

Карагандинский технический университет имени Абылкаса
Сагинова

Кафедра СМиТ

«Основные понятия гидродинамики. Уравнение Бернулли»

Дисциплина: «Гидравлика, гидрология, гидрометрия»

Для студентов образовательных программ:

6B07304 «Строительство»,

6B07307 «Инженерные системы зданий и сооружений»

Авторы: м.т.н., ст.преп. Рожков А.В, м.т.н., препод. Рожкова А.А.



План занятия

1. Основное понятия гидродинамики
 2. Виды движения жидкости
 3. Уравнение неразрывности установившегося движения жидкости
 4. Уравнение Даниила Бернули для идеальной жидкости
 5. Уравнение Даниила Бернули для реальной жидкости
 6. Практическое применение уравнения Бернулли
- 

Цель занятия:

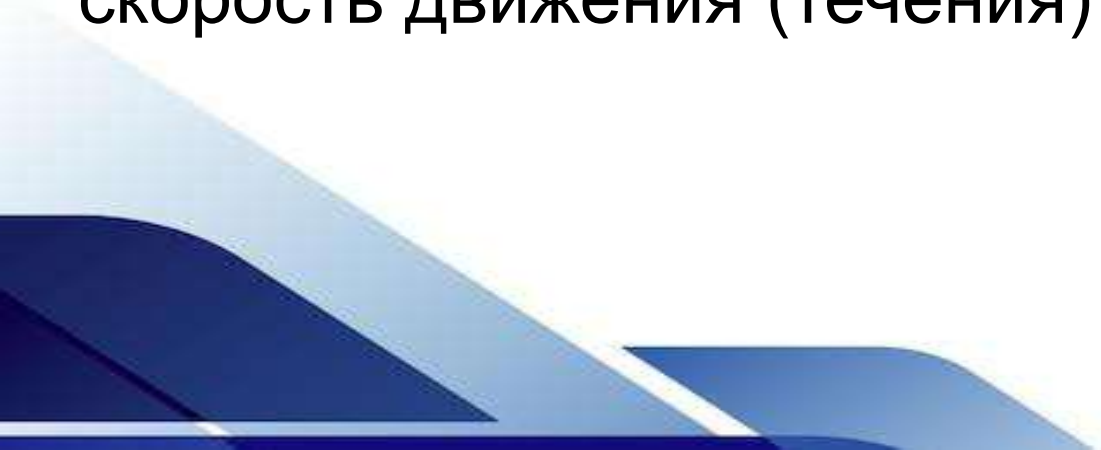
Изучить основные понятия гидродинамики, виды движения жидкости, уравнение неразрывности потока и уравнение Бернулли для идеальной и реальной жидкости, а также освоить их практическое применение при решении инженерных задач.



1. Основные понятия гидродинамики



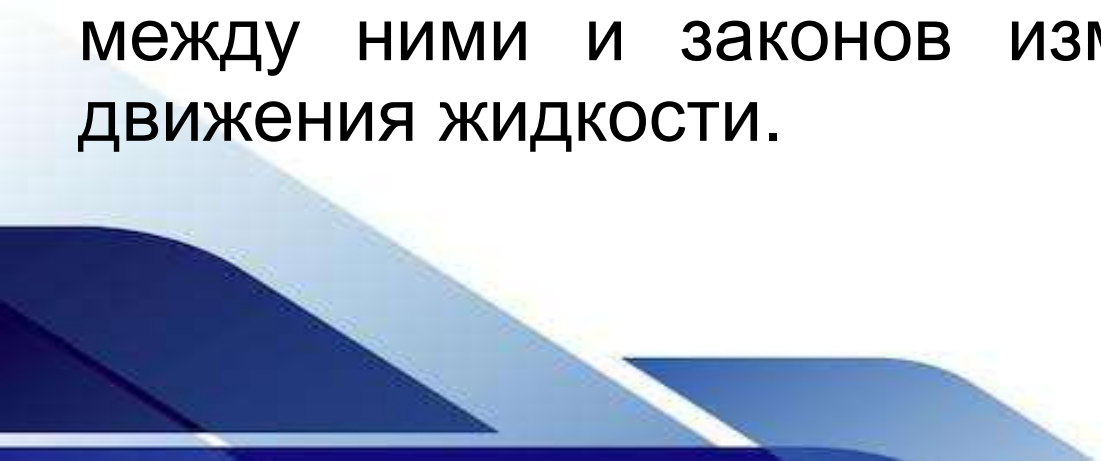
Основные элементы движения жидкости. Причинами движения жидкости являются действующие на нее силы: объемные или массовые силы (сила тяжести, инерционные силы) и поверхностные силы (давление, трение). В отличие от гидростатики, где основной величиной, характеризующей состояние покоя жидкости, является гидростатическое давление, которое определяется только положением точки в пространстве, в гидродинамике основными элементами, характеризующими движение жидкости, будут два: гидродинамическое давление и скорость движения (течения) жидкости.



Гидродинамическое давление p – это внутреннее давление, развивающееся при движении жидкости. Скорость движения жидкости в данной точке u – это скорость перемещения находящейся в данной точке частицы жидкости, определяемая длиной пути l , пройденного этой частицей за единицу времени t .

В общем случае основные элементы движения жидкости p и u для данной точки зависят от ее положения в пространстве (координат точки) и могут изменяться во времени.

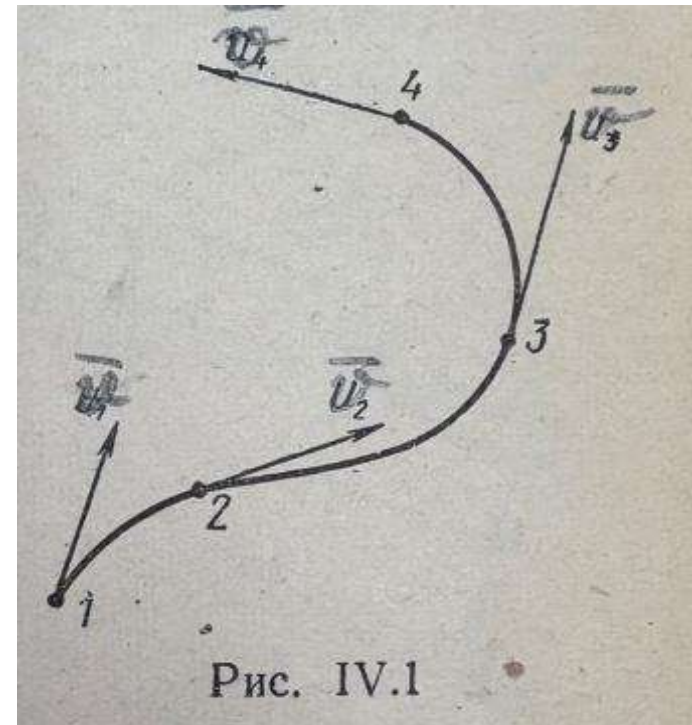
Задачей гидродинамики и является определение основных элементов движения жидкости p и u , установление взаимосвязи между ними и законов изменения их при различных случаях движения жидкости.



Траектория частицы. Если в массе движущейся жидкости взять какую-либо частицу жидкости и проследить ее путь за какой-то промежуток времени Δt (конечный, достаточно большой), то можно получить некоторую линию, выражающую геометрическое место этой точки в пространстве за время Δt . Эта линия и будет траекторией движения данной частицы за промежуток времени Δt .



Линия тока. Если в массе движущейся жидкости в данный момент времени t взять какую-либо точку 1 (рисунок 1), то можно в этой точке построить вектор скорости u_1 , выражающий величину и направление скорости движения частицы жидкости в данной точке 1 в этот момент времени.



В тот же момент времени t можно взять и другие точки в движущейся жидкости, например, точки 2, 3, 4, ... , в которых также можно построить векторы скоростей $u_2, u_3, u_4, \dots$, выражающие скорость движения других частиц жидкости в тот же момент времени.

Можно выбрать точки 1, 2, 3, 4 ... и провести через них плавную кривую, к которой векторы скоростей будут всюду касательны. Эта линия и называется линией тока.

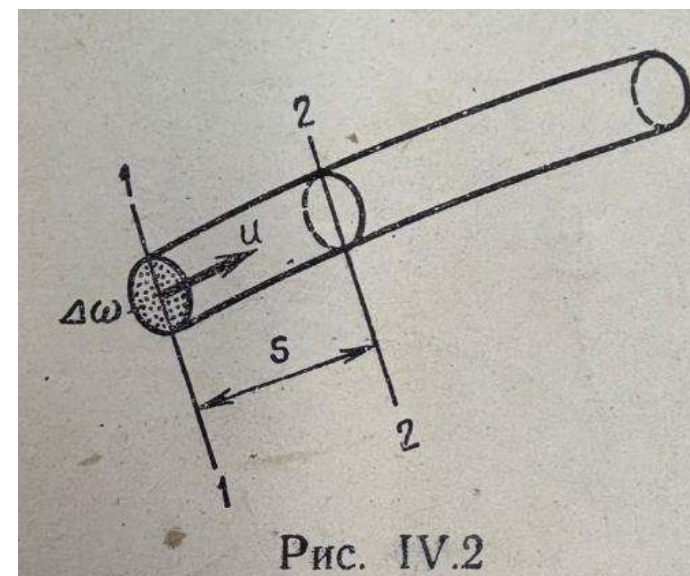


Таким образом, *линией тока* называется линия, проведенная через ряд точек в движущейся жидкости так, что в данный момент времени векторы скорости частиц жидкости, находящихся в этих точках, направлены по касательной к этой линии. В отличие от траектории, которая показывает путь движения одной частицы жидкости за определенный промежуток времени Δt , линия тока соединяет разные частицы и дает некоторую мгновенную характеристику движущейся жидкости в момент времени t . Через заданную точку в данный момент времени можно провести только одну линию тока.

Если в данных точках движущейся жидкости величина и направление скорости и гидродинамическое давление с течением времени не изменяются (такое движение называется установившимся), то и линия тока, и траектория частицы, оказавшейся на ней, совпадают и со временем не изменяются. В этом случае траектории частиц являются и линиями тока.



Элементарная струйка. Если в движущейся жидкости выделить весьма малую элементарную площадку $\Delta\omega$, перпендикулярную направлению течения, и по контуру ее провести линии тока, то полученная поверхность называется *трубкой тока*, а совокупность линий тока, проходящих сплошь через площадку $\Delta\omega$, образует так называемую элементарную струйку (рисунок 2).



Элементарная струйка характеризует состояние движения жидкости в данный момент времени t . При установившемся движении элементарная струйка имеет следующие свойства:

1) форма и положение элементарной струйки с течением времени остаются неизмененными, так как не изменяются линии тока;

2) приток жидкости в элементарную струйку и отток из нее через боковую поверхность невозможен, так как по контуру элементарной струйки скорости направлены по касательной;

3) скорость и гидродинамическое давление во всех точках поперечного сечения элементарной струйки можно считать одинаковыми ввиду малости площади $\Delta\omega$.

Поток. Совокупность элементарных струек движущейся жидкости, проходящих через площадку достаточно больших размеров, называется *поток* *жидкости*. Поток ограничен твердыми поверхностями, по которым происходит движение жидкости (труба), и атмосферой (река, лоток, канал и т. п.).



2. Виды движения жидкости



Установившимся движением жидкости называется такое движение, при котором в каждой данной точке основные элементы движения жидкости — скорость движения и u гидродинамическое давление p не изменяются с течением времени, т. е. зависят только от координат точки.

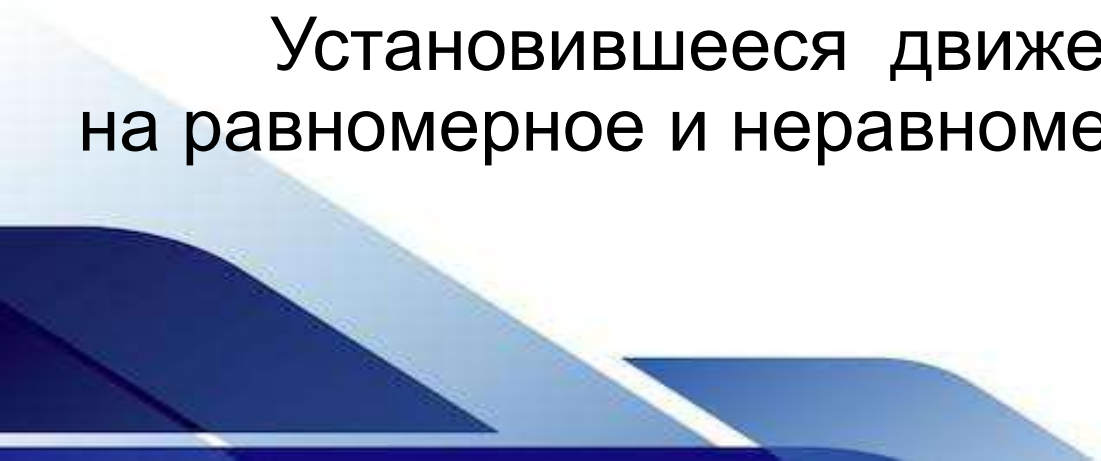
Неустановившимся движением жидкости называется такое движение, при котором в каждой данной точке основные элементы движения жидкости - скорость движения u и гидродинамическое давление p — постоянно изменяются, т. е. зависят не только от положения точки в пространстве, но и от времени t .



Примером установившегося движения может быть: движение жидкости в канале, в реке при неизменных глубинах, истечение жидкости из резервуара при постоянном уровне жидкости в нем и др. Неустановившееся движение – это движение жидкости в канале или реке при переменном уровне или при опорожнении резервуара, когда уровень жидкости в нем непрерывно изменяется.

В дальнейшем будет изучаться главным образом установившееся движение жидкости и в отдельных случаях будут разбираться примеры неустановившегося движения.

Установившееся движение в свою очередь подразделяется на равномерное и неравномерное.



Равномерным называется такое установившееся движение, при котором живые сечения вдоль потока не изменяются; в этом случае $\omega = \text{const}$; средние скорости по длине потока также не изменяются, т. е. $u = \text{const}$. Примером равномерного движения является: движение жидкости в цилиндрической трубе, в канале постоянного сечения при одинаковых глубинах.

Установившееся движение называется *неравномерным*, когда распределение скоростей в различных поперечных сечениях неодинаково; при этом средняя скорость и площадь поперечного сечения потока могут быть и постоянными вдоль потока. Примером неравномерного движения может быть движение жидкости в конической трубе или в речном русле переменной ширины.

Напорным называется движение жидкости, при котором поток полностью заключен в твердые стенки и не имеет свободной поверхности. Напорное движение происходит вследствие разности давлений и под действием силы тяжести. Примером напорного движения является движение жидкости в замкнутых трубопроводах (например, в водопроводных трубах).

Безнапорным называется движение жидкости, при котором поток имеет свободную поверхность. Примером безнапорного движения может быть: движение жидкости в реках, каналах, канализационных и дренажных трубах. Безнапорное движение происходит под действием силы тяжести и за счет начальной скорости. Обычно на поверхности безнапорного потока давление атмосферное.

Следует отметить еще один вид движения: свободную струю. *Свободной струей* называется поток, не ограниченный твердыми стенками. Примером может служить движение жидкости из пожарного брандспойта, гидромонитора, водопроводного крана, из отверстия резервуара и т. п. В этом случае движение жидкости происходит по инерции (т. е. за счет начальной скорости) и под действием силы тяжести.

Для упрощения выводов, связанных с изучением потока жидкости, вводится понятие о плавно изменяющемся движении жидкости.



Плавно изменяющимся называется такое движение жидкости, при котором кривизна струек незначительна (равна нулю или близка к нулю) и угол расхождения между струйками весьма мал (равен нулю или близок к нулю), т. е. практически поток жидкости мало отличается от параллельноструйного. Это предположение вполне оправдывается при изучении многих случаев движения жидкости в каналах, трубах и других сооружениях.

Отметим следующие свойства потока при плавно: изменяющемся движении:

1) поперечные сечения потока плоские, нормальные к оси потока;

2) распределение гидродинамических давлений по сечению потока подчиняется закону гидростатики, т. е. гидродинамические давления по высоте сечения распределяются по закону прямой. Это свойство легко можно доказать, если внутри потока выделить частицу жидкости и спроектировать все действующие на нее силы на плоскость живого сечения. Вследствие того, что скорости и ускорения в этом случае будут перпендикулярны сечению, силы инерции в уравнение не войдут; поэтому уравнение равновесия и закон распределения давления в плоскости живого сечения не будет отличаться от такового для жидкости, находящейся в покое;

3) удельная потенциальная энергия (т. е. потенциальная энергия единицы веса жидкости) по отношению к некоторой плоскости сравнения для всех точек данного сечения потока жидкости есть величина постоянная.

3. Уравнение неразрывности установившегося движения жидкости

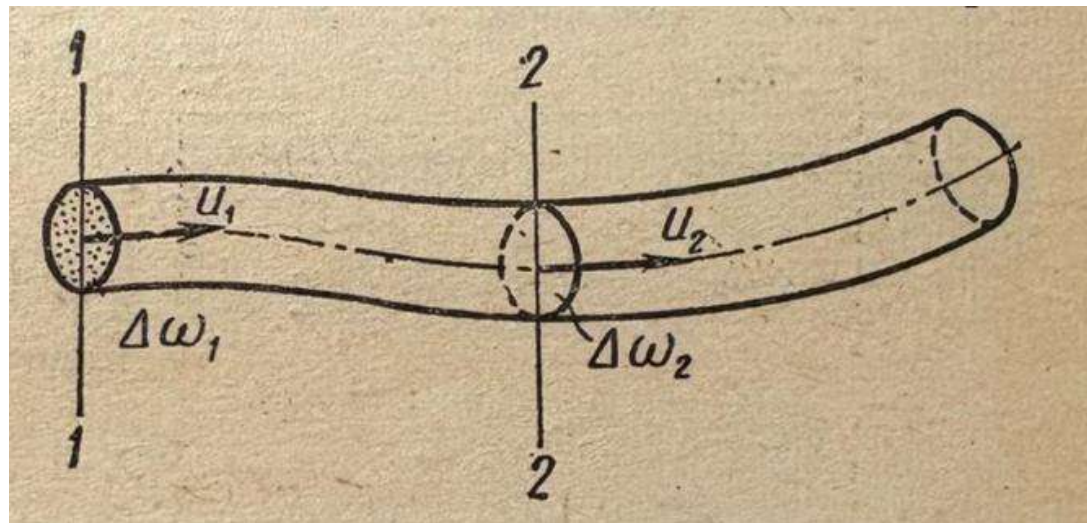


При рассмотрении движения жидкости считают, что в потоке жидкость сплошь заполняет занимаемое ею пространство без образования пустот, т.е. движение жидкости происходит неразрывно. В этом случае справедливо уравнение неразрывности движения, выводимое на основе закона сохранения массы. Получим вначале уравнение неразрывности при установившемся движении жидкости для элементарной стройки.



Пусть имеем элементарную стройку (рисунок 1). Возьмём сечение 1-1 с площадью $\Delta\omega_1$ и скоростью движения частиц жидкости u_1 . Элементарный расход через сечение 1-1 определяется по формуле: $\Delta Q_1 = u_1 \cdot \Delta\omega_1$.

Затем возьмём сечение 2-2 в этой же стройке с площадью сечения $\Delta\omega_2$ и скоростью u_2 . Элементарный расход через сечение 2-2 равен: $\Delta Q_2 = u_2 \cdot \Delta\omega_2$.



Но по свойству элементарной стройки приток и отток жидкости через её боковую поверхность невозможен; кроме того, на участке 1-2, который сохраняет неизменные размеры, не образуется пустот и не происходит переуплотнений; значит количество жидкости, протекающее в единицу времени через сечение 1-1 и 2-2, должны быть одинаковы, т.е. $\Delta Q_1 = \Delta Q_2$. Принимая во внимание, что сечение 1-1 и 2-2 принятый произвольно, можно в общем случае для элементарной стройки написать:

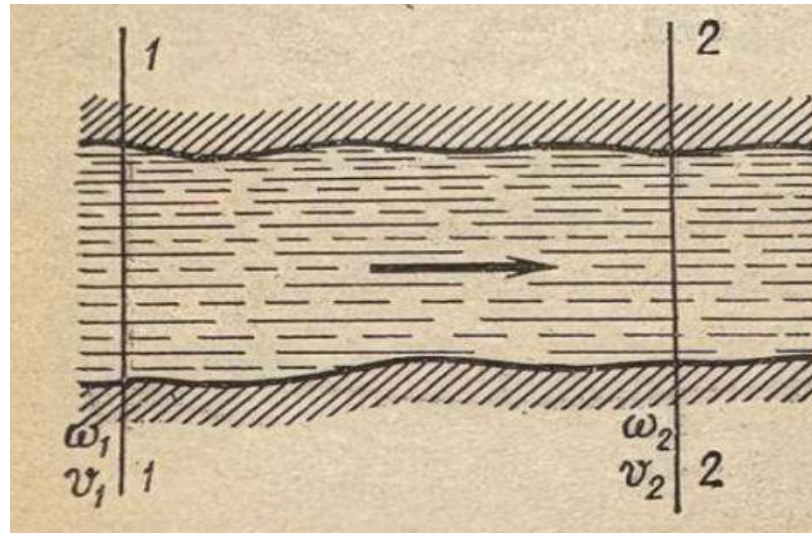
$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 = \Delta Q_3 = \dots = \Delta Q_n = \text{const}, \text{ или}$$

$$u_1 \cdot \Delta \omega_1 = u_2 \cdot \Delta \omega_2 = u_3 \cdot \Delta \omega_3 = \dots = u_n \cdot \Delta \omega_n = \Delta Q = \text{const}.$$

Это и есть уравнение неразрывности (сплошности) для элементарной стройки, которые читаются так: *элементарный расход жидкости ΔQ при установившемся движении есть величина постоянная для всей элементарной стройки.*

Пусть теперь имеем поток жидкости (рисунок 2). Взяв в потоке два произвольных сечением 1-1 и 2-2 и представив живые сечения их составляющими из суммы элементарных струек, можно написать $Q_1 = \sum_1^{\omega_1} v_1 \cdot \Delta \omega_1$ – расход жидкости в сечении 1-1;

$Q_2 = \sum_1^{\omega_2} v_2 \cdot \Delta \omega_2$ – расход жидкости в сечении 2-2.



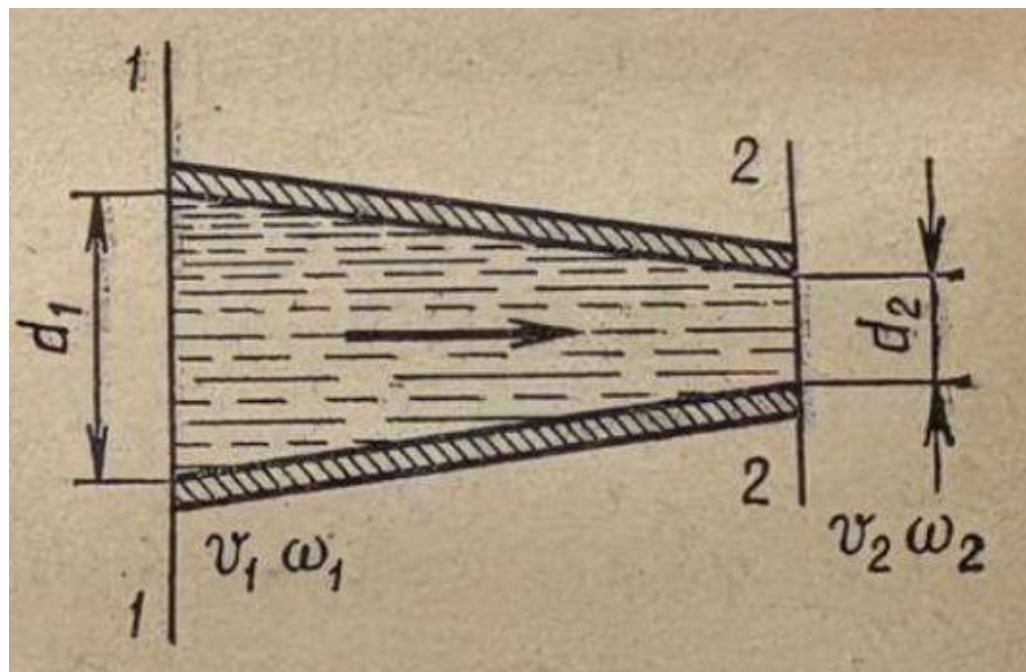
Но поскольку скорости касательной к боковой поверхности потока, то в отсек между сечениями 1-1 и 2-2 через боковую поверхность движения жидкости не происходит; не изменяется и объем отсека. Следовательно, в отсек через сечение 1-1 поступает столько же жидкости, сколько за то же время выходит из него через сечение 2-2, т.е. $Q_1=Q_2$. Но так как сечение 1-1 и 2-2 взяты произвольно, то можно написать что, $Q_1=Q_2=\dots=Q_n=Q=\text{const}$ или, выражая расход жидкости в сечениях через среднюю скорость u , получим:

$$u_1 \cdot \Delta\omega_1 = u_2 \cdot \Delta\omega_2 = \dots = u_n \cdot \Delta\omega_n = Q = \text{const}.$$

Это и есть *уравнение неразрывности для потока жидкости*, которое читается так: *расход жидкости через любую сечение потока при установившемся движении есть величина постоянная*. Из уравнения для двух сечений можно написать: $u_1/u_2 = \omega_2/\omega_1$, т.е. *средние скорости потока обратно пропорциональны площадям соответствующих живых сечений*.



Коническая трубка (рисунок 3), для которой известно, что $d_1=400\text{мм}$, $d_2=200\text{мм}$, средняя скорость в сечении 2-2 $u_2=1,0\text{ м/сек}$. Определить среднюю скорость u в сечении 1-1 и расход жидкости в трубе. Движение в трубе напорное.



Определим площади живых сечений: $\omega_1 = \pi d_1^2/4$, $\omega_2 = \pi d_2^2/4$.

Подставляя эти значения в уравнение неразрывности потока, получим:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2}, \text{ отсюда } v_1 = v_2 \frac{d_2^2}{d_1^2} = 1 \cdot \frac{0,2^2}{0,4^2} = 0,25 \text{ м/сек.}$$

Определяем расход жидкости в трубе:

$$Q = v_1 \omega_1 = v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = 0,25 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,4^2}{4} = 0,0314 \text{ м}^3/\text{сек} = 31,4 \text{ л/сек.}$$

4. Уравнение Даниила Бернули для идеальной жидкости

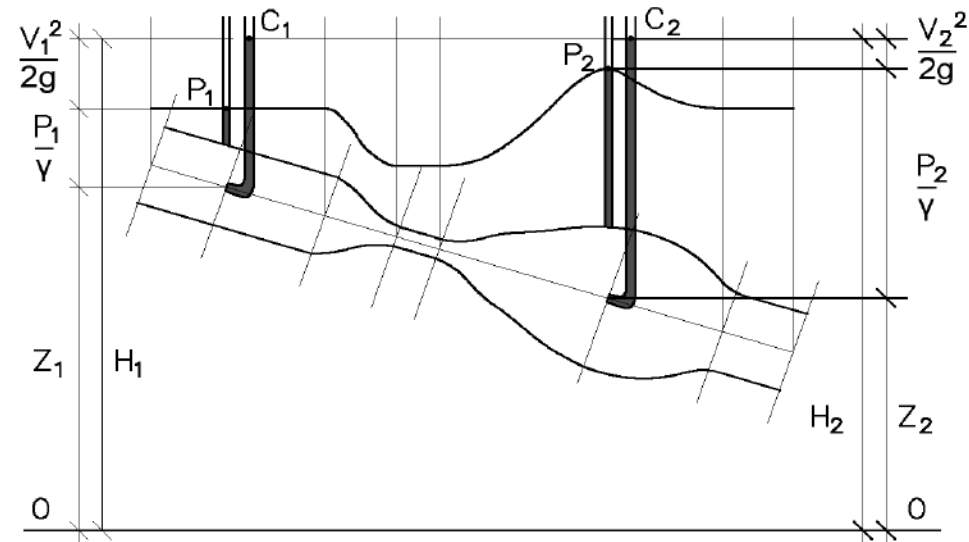


Уравнение Даниила Бернулли является основным уравнением гидродинамики. Ниже разберем это уравнение для установившегося плавно изменяющегося движения жидкости, с помощью которого решаются основные задачи гидродинамики. Введем понятия удельной энергии элементарной струйки и потока жидкости.

Удельная энергия – есть энергия, отнесенная к единице силы тяжести жидкости.

Идеальная жидкость – в гидродинамике – это абстрактная жидкость (сжимаемая или несжимаемая), в которой отсутствует вязкость. Из-за отсутствия вязкости в ней нет касательных напряжений между двумя соседними слоями жидкости. Моделью идеальной жидкости пользуются при теоретическом рассмотрении задач, в которых вязкость не является определяющим фактором и ее можно пренебречь.

- 1) Выделим два сечения 1-1 и 2-2 в элементарной струйке;
- 2) Установим в эти сечения Пьезометр и трубку Пито (гидродинамическая трубка);
- 3) Проведем плоскость сравнения 0-0 ниже трубки;
- 4) Отметим точки пересечения центра тяжести сечений 1-1 и 2-2;
- 5) От плоскости сравнения до центра тяжести сечения 1-1 проведем высоту и обозначим ее Z_1 ;
- 6) От центра тяжести сечения 1-1 до уровня жидкости в пьезометре проведем высоту P_1/γ ;
- 7) От уровня жидкости в пьезометре P_1 до уровня в жидкости в гидродинамической трубке C_1 проведем высоту $u_1^2/2g$.



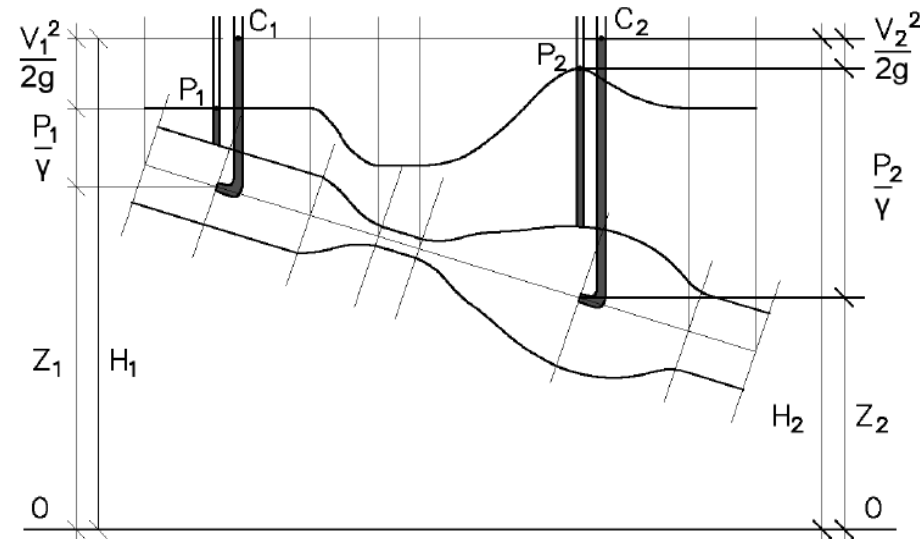
Z_1 – геометрическая высота – это удельная потенциальная энергия центра тяжести сечения относительно плоскости сравнения 0-0, м.ж.ст. Строится от плоскости сравнения 0-0 до центра тяжести потока в сечении 1-1.

P_1/γ – пьезометрическая высота – это удельная потенциальная энергия потока жидкости относительно центра тяжести сечения, м.ж.ст. Строится от центра тяжести сечения 1-1 до уровня жидкости в пьезометре P_1 .

$Z_1 + P_1/\gamma$ – гидростатическая высота – это удельная потенциальная энергия потока жидкости относительно плоскости сравнения 0-0, м.ж.ст. Строится от плоскости сравнения 0-0 до уровня жидкости в пьезометре.

$u_1^2/2g$ – скоростной (гидродинамический) напор – это удельная кинетическая энергия потока жидкости, м.ж.ст. Строится от уровня жидкости в пьезометре до уровня жидкости в гидродинамической трубке.

$Z_1 + P_1/\gamma + u_1^2/2g = H_1$ – полная удельная энергия потока жидкости, относительно плоскости сравнения 0-0.



Смоделируем процесс протекания идеальной жидкости по нашей элементарной трубке. Получим во втором сечении 2-2 аналогичные высоты как в сечении 1-1, только с индексом 2.

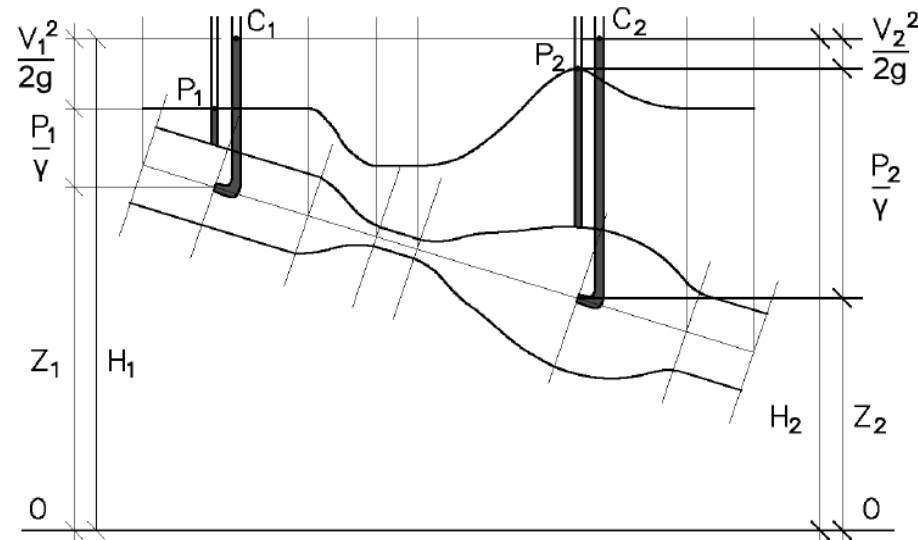
Построим пьезометрическую линию P_1 - P_2

Построим линию скоростного напора C_1 - C_2

Основное уравнение Даниила Бернулли для идеальной жидкости:

$$H_1 + H_2 = \text{const}$$

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = \text{const}$$



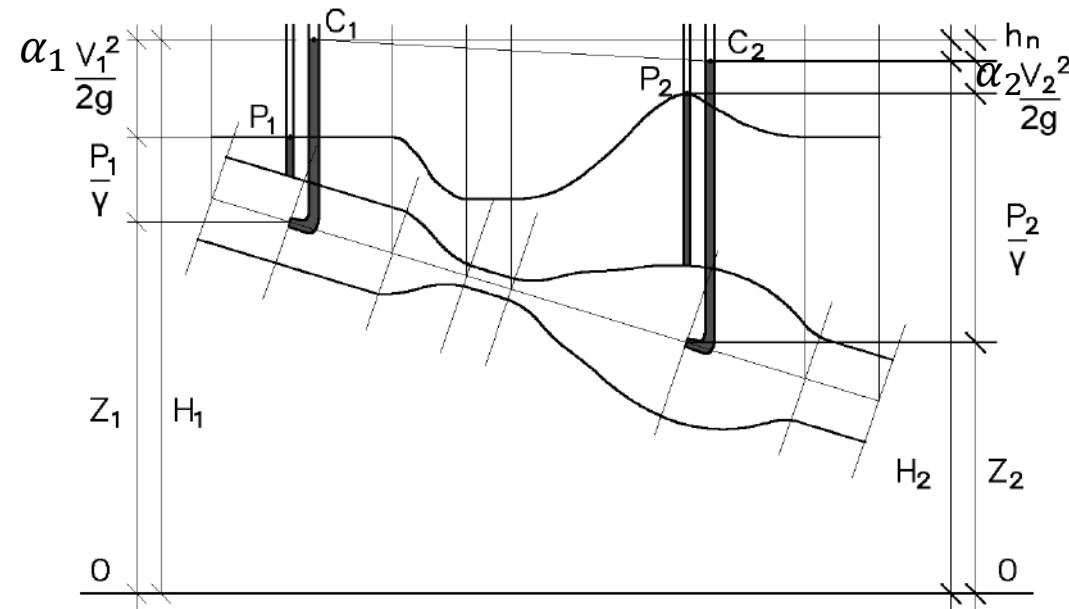
5. Уравнение Даниила Бернули для реальной жидкости



Z_1 – геометрическая высота – это удельная потенциальная энергия центра тяжести сечения относительно плоскости сравнения 0-0, м.ж.ст. Строится от плоскости сравнения 0-0 до центра тяжести потока в сечении 1-1.

P_1/γ – пьезометрическая высота – это удельная потенциальная энергия потока жидкости относительно центра тяжести сечения, м.ж.ст. Строится от центра тяжести сечения 1-1 до уровня жидкости в пьезометре P_1 .

$Z_1 + P_1/\gamma$ – гидростатическая высота – это удельная потенциальная энергия потока жидкости относительно плоскости сравнения 0-0, м.ж.ст. Строится от плоскости сравнения 0-0 до уровня жидкости в пьезометре.



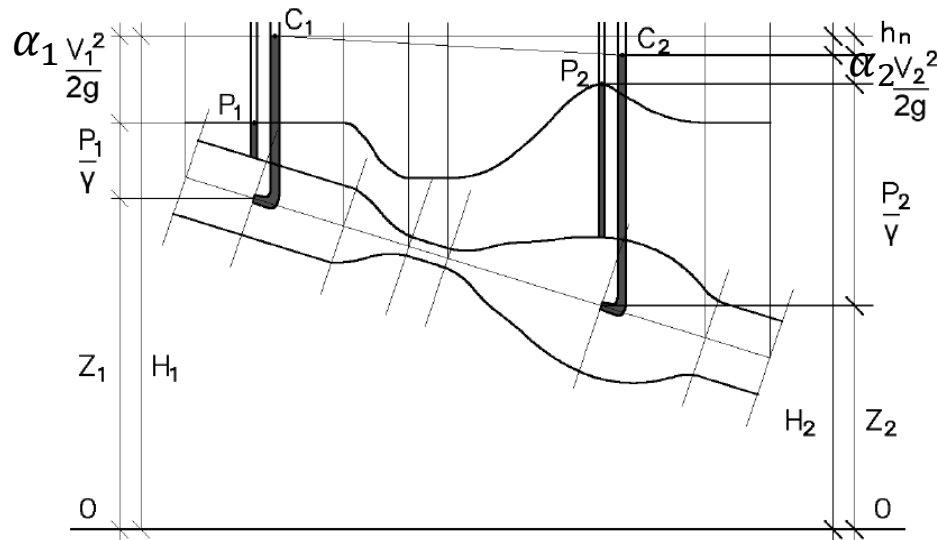
$\alpha_1 u_1^2/2g$ – скоростной (гидродинамический) напор – это удельная кинетическая энергия потока жидкости, м.ж.ст. Строится от уровня жидкости в пьезометре до уровня жидкости в гидродинамической трубке.

α_1, α_2 – это коэффициенты Кориолиса, которые учитывают неравномерности распределения скорости по сечению потока (для ламинарного потока – $\alpha=2$, для турбулентного потока – $\alpha=1$).

h_{π} – это высота потери, м.ж.ст.

Основное уравнение Даниила Бернулли для реальной жидкости: $H_1 = H_2 + h_{\pi}$

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 \cdot v_2^2}{2g} + h_{\pi}$$



Данное уравнение является основным уравнением Бернулли для реальной жидкости, является основным уравнением гидродинамики. Уравнение Бернулли устанавливает математическую связь между основными элементами движения жидкости, т.е. средней скоростью и гидродинамическим давлением.

Размерность отдельных членов уравнения Д.Бернулли. Все члены уравнения Бернулли имеют линейную размерность.

1. Рассмотрим размерность выражения $\frac{\alpha v^2}{2g}$:

$$\left[\frac{\alpha v^2}{2g} \right] = [\alpha v^2 : 2g] = \left[1 \cdot \frac{\text{длина}^2}{\text{время}^2} : \frac{\text{длина}}{\text{время}^2} \right] = [\text{длина}].$$

2. Размерность $\frac{P}{\gamma}$:

$$\left[\frac{P}{\gamma} \right] = [P : \gamma] = \left[\frac{\text{сила}}{\text{площадь}} : \frac{\text{сила(вес)}}{\text{объем}} \right] = [\text{длина}].$$

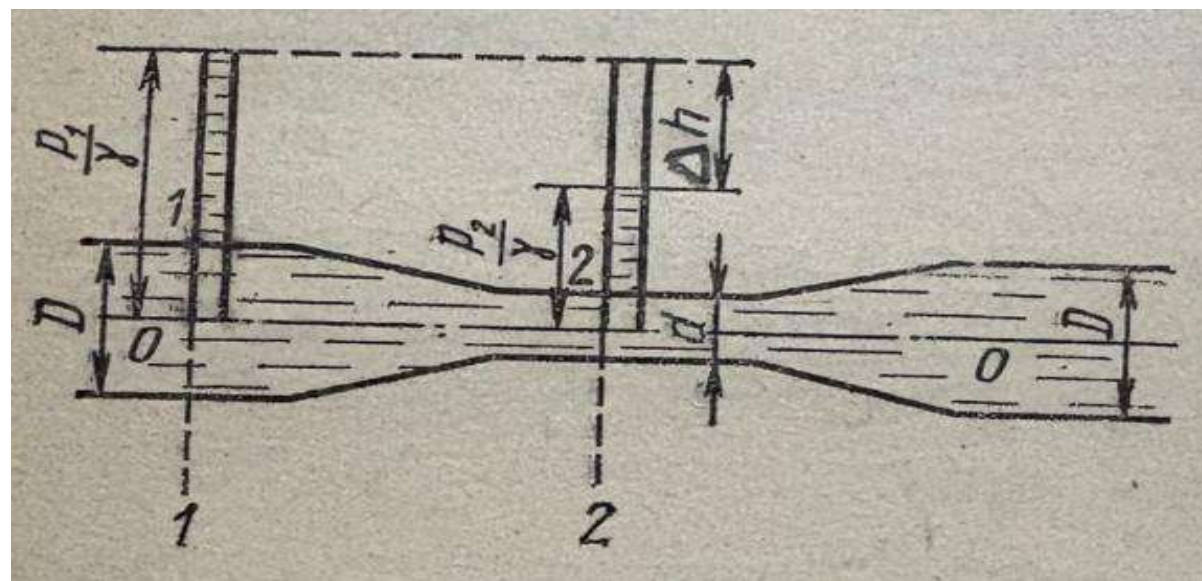
3. Размерность Z : $[Z] = [\text{длина}]$.

4. Так как все члены левой части уравнения имеют линейную размерность, значит и $h_{\text{п}}$ имеет линейную размерность.

6. Практическое применение уравнения Бернулли



Рассмотрим уравнение Д.Бернулли на примере простейшего водомерного устройства в трубах как водомер Вентури (рисунок 1); он представляет собой вставку в основную трубу D трубы меньшего диаметра d , которая соединена с основной трубой коническими переходами. В основной трубе (сечение 1-1) и в суженом сечении d (сечение 2-2), установим пьезометры. По заданным диаметрам D и d , показаниям пьезометров P_1/γ и P_2/γ необходимо определить расход жидкости в трубе Q .



Составим уравнение Бернулли для участка 1-2:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 \cdot v_2^2}{2g} + h_{\Pi}$$

Упрощение 1: $Z_1=Z_2=0$ (т.к. водомер установлен горизонтально, то $Z_1=Z_2$; т.к. плоскость сравнения 0-0 проходит через центр тяжести сечения $Z_1=Z_2=0$)

Упрощение 2: $\frac{P_1}{\gamma} - \frac{P_2}{\gamma} = \Delta h$

Упрощение 3: $h_{\Pi}=h_l+h_m$; $h_l=0$ (коэф. φ); $h_m=0$

$$\Delta h + \frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2g} = \frac{\alpha_2 \cdot v_2^2}{2g} \quad (1)$$

$$(2) \rightarrow v_2 = \frac{v_1 D^2}{d^2}$$

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

$$(1) \rightarrow \Delta h + \frac{\alpha_1 \cdot v_1^2}{2g} = \frac{\alpha_2 \cdot v_1^2 D^4}{2g \cdot d^4} + 2g$$

$$v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$$

$$v_1 \frac{\pi D^2}{4} = v_2 \frac{\pi d^2}{4} \quad | : \frac{\pi}{4}$$

$$2g \Delta h + \alpha_1 \cdot v_1^2 = \frac{\alpha_2 \cdot v_1^2 D^4}{d^4}$$

$$\frac{\alpha_2 \cdot v_1^2 D^4}{d^4} - \alpha_1 \cdot v_1^2 = 2g \Delta h$$

$$v_1 D^2 = v_2 d^2 \quad (2)$$

$$v_1^2 \left(\frac{\alpha_2 \cdot D^4}{d^4} - \alpha_1 \right) = 2g \Delta h$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g \Delta h}{\frac{\alpha_2 \cdot D^4}{d^4} - \alpha_1}}, v_1 = \sqrt{\frac{2g}{\frac{\alpha_2 \cdot D^4}{d^4} - \alpha_1}} \cdot \sqrt{\Delta h}$$

$$Q_1 = v_1 \cdot \omega_1$$

$$Q = \left(\varphi \cdot \sqrt{\frac{2g}{\frac{\alpha_2 \cdot D^4}{d^4} - \alpha_1}} \cdot \omega_1 \right) \cdot \sqrt{\Delta h}$$

$$Q = C \cdot \sqrt{\Delta h}, \quad \varphi = 0,96 - 0,98$$