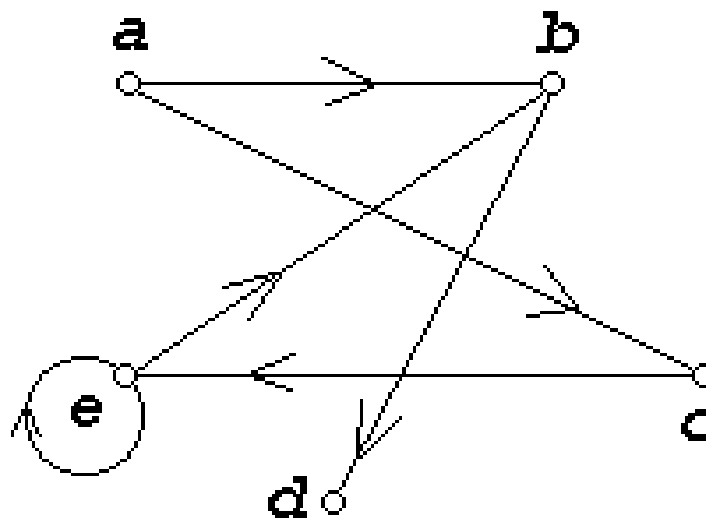
Графический метод задания

$$R = \{(a, d), (a, c), (b, b), (c, a), (e, d), (e, a)\}$$



Граф - фигура состоящая из точек (вершин) соединенных линиями (дугами). Вершины графа соответствуют элементам множества A , то есть x_i , а наличие дуги, соединяющей вершины x_i и x_j , означает, что $(x_i, x_j) \in R$. Чтобы подчеркнуть упорядоченность пары на дуге ставится стрелка.

- $A = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, e), (e, b), (e, e)\}$



Матричная форма задания

Пусть на некотором конечном множестве X задано отношение A . Упорядочим каким-либо образом элементы множества $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и определим матрицу отношения $A = [a_{ij}]$ следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_i, x_j) \text{ принадлежит } \alpha, \\ 0, & \text{если } (x_i, x_j) \text{ не принадлежит } \alpha. \end{cases}$$

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	0	1	1	0	0
<i>b</i>	0	0	0	1	0
<i>A=c</i>	0	0	0	0	1
<i>d</i>	0	0	0	0	0
<i>e</i>	0	1	0	0	1

Операции над бинарными отношениями

- Пересечение двух бинарных отношений R_1 и R_2 - это отношение

$$R_1 \cap R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ и } (x, y) \in R_2 \}.$$

$\geq \cap \neq \Rightarrow$

- Объединение двух бинарных отношений R_1 и R_2 - это отношение

$$R_1 \cup R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ или } (x, y) \in R_2 \}.$$

- Разностью отношений R_1 и R_2 называется такое отношение, что:

$$R_1 \setminus R_2 = \{ (x, y) \mid (x, y) \in R_1 \text{ и } (x, y) \notin R_2 \}$$

- Дополнение к отношению

$$R = \{ (x, y) \mid (x, y) \in (A \times A) \setminus R \}.$$

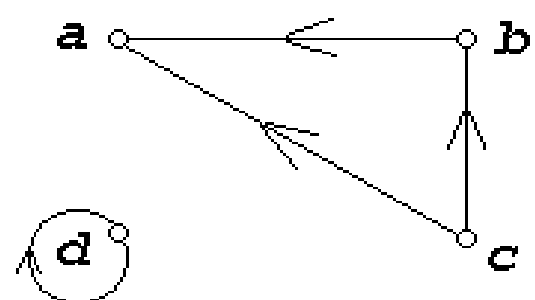
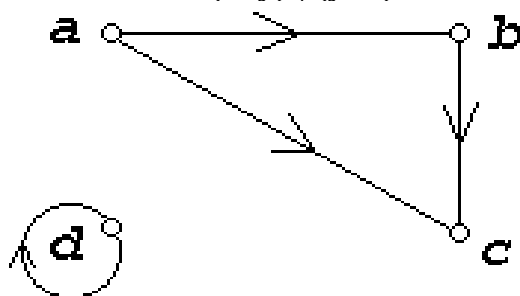
Обратное отношение

- Обратное отношение

$$R^{-1} \in B \times A$$

$$R^{-1} = \{ (y, x) \mid y \in B, x \in A, (x, y) \in R \}.$$

$$R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in R \}.$$



Свойства бинарных отношений

Отношение R на M называется **рефлексивным**, если для любого

$$a \in M \quad aRa.$$

выполняется . Главная диагональ матрицы такого отношения содержит только единицы.

Отношение R на M называется **антирефлексивным**, если ни для какого

$$a \in M \quad aRa.$$

не выполняется . Главная диагональ матрицы отношения содержит только нули.

Отношение R на M называется **симметричным**, если для любой пары из aRb следует bRa (иначе говоря, для любой пары отношение R выполняется в обе стороны или не выполняется вообще). Матрица симметричного отношения – симметрична относительно главной диагонали: для всех i, j , то есть $C = C^T$.

Отношение R на M называется **антисимметричным**, если из того, что выполняется aRb и bRa следует, что $a = b$ (то есть ни для каких различных элементов множества M отношение R не выполняется в обе стороны). Матрица антисимметричного отношения не имеет ни одного симметричного относительно главной диагонали единичного элемента.

Отношение R на M называется **транзитивным**, если для любых a, b, c из множества M из того, что выполняется aRb и bRc следует, что aRc .

Отношение эквивалентности

Отношение R на M называется **отношением эквивалентности**, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Равенство – это минимальное отношение эквивалентности в том смысле, что при удалении любой пары из E (то есть любой единицы на диагонали матрицы E) оно перестает быть рефлексивным и, следовательно, уже не является эквивалентным.

Пусть на множестве M задано отношение эквивалентности R . Осуществим построение **классов эквивалентности**, на которые разбивается множество M этим отношением.

Выберем элемент a_1 и образуем класс C_1 (подмножество M), состоящий из и всех элементов, эквивалентных .

Затем выберем элемент a_2 , и образуем класс C_2 , состоящий из и всех элементов, эквивалентных , и так далее.

Получится система классов (возможно бесконечная) такая, что любой элемент из M входит хотя бы в один класс, то есть

.
Эта система обладает свойствами:

- 1) она образует разбиение, то есть классы попарно не пересекаются;
- 2) любые два элемента из одного класса эквивалентны;
- 3) любые два элемента из разных классов неэквивалентны.

Мощность системы классов эквивалентности называется **индексом разбиения**.

Совокупность классов эквивалентности, на которые разбивается множество M по отношению эквивалентности R , называется **фактор-множеством** множества M по отношению R . Тогда классы эквивалентности – это элементы фактор-множества, а индекс разбиения – мощность фактор-множества.

С другой стороны, любое разбиение M на классы определяет некоторое отношение эквивалентности.

Отношение порядка

Отношение называется отношением **нестрогого порядка**, если оно рефлексивно, антисимметрично, транзитивно.

Отношение называется отношением **строого порядка**, если оно антирефлексивно, антисимметрично, транзитивно.

Оба типа таких отношений называются отношениями порядка.

Элементы a и b **сравнимы** по отношению порядка R , если выполняется aRb или bRa .

Множество M , на котором задано отношение порядка, называется **полностью упорядоченным**, если любые два элемента M сравнимы. Иначе говорят, обладает свойством **полноты**.

Множество M , на котором задано отношение порядка, называется **частично упорядоченным**, если не любые два элемента M сравнимы.

Комбинаторика

Одно из основных правил комбинаторики – **правило суммы** [1–3]. Его **классическая формулировка** имеет вид: если элемент α можно выбрать k способами, а элемент β можно выбрать m способами, тогда α или β можно выбрать $k + m$ способами. Например, если в вазе 5 яблок и 6 груш, то 1 фрукт (яблоко **или** грушу) можно выбрать $5 + 6 = 11$ способами.

Современная формулировка правила суммы известна как **теорема о мощности объединения множеств**:

мощность объединения двух множеств равна сумме мощностей первого и второго множества, за вычетом мощности их пересечения:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Причем, если множества не пересекаются, то теорема приобретает вид, аналогичный классической формулировке:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Для трех множеств теорема имеет вид:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Пример 1

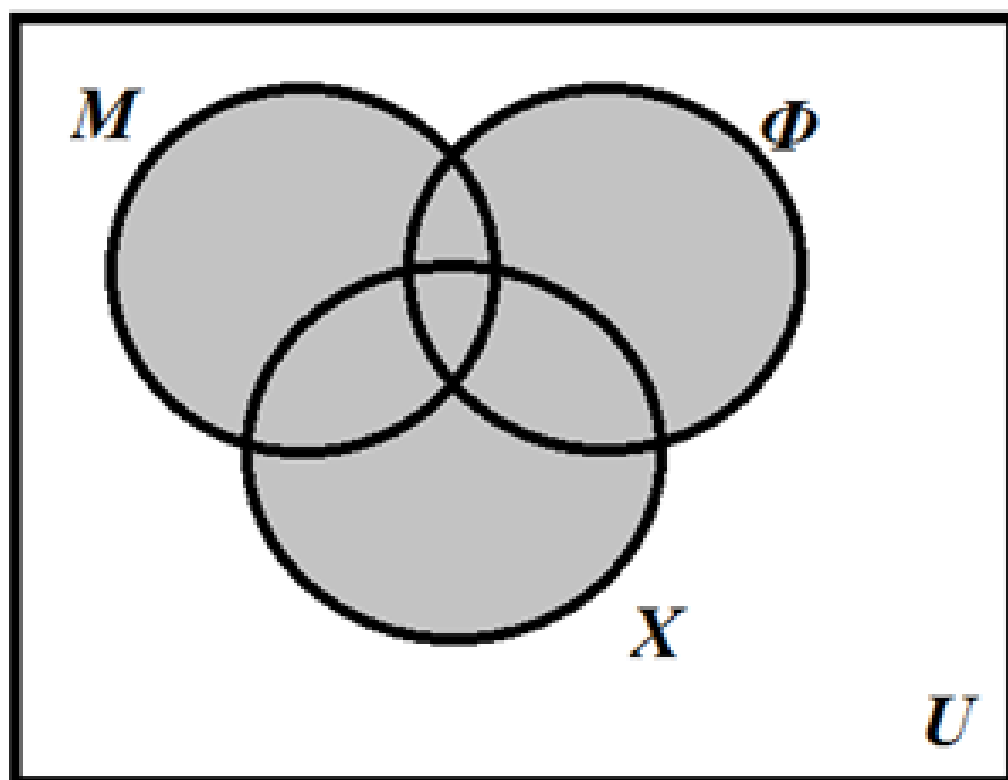
Из 35 учащихся по итогам года имели «5» по математике – 14 человек; по физике – 15 человек; по химии – 18 человек; по математике и физике – 7 человек; по математике и химии – 9 человек; по физике и химии – 6 человек; по всем трем предметам – 4 человек.

Сколько человек имеют “5” по указанным предметам? Сколько человек не имеет “5” по указанным предметам? Имеет “5” только по математике? Имеет “5” только по двум предметам?

Введем обозначения. Обозначим буквой U множество всех учащихся, буквой M множество учащихся, имеющих «5» по математике, буквой Φ – имеющих «5» по физике, X – имеющих «5» по химии. Тогда, согласно условию,

$$|U| = 35, \quad |M| = 14, \quad |\Phi| = 15, \quad |X| = 18, \\ |M \cap \Phi| = 7, \quad |M \cap X| = 9, \quad |\Phi \cap X| = 6, \quad |M \cap \Phi \cap X| = 4.$$

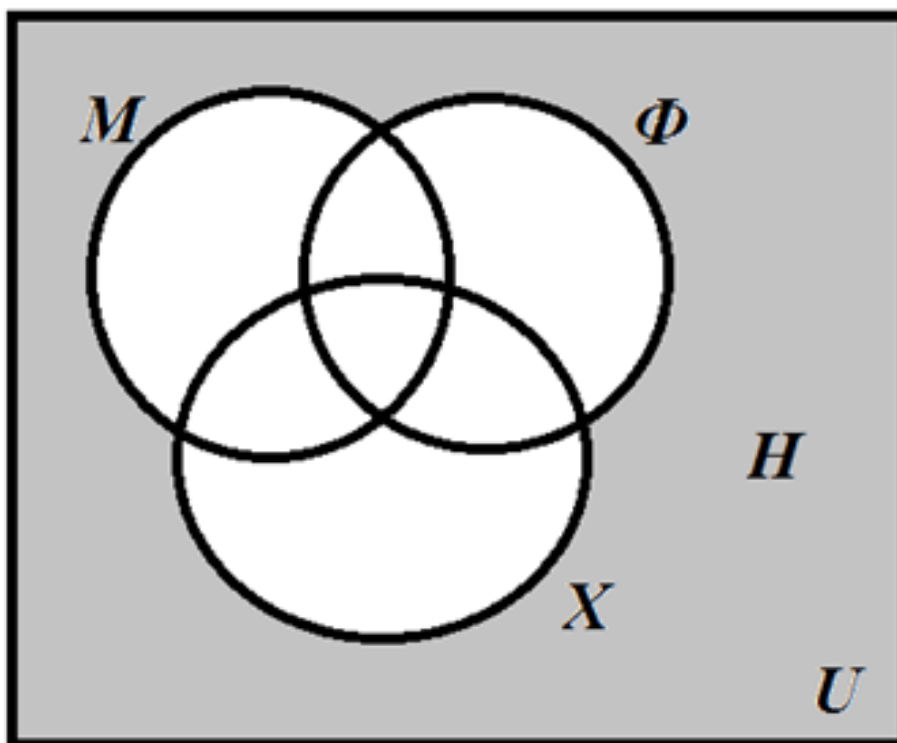
На рисунке 1 приведено множество, состоящее из учащихся, имеющих «5» хотя бы по одному из указанных предметов.



Очевидно, что это объединение множеств M , Φ и X . Для нахождения количества элементов объединения воспользуемся правилом суммы.

$$\begin{aligned}
 |M \cup \Phi \cup X| &= |M| + |\Phi| + |X| - \\
 &\quad - |M \cap \Phi| - |M \cap X| - |\Phi \cap X| + |M \cap \Phi \cap X|, \\
 |M \cup \Phi \cup X| &= 14 + 15 + 18 - 7 - 9 - 6 + 4 = 29.
 \end{aligned}$$

На рисунке 2 приведено множество, состоящее из учащихся, не имеющих «5» ни по одному из указанных предметов. Обозначим его буквой H .



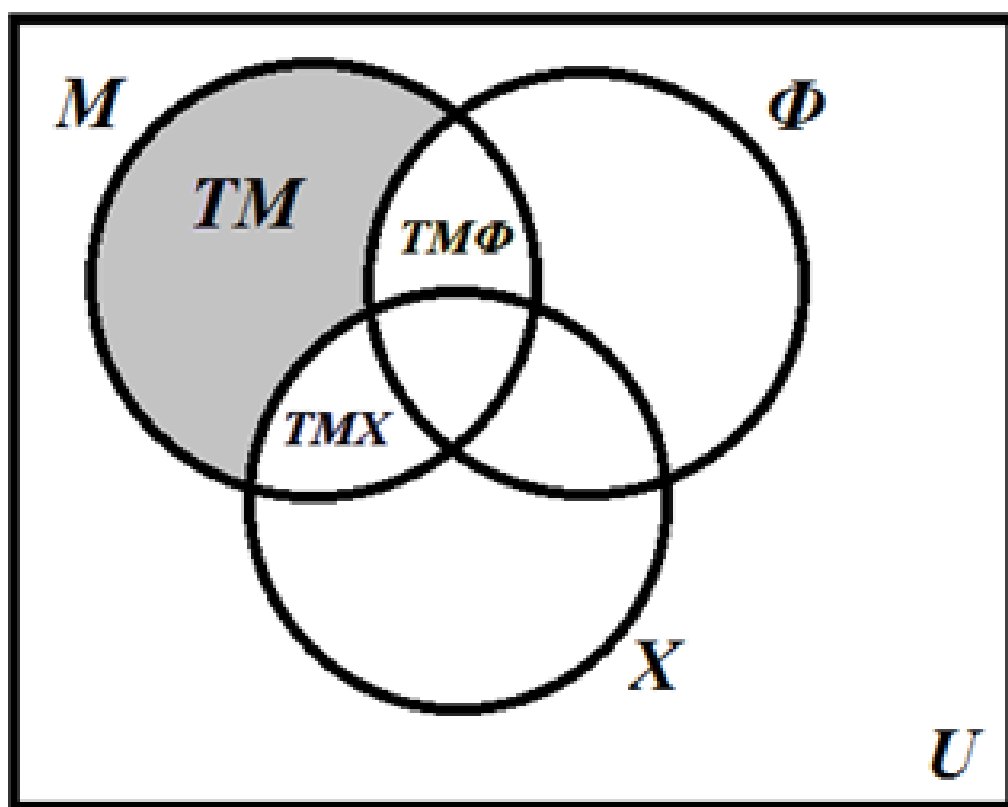
Очевидно, что это разность между универсальным множеством U и объединением множеств M , Φ и X .

$$|U| = |H \cup (M \cup \Phi \cup X)| = |H| + |M \cup \Phi \cup X|,$$

$$|H| = |U| - |M \cup \Phi \cup X|.$$

$$|H| = 35 - 29 = 6.$$

На рисунке 3 приведено множество, состоящее из учащихся, имеющих «5» только по математике. Обозначим его буквами TM .



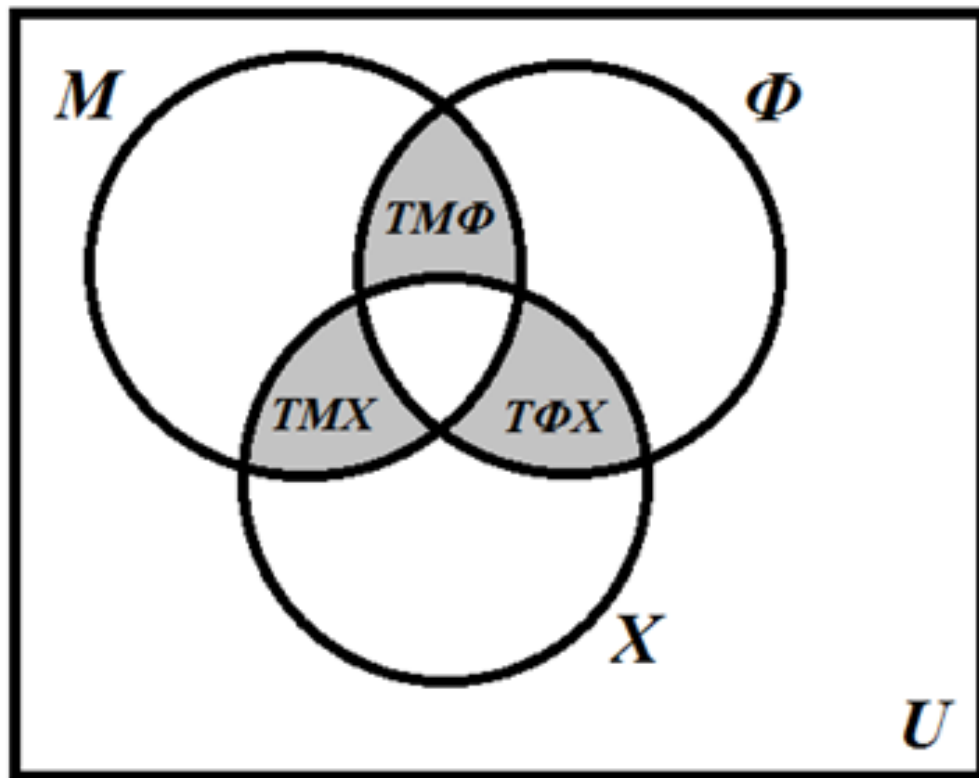
Очевидно, что это разность между множеством M и множествами $TM\Phi$ – имеющих «5» только по математике и физике, TMX – имеющих «5» только по математике и химии, и

$$M \cap \Phi \cap X.$$

$$|TM| = |M| - |M \cap \Phi| - |M \cap X| + |M \cap \Phi \cap X|.$$

$$|TM| = 14 - 7 - 9 + 4 = 18 - 16 = 2.$$

На рисунке 4 приведено множество, состоящее из учащихся, имеющих «5» только по двум предметам. Обозначим его $T2$. Очевидно, что $T2$ является суммой трех непересекающихся множеств $TM\Phi$, TMX , $T\Phi X$.



Найдем мощность каждой части искомого множества:

$$|TM\Phi| = |M \cap \Phi| - |M \cap \Phi \cap X|;$$

$$|TMX| = |M \cap X| - |M \cap \Phi \cap X|;$$

$$|T\Phi X| = |\Phi \cap X| - |M \cap \Phi \cap X|.$$

Тогда искомая мощность примет вид:

$$|T2| = |TM\Phi| + |TMX| + |T\Phi X| =$$

$$= |M \cap \Phi| + |M \cap X| + |\Phi \cap X| - 3|M \cap \Phi \cap X|.$$

Правило произведения

Классическая формулировка

Если элемент α можно выбрать k способами, а элемент β можно выбрать m способами.

Тогда пару α и β можно выбрать km способами.

Теорема о мощности прямого произведения множеств (современная формулировка)

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Пример:

Из 3 экземпляров учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 6 экземпляров учебника физики, надо выбрать комплект, содержащий все учебники по одному разу. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: $3 \times 7 \times 6 = 126$.

Пример:

Из 10 арабских цифр составляют 5-значный код. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы: а) все цифры были разными; б) на последнем месте четная цифра.

а) $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$;

б) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 5$.

Комбинаторные формулы

Число размещений без повторений из n по k – это число способов, сколькими можно из n различных элементов построить векторов с k различными координатами.

Число размещений без повторений находится по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Пример

Сколькими способами можно построить 3-значное число с различными цифрами, не содержащее цифры 0?

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9 - 3)!} = \frac{9!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 6} = 7 \cdot 8 \cdot 9.$$

Число размещений с повторениями из n по k – это число способов, сколькими можно из n различных элементов построить векторов с k координатами, среди которых могут быть одинаковые.

Число размещений с повторениями находится по формуле:

$$B_n^k = n^k$$

Пример

Сколько слов длины 6 можно составить из 26 букв латинского алфавита?

$$B_{26}^6 = 26^6$$

Число перестановок без повторений из n элементов – это число способов, сколькими можно расположить на n различных местах n различных элементов.

Число перестановок без повторений находится по формуле:

$$P_n = n!$$

Задача на рассадки и расстановки

В задачах на рассадки и расстановки используется тот факт, что n различных элементов на n различных местах можно расставить $n!$ различными способами

Пример

Сколькими способами можно расставить на книжной полке 5 различных книг? Всего вариантов расстановки 5 книг на 5 местах :
 $5! = 120$

Число сочетаний без повторений из n по k – это число способов, сколькими можно из n различных элементов выбрать k штук без учета порядка.

Число сочетаний без повторений находится по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Свойства числа сочетаний

$$1. C_n^0 = 1; \quad 2. C_n^n = 1;$$

$$3. C_n^1 = n; \quad 4. C_n^{n-1} = n;$$

$$5. C_n^k = C_n^{n-k};$$

$$6. C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2};$$

$$7. C_n^3 = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!}.$$

Типы выборок

	Повторений элементов нет	Повторения элементов есть
Порядок важен	A_n^r размещения	$\overline{A}_n^r$ размещения с повторениями
Порядок не важен	C_n^r сочетания	$\overline{C}_n^r$ сочетания с повторениями

Бином Ньютона позволяет продолжить ряд формул сокращенного умножения.

$$(a+b)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 a b^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^n a^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

Биномиальными коэффициентами являются величины, которые выражают число сочетаний из n элементов по k

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

В n-ой строке треугольника Паскаля стоят коэффициенты разложения

$$(a+b)^n$$

бинома

