

Модуль 1 «Множества»

1.1 Введение. Основные понятия.

Множество – это совокупность определенных различаемых объектов таких, что для любого объекта можно установить, принадлежит объект данному множеству или нет.

Множество, которое подчиняется лишь такому ограничению, может содержать объекты почти любой природы.

Основоположником теории множеств является немецкий математик Георг Кантор. Он разработал концепцию абстрактных множеств (1870-е годы), ввел понятия мощности бесконечных множеств, показал, что бесконечности бывают разных «размеров» (счётные и несчётные множества), а также установил принципы кардинальных и порядковых чисел.

Георг Кантор определил множество так:

Множество – это многое, мыслимое как целое.

Например:

- множество всех станций алматинского метро;
- множество левых ботинок;
- множество натуральных чисел: 1, 2, 3, 4 и т. д.;
- множество символов, доступных специальному печатающему устройству;
- множество кодов операций конкретного компьютера.
- множество всех натуральных чисел: 1, 2, 3, . . . Обозначим N . Часто 0 считают натуральным числом. множество N с добавлением 0 обозначается N_0 .
- множество всех натуральных чисел, не превосходящих 100.
- множество всех решений уравнения $|\sin x| = 1$.

Множество обозначают заглавными буквами, а его элементы – прописными.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Говоря об определенном множестве, мы полагаем, что для каждого объекта имеется две возможности: элемент либо входит в множество $x \in X$, либо нет $x \notin X$.

Мощность множества – количество его элементов.

Обозначение мощности: $|A|$.

Множество, не содержащее элементов, называется пустым множеством и обозначается $\emptyset$.

$$|\emptyset| = 0.$$

В зависимости от их мощности множества различают как конечные или бесконечные. Конечные множества могут состоять из одного или нескольких элементов.

Способы задания множества:

Перечисление — все элементы указываются явно внутри фигурных скобок.

Описание — задается характеристическое свойство, которым обладают все элементы множества, и только они.

1.2 Способы задания множества.

Перечисление всех элементов множества (список), например множество однозначных неотрицательных чисел

$$X = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}.$$

Множества часто рассматриваются как «неупорядоченные совокупности элементов», хотя иногда полезно подчеркнуть, что, например

$$X = \{0, 1, 2\} = \{2, 1, 0\} = \{2, 0, 1\}.$$

Выяснить, какие из приведенных определений верные?

$$B = \{1, 2, 3\}.$$

$$C = \{5, 6, 6, 7\}.$$

$$D = \{B, C\}.$$

Порождающая процедура.

Описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов. Тогда элементы множества — все объекты, которые могут быть получены (построены) с помощью такой процедуры.

Пример 1:

Множество M_{2^n} натуральных степеней двойки: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128...

Порождающую процедуру зададим рекуррентно:

$$1) 1 \in M_{2^n}$$

$$2) m \in M_{2^n}; 2m \in M_{2^n}$$

Пример 2

Какое множество задается рекуррентной формулой:

$$x_1 = 1, \quad x_n = x_{n-1} \cdot n$$

$$\text{при } n = 2, \quad x_2 = x_1 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2!$$

$$\text{при } n = 3, \quad x_3 = x_2 \cdot 3 = 2! \cdot 3 = 3!$$

$$\text{при } n = 4, \quad x_4 = x_3 \cdot 4 = 3! \cdot 4 = 4!$$

Множество, состоящее

из факториалов: $1!, 2!, 3!, 4!, \dots, n!, \dots$

Задание множества описанием его элементов (разрешающая процедура)

указание общего свойства, которым обладают все элементы множества, например множество четных натуральных чисел

$$X = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

или

$$X = \{x : x = 2n, \forall n \in N\};$$

Множество A называют *подмножеством множества B* (обозначается $A \subseteq B$), если каждый элемент множества A является также элементом множества B .

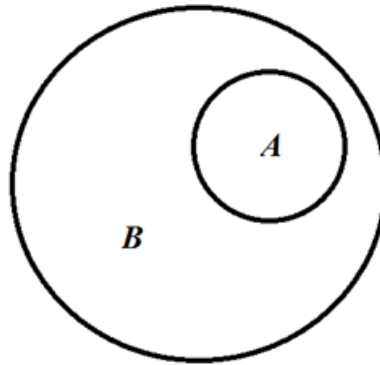


Рисунок 1.1 - Подмножество

Множества A и B называют *равными*

($A = B$), если каждый элемент множества A является одновременно элементом множества B и наоборот,

то есть если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Другими словами, два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов.

Множество U называется *универсальным множеством* (множество элементов всех подмножеств) для некоторой системы множеств, если каждое множество этой системы является подмножеством U , то есть

$$A \subseteq U, B \subseteq U, C \subseteq U \dots$$

Дополнением множества A называется множество $\bar{A}$, состоящее из тех и только тех элементов универсального множества, которые не входят в множество A .

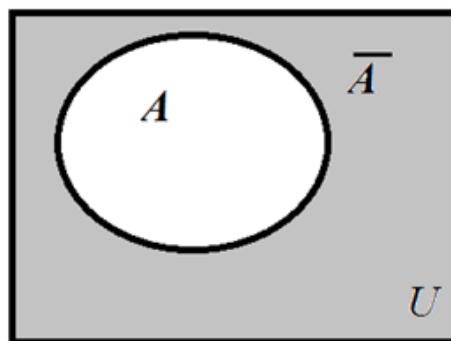


Рисунок 1.2 - Дополнение множества

1.3 Операции над множествами.

Основные операции над множествами позволяют создавать новые множества на основе уже существующих. Они широко используются в

математике, логике и программировании для классификации, фильтрации и анализа данных.

К базовым операциям относятся четыре основные:

- Дополнение множества до универсального.
- Объединение.
- Пересечение.
- Разность.

Объединением двух множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из тех элементов, которые принадлежат или множеству A , или B , или A и B одновременно.

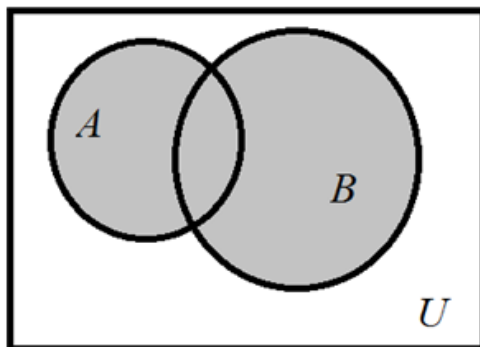


Рисунок 1.3 – Объединение множеств

Пересечением двух множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам A и B одновременно.

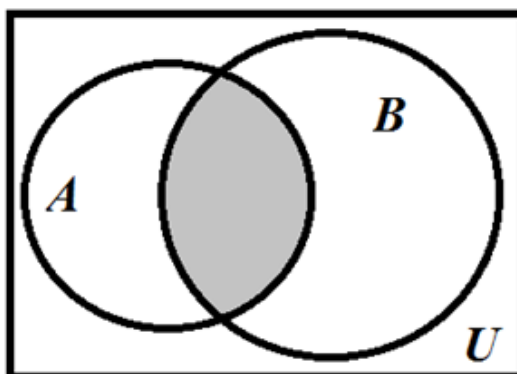


Рисунок 1.4 – Пересечение множеств

Разностью двух множеств A и B ($A - B$ или $A \setminus B$) называется множество тех элементов множества A , которые не принадлежат множеству B :

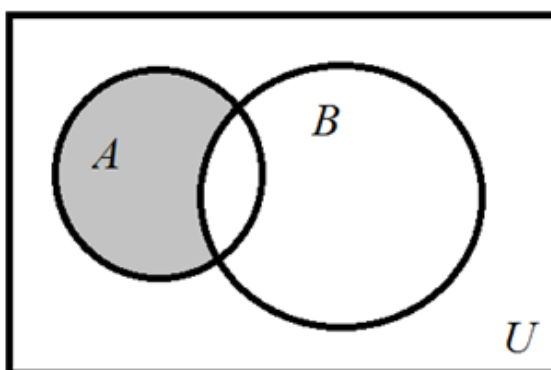


Рисунок 1.5 - Разность множеств

Пример

Если

$A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 3, 4\}$,

то $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$

Пример:

Если $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 3, 4\}$,

то $A \cap B = \{2, 3\}$

Пример:

Если $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 3, 4\}$,

то $A \setminus B = \{1\}$

Пример:

Если универсальное множество U — это цифры $\{0, 1, \dots, 9\}$, а $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, то $\bar{A} = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Дополнительные (специализированные) операции:

— Симметрическая разность.

— Декартово (прямое) произведение.

Для наглядного представления и лучшего понимания того, как работают операции на практике, можно использовать круги Эйлера (диаграммы Венна)

1.4 Прямое декартово произведение

Прямым (декартовым) произведением двух множеств A и B называется множество, состоящее из упорядоченных пар элементов, в которых первый элемент принадлежит множеству A , а второй — множеству B .

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Например, если $A = \{x, y\}$ и $B = \{1, 2\}$, то $A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2)\}$

Из примера видно, что

$$A \times B \neq B \times A$$

$$|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B| = 5 \cdot 4 = 20.$$

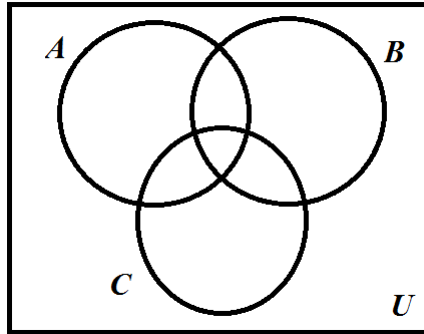
Диаграмма (или круги) Эйлера-Венна — это графическая схема, которая наглядно показывает отношения между множествами объектов или понятий. Множества изображаются в виде замкнутых фигур (обычно кругов), а их взаимное расположение указывает на пересечение, объединение или исключение данных.

Пример

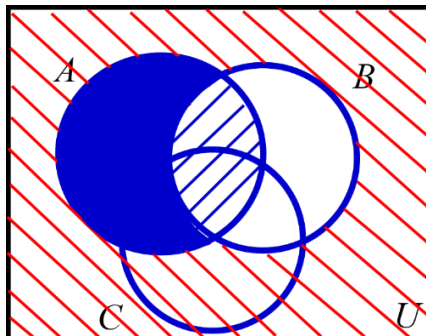
На диаграмме Эйлера-Венна изобразить

$$(A \cap \bar{B}) - C.$$

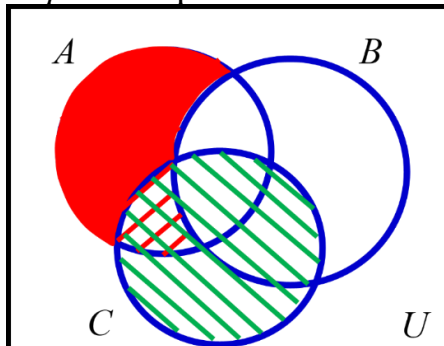
Основа диаграммы для выполнения каждого действия.



Изобразим на 1 диаграмме множества, вступающие в первое действие (действие в скобках). Каждое множество штрихуем своей штриховкой (с наклоном влево, с наклоном вправо, вертикально или горизонтально). Множества штрихуем целиком, не зависимо от их пересечения с другими множествами.



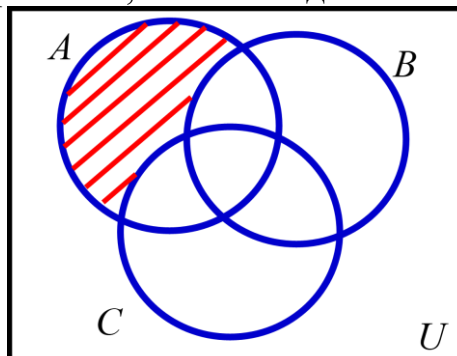
На 2 копии диаграммы надо заштриховать множества, вступающие во второе действие: это результат первого действия и C. У каждого из этих множеств на рисунке *одинарная* штриховка своего вида (цвета).



На 3 копии диаграммы надо заштриховать множество, которое будет являться ответом.

Штриховка – *одинарная*.

Заметим, что на каждой копии диаграммы, кроме последней, должно быть ровно два вида штриховки, а на последней копии – один вид.



Ответ.

1.5 Основные тождества алгебры множеств.

Тождества алгебры множеств играют ту же роль, что и формулы сокращённого умножения в алгебре: они позволяют упрощать выражения и доказывать равенство множеств.

Коммутативные законы

Порядок множеств не влияет на результат:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Пример: множество студентов, изучающих математику и информатику.

Ассоциативные законы

Группировка не влияет на результат:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Дистрибутивные законы

Похожи на распределительный закон умножения:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Идемпотентные законы

Повторение множества ничего не меняет:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Законы поглощения

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Идея: если всё множество AAA уже взято, то добавление его части ничего не меняет.

Законы единицы и нуля

Пусть U — универсальное множество, $\emptyset$ — пустое множество.

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Законы дополнения

$$A \cup \bar{A} = U$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$\overline{\bar{A}} = A$$

Законы де Моргана

Очень важные тождества:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Законы поглощения

Позволяют упрощать выражения.

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

Если взять всё множество A , то добавление его части $A \cap B$ ничего не изменит.

Законы склеивания

Используются для упрощения выражений и минимизации логических функций.

Первое тождество склеивания

$$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$$

Второе тождество склеивания

$$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$$

Законы Порецкого

Эти тождества являются обобщением законов поглощения.

Первый закон Порецкого

$$A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$$

Второй закон Порецкого

$$A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$$

1.6 Степень множества.

Декарт Рене — французский философ и математик, один из первых создателей формального языка математики — жил в XVII веке (1596–1659). Теория множеств появилась через 200 лет, поэтому Р. Декарт о ней никогда не слышал и заниматься ею не мог.

Название операции «декартово произведение» появилось в связи с тем, что в теории множеств нашел применение метод координат, разработанный Р. Декартом.

Формально операция декартова произведения множеств A и B определяется следующим образом:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}.$$

Если в декартовом произведении n множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ принять

$$A_1 = A_2 = \dots = A_n = A,$$

то получим

$$M = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ раз}} = A^n,$$

где A^n — степень множества A .

Элементы множества A_n называются кортежами длины n . Пусть, например, $A = \{a, b, c\}$, тогда

$$A^1 = \{(a), (b), (c)\};$$

$$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\};$$

$$A^3 = \{(a, a, a), (a, a, b), (a, a, c), (a, b, a), \dots, (c, c, c)\};$$

$$A^4 = \{(a, a, a, a), (a, a, a, b), (a, a, a, c), \dots, (c, c, c, c)\} \text{ и т. д.}$$

Кардинальное число

В общем случае, если $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|$ — кардинальные числа множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$, то кардинальное число их декартова произведения равно

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

Согласно этому кардинальные числа степеней множеств равны:

$$|A^1| = 3 = 3^1;$$

$$|A^2| = 3 \cdot 3 = 3^2;$$

$$|A^3| = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3;$$

$$|A^4| = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 \text{ и т. д.}$$

Отсюда видно, что множество A_1 содержит три кортежа, где каждый кортеж состоит из одного элемента и имеет длину, равную единице. Множество A_2 содержит 9 кортежей длины 2, множество A_3 состоит из 27 кортежей длины 3 и т. д.

В общем случае справедливо соотношение

$$|A^n| = |A|^n.$$

Если элементами множества A являются цифры 1, 2, ..., k , то элементы множества A^n представляют собой n -значные кортежи. Например, при $k = 9$ и $n = 3$

$$A^3 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), \dots, (7, 2, 7), \dots, (9, 9, 9)\},$$

т. е. элементами множества A^3 являются все трехзначные десятичные числа (если кортежи записывать без запятых), не содержащие нулей. Всего существует $9^3 = 729$ таких чисел.