

Карагандинский технический университет имени Абылкаса
Сагинова

Кафедра СМиТ

«Гидростатика»

Дисциплина: «Гидравлика, гидрология, гидрометрия»

Для студентов образовательных программ:

6B07304 «Строительство»,

6B07307 «Инженерные системы зданий и сооружений»

Авторы: м.т.н., ст.преп. Рожков А.В, м.т.н., препод. Рожкова А.А.



План занятия

1. Основное уравнение гидростатики
 2. Закон Паскаля. Гидропресс
 3. Давление на плоскую стенку
 4. Давление на криволинейную стенку
 5. Объем тела давления
 6. Закон Архимеда
- 

Цель занятия

Целью является изучение основных законов гидростатики и приобретение навыков расчёта давления в покоящейся жидкости, а также сил, действующих на плоские и криволинейные поверхности и тела, погружённые в жидкость.

Decorative blue geometric shapes in the bottom left corner of the slide.

1. Основное уравнение гидростатики



Гидростатическое давление в любой точке жидкости $P_{абс}$ складывается из давления на ее свободную поверхность и давления столба жидкости, высота которого равна расстоянию от этой точки до свободной поверхности:

$$P_{абс} = P_{ат} + \rho gh, \text{ Па}$$

Где $P_{ат}$ – давление на свободную поверхность жидкости (атмосферное, барометрическое давление), Па;

ρ – плотность жидкости, кг/м³;

$g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения для Земли;

h – высота столба жидкости относительно свободной поверхности, м.ж.ст.

Свободная поверхность жидкости – это поверхность фазового разделения на жидкость и газ, которая находится под атмосферным давлением.

Выражение $P_{абс} = P_{ат} + \rho gh$, Па называется основным уравнением гидростатики. Из этого уравнения следует, что внешнее давление $P_{ат}$ на свободную поверхность жидкости передается в любую точку жидкости равномерно (закон Паскаля).



Гидростатическое давление называется полным или абсолютным $P_{абс}$, а величина ρgh – называется избыточным давлением (манометрическим, пьезометрическим, гидростатическим, напором, компрессией), если положительный знак, или вакуумом (разрежением), если знак отрицательный.

$$P_{абс} = P_{ат} - \rho gh, \text{Па}$$

Избыточное давление измеряется манометрами или пьезометрами. Вакуум измеряется вакуумметром.

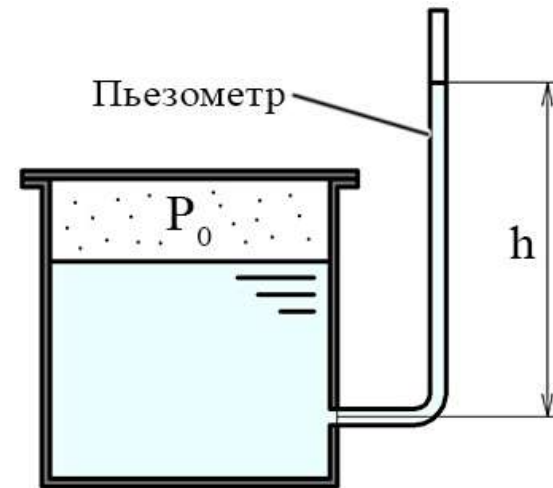
Пьезометр

Пьезометр (греч. *piézo* — *сжимаю* и *метрео* — *измеряю*) — прибор, который используется для производственного и лабораторного измерения гидростатического или гидродинамического давления ньютоновских жидкостей и деформации твёрдых тел, а также для измерения статического и динамического уровня в водозаборных скважинах.



Пьезометр

Пьезометры, используемые для измерения давления в жидкостях, представляют собой обычно трубку малого диаметра (обычно около нескольких миллиметров), которая одним концом соединяется с сосудом, в котором измеряется давление. В лабораторной практике пьезометр обычно стеклянный полностью или в месте наблюдения за уровнем жидкости.



Пьезометр

Плюсы пьезометра:	Минусы пьезометра:
1) высокая точность измерения, поэтому используется для лабораторных испытаний;	1) низкий предел измерения (максимально до 3 ат для ртутного);
2) простота в изготовлении (можно изготовить самостоятельно);	2) сложность в снятии показания;
3) долговечность;	3) громоздкий;
4) низкая стоимость.	4) обладает инерционностью.

Манометр

Манометр — контрольно-измерительный прибор, который предназначен для фиксации величины давления жидкости или газа в различного рода замкнутых системах.



Манометр

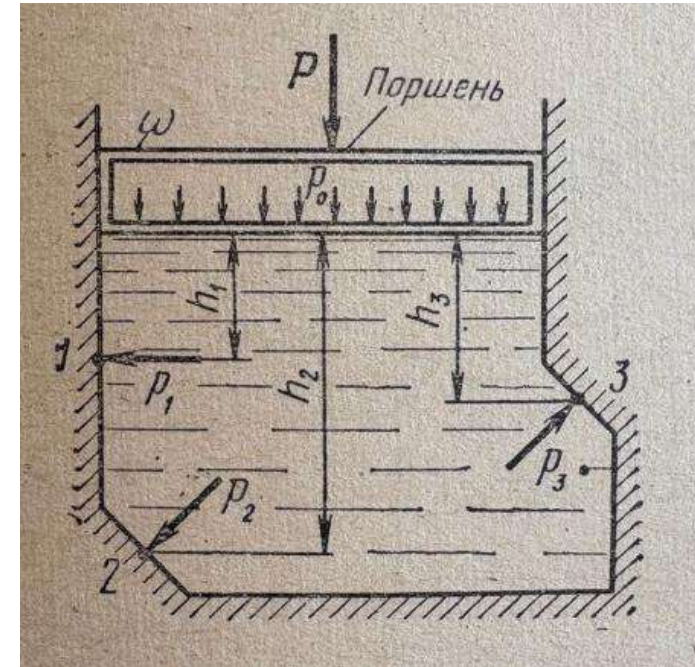
Плюсы манометра:	Минусы манометра:
1) относительная точность;	1) точность падает со временем использования прибора;
2) высокий предел измерения (от 0 до 150 МПа);	2) сложность в изготовлении (только заводское изготовление);
3) компактность;	3) высокая стоимость.
4) безинерционность;	
5) простота при снятии показаний.	

2. Закон Паскаля. Гидропресс



Закон паскаля

Рассмотрим сосуд, закрытый со всех сторон и заполненный жидкостью (рисунок 1). Сверху сосуд закрыт поршнем площадью ω . К поршню приложена внешняя сила P , которая передается им на жидкость, создавая на нее поверхностное давление $p_0 = P/\omega$.

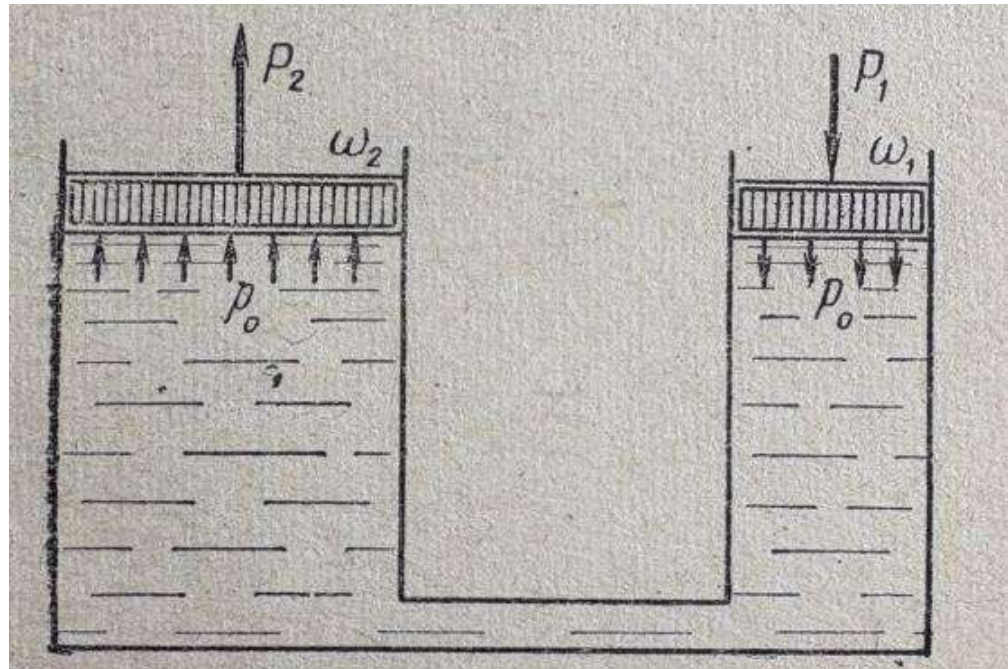


Закон паскаля

Используя основное уравнение гидростатики $p = p_0 + \gamma h$, можно определить гидростатическое давление в любой точке жидкости. Например в точке 1: $p_1 = p_0 + \gamma h_1$; в точке 2: $p_2 = p_0 + \gamma h_2$; в точке 3: $p_3 = p_0 + \gamma h_3$ и т.д. Как видим, выражение гидростатического давления в любой точке жидкости входит одно и то же внешнее давление p_0 . Это положение можно сформулировать так: давление, приложенное к жидкости, передается внутри жидкости во все стороны без изменения. В этом заключается известный из физики закон Паскаля.

Закон паскаля

Заметим, что величина силы давления, передаваемой на стенки сосуда, пропорциональна площади стенки. Покажем это на следующем примере. Имеем два сообщающихся сосуда, из которых один имеет площадь сечения ω_1 , другой ω_2 , причем $\omega_2 > \omega_1$ (рисунок 2).



Закон паскаля

Пусть к поршню малого сосуда приложена сила P_1 , которая в этом сосуде создает под поршнем давление $p_0 = P_1 / \omega_1$. По закону Паскаля это давление передается во все точки жидкости.



Закон паскаля

Следовательно, на площадь поршня с площадью ω_2 передается то же давление p_0 и действует сила давления $P_2 = p_0 \omega_2$. Подставив значение p_0 в это выражение, получим $P_2 = (P_1 / \omega_1) \omega_2$, или $P_2 = P_1 \cdot \omega_2 / \omega_1$.

Следовательно, сила давления P_2 во столько раз больше силы давления P_1 , во сколько раз площадь ω_2 больше площади ω_1 (рисунок 2).



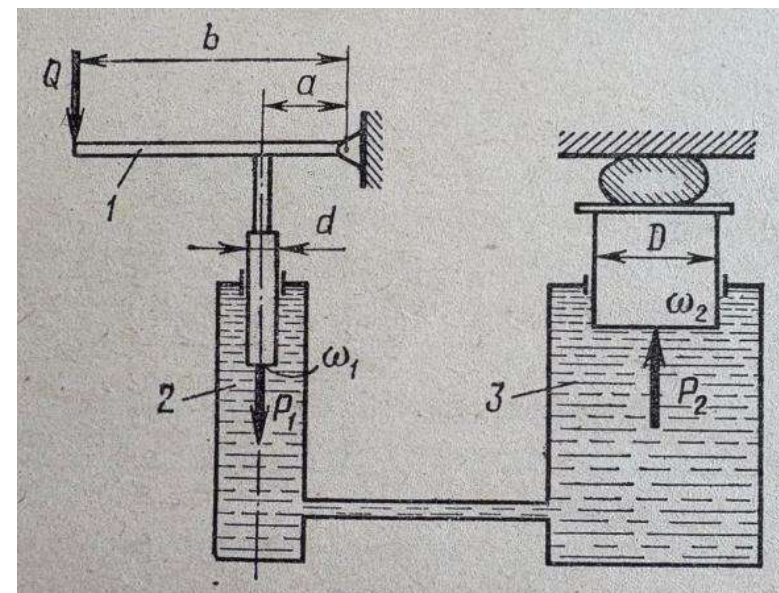
Гидропресс

В практике существуют гидравлические машины, действие которых основано на законах гидростатики, и частности на законе Паскаля. На рисунке 3 показана принципиальная схема гидравлического пресса. С помощью такого устройства можно получить значительный выигрыш в силе.



Гидропресс

Гидравлический пресс состоит из следующих основных частей: рычага 1, малого цилиндра 2 с поршнем диаметром d , большого цилиндра 3 с поршнем диаметром D . Прикладывая к концу рычага силу Q , действуем на малый поршень силой P_1 . В результате этого жидкость сжимается и давление передается на поршень большого цилиндра. Сила давления на поршень диаметром D равна P_2 .



Гидропресс

Определим значение P_2 .

По закону рычага второго рода сила P_1 равна $P_1 = Q(b/a)$, а давление, созданное в жидкости, $p = P_1 / \omega_1 = Q(b/a) \cdot (1 / \omega_1)$. Это давление действует на площадь большого поршня по всей его площади ω_2 с силой:

$$P_2 = p \omega_2 = Q(b/a) \cdot (\omega_1 / \omega_2).$$

Площади поршней $\omega_1 = \pi d^2 / 4$ и $\omega_2 = \pi D^2 / 4$.

Подставляя эти значения в выражение для P_2 находим:

$$P_2 = Q(b/a)(D/d)^2.$$

Гидропресс

С учетом потерь на трение расчетная формула гидравлического пресса записывается в следующем виде:

$$P_2 = \eta Q (b/a) (D/d)^2.$$

Здесь η – коэффициент полезного действия (к.п.д.) гидравлического пресса; обычно $\eta = 0,8-0,85$.

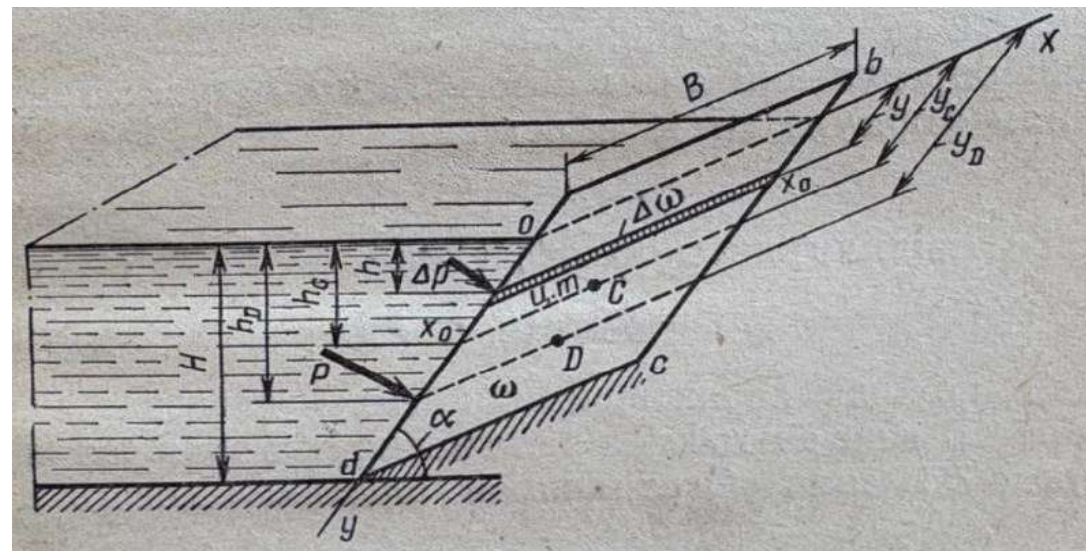
На этих же принципах основана работа и других гидравлических машин, например гидравлического аккумулятора, гидравлического домкрата.

3. Давление на плоскую стенку



Давление на плоскую стенку

Определим силу весового давления на плоскую стенку, изображенную на рисунке 1. Площадь смоченной части стенки $obcd$ равна ω . Стенка наклонена к горизонту под углом α и симметрична относительно вертикальной оси, ширина стенки B .



Направим оси y и x , как показано на рисунке 1. Выделим на глубине h элементарную (весьма малую) площадку $\Delta\omega$, в пределах которой гидростатическое давление можно считать всюду равным γh . Тогда сила давления на площадку $\Delta\omega$ по формуле $P_{cp} = \Delta P / \omega$ равна $\Delta P = \gamma h \Delta\omega$ (условно показана по границе от стенки).

Сила гидростатического давления на всю стенку площадью ω равна сумме элементарных сил давления ΔP на площадки $\Delta\omega$, так как площадь ω состоит из суммы $\Delta\omega$

$$P = \sum \Delta P = \sum \gamma h \Delta\omega.$$

Так как $h = y \sin \alpha$, то $P = \sum \gamma \sin \alpha y \Delta\omega$.

Вынося постоянные величины γ и $\sin \alpha$ за знак суммы? Получим $P = \gamma \sin \alpha \sum y \Delta \omega$, где $\sum y \Delta \omega$ – статический момент площади ω относительно оси x , равный $\sum y \Delta h_c = y_c \omega$ (y_c – координата центра тяжести площади ω).

Подставим это выражение в формулу $P = \gamma \sin \alpha y_c \omega$, но $y_c \sin \alpha = h_c$, тогда $P = \gamma h_c \omega$.

Читать это уравнение следует так: сила гидростатического давления на плоскую стенку, погруженную в жидкость, равна произведению площади стенки на гидростатическое давление в ее центре тяжести.

При определении силы абсолютного гидростатического давления формула имеет вид $P=(p_0+ \gamma h_c) \omega$, или при манометрическом давлении $P=(p_0+ \gamma h_c-p_a) \omega$.

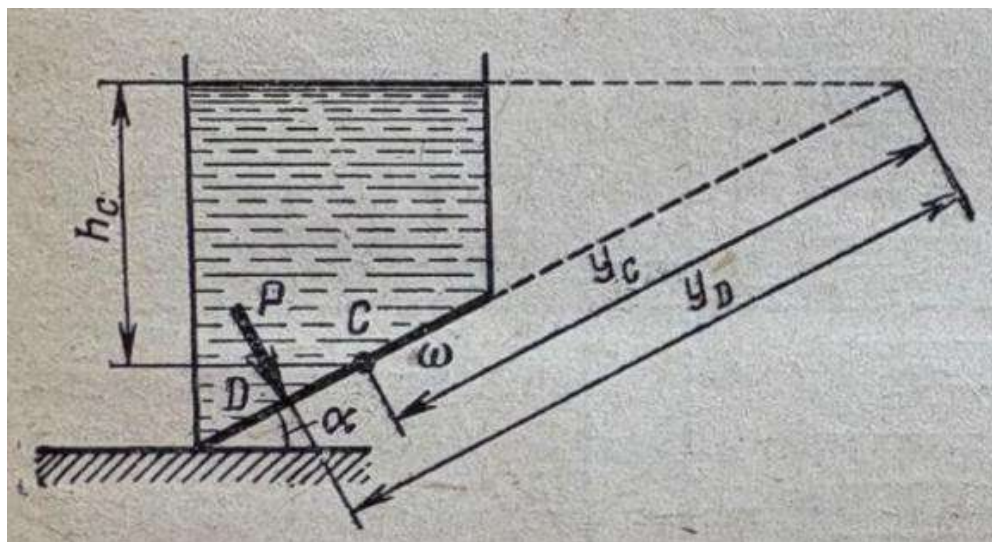
Для полной характеристики силы давления необходимо знать еще ее точку приложения, которая называется *центром давления*. Ограничимся случаем весового давления.



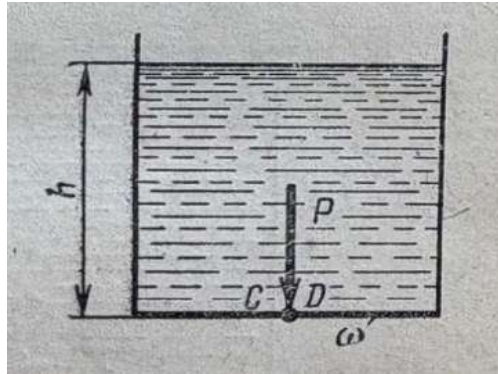
Из выражения видно, что $y_D > y_C$, т.е. центр давления всегда лежит ниже центра тяжести площади, за исключением частного случая, когда стенка расположена горизонтально (в этом случае точки С и D совпадают). Заметим, что все выводы относительно центра давления справедливы для стенки, имеющей вертикальную ось симметрии, на которой лежат центр тяжести площади и центр давления. Если стенка не имеет осей симметрии, то для определения положения центра давления необходимо определять обе координаты его (вертикальную и горизонтальную).



Плоское дно сосудов и резервуаров следует рассматривать как частный случай плоскости стенки, погруженной в жидкость. Так, для плоского дна сосуда, изображенного на рисунке 2, силу избыточного гидростатического давления определяют по формуле $P = \gamma h_c \omega$, а положение центра давления (точку D) – по формуле $y_D = y_c + J_{x0} / \omega y_c$

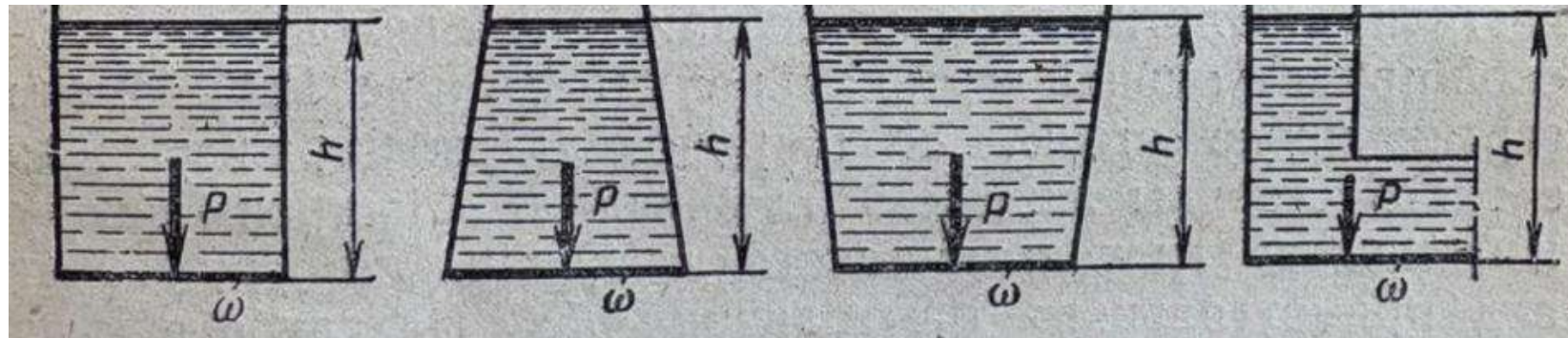


Для горизонтального плоского дна сосуда (рисунок 3) сила гидростатического давления равна $P = \gamma h \omega$, а центр давления и центр тяжести площади дна совпадают.



Рассмотрим изображение 4, четыре сосуда различной формы, заполненные одинаковой жидкостью. Глубина погружения h горизонтального плоского дна и его площадь ω во всех сосудах одинаковы.

Нетрудно убедиться, что сила гидростатического давления на плоское дно любого сосуда будет также одинакова $P = \gamma h \omega$, хотя объемы жидкости в сосудах различные. В этом заключается так называемый гидростатический парадокс (противоречие), сформулировать который можно так: сила гидростатического давления на плоское горизонтальное дно сосуда зависит только от площади дна и глубины жидкости в сосуде и не зависит от формы сосуда.



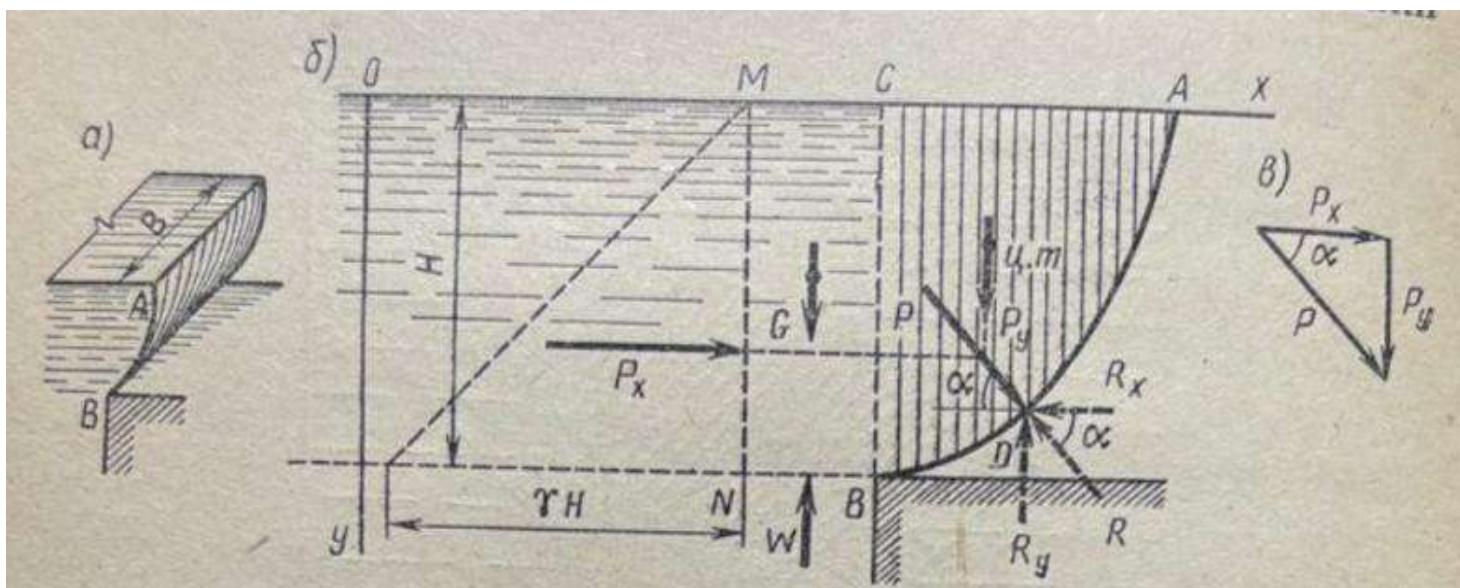
4. Давление на криволинейную стенку



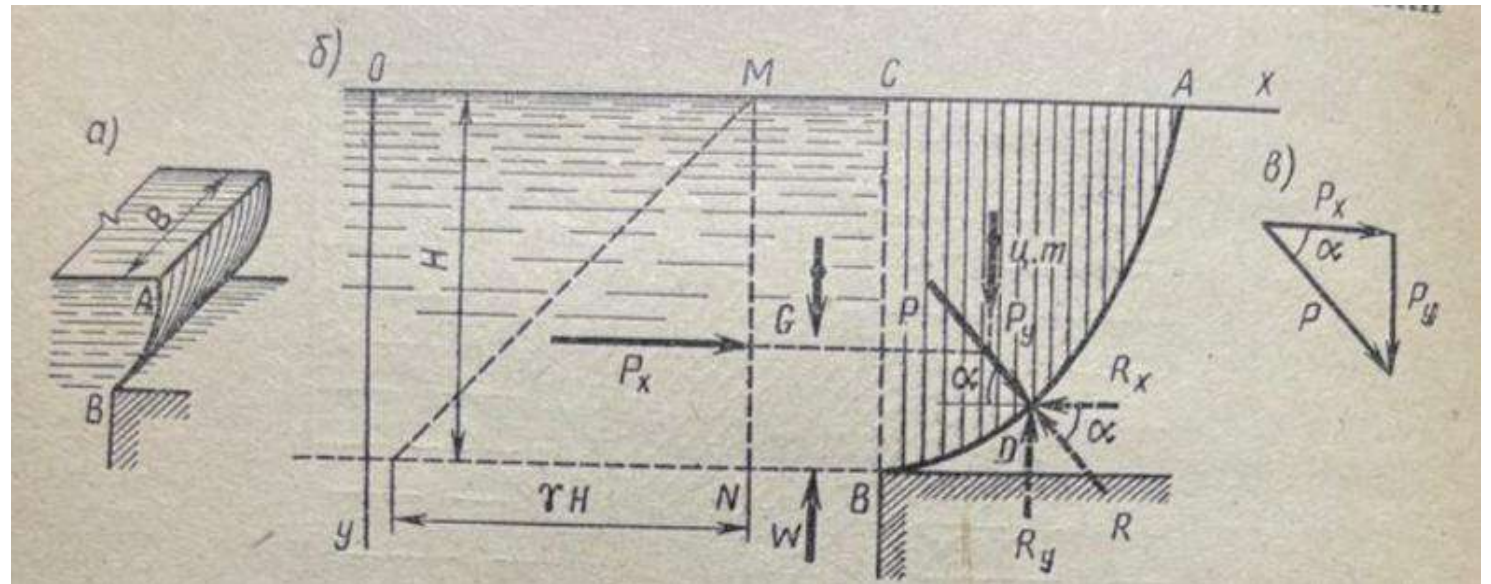
В практике широко распространены цилиндрические поверхности, воспринимающие давление жидкости: стенки труб и цилиндрических сосудов, цилиндрические, сегментные и секторные затворы водосбросов и водоспусков и т. п. Определение силы гидростатического давления на цилиндрические стенки и ее точки приложения, в отличие от плоских стенок, имеет свои особенности.



Представим цилиндрическую стенку (поверхность) АВ шириной В, поддерживающую жидкость слева (рисунок 1). Образующие этой поверхности горизонтальны и перпендикулярны плоскости чертежа. Нижняя образующая стенки погружена под свободную поверхность на глубину Н. Стенка симметрична относительно вертикальной оси.



Проведем вспомогательную произвольную плоскость MN. Рассмотрим равновесие объема жидкости, ограниченного сверху и снизу горизонтальными плоскостями, проходящими по свободной поверхности (оси ox) и нижней кромке стенки (через точку B), слева - плоскостью MN, справа — стенкой AB. Длина объема (по перпендикуляру к плоскости чертежа) равна ширине стенки B.



На выделенный объем действуют силы:

1) горизонтальная составляющая силы — сила гидростатического давления на вертикальную плоскость MN равна: $P_x = (1/2)\gamma H^2 B$;

2) вертикальные составляющие силы: W — сила давления, направленная снизу вверх на плоскость NB, $W = \gamma H \overline{BN} B$,

G — сила тяжести объема жидкости в пределах поперечного сечения MNBC, $G = \gamma H \overline{BN} B$,

P_y — сила тяжести объема жидкости в пределах поперечного сечения CAB, $P_y = \gamma \cdot \text{пл. CAB} \cdot B$.

Все рассмотренные силы являются активными силами гидростатического давления жидкости. Все эти силы можно привести к одной равнодействующей P , которая и будет искомой силой гидростатического давления на цилиндрическую стенку, приложенную в центре давления (точка D).

Равнодействующая сила P уравнивается силой реакции стенки R , которая равна силе P по величине, но противоположна по направлению (на рисунке 1 показана пунктиром). Составляющими силы R на координатные оси являются силы R_x , и R_y .



Все названные силы действуют вертикальной плоскости — вертикальной плоскости симметрии стенки (проходит по середине ширины стенки). Выделенный объем жидкости под действием активных и реактивных сил находится в равновесии; поэтому используем известные из механики уравнения равновесия плоской системы сил:

1) сумма проекций всех сил на ось ox равна нулю

$$\Sigma x = P_x - R_x = 0,$$

отсюда $P_x = R_x$, или, учитывая соотношение, имеем

$$P_x = R_x = (1/2)\gamma H^2 B.$$

Здесь P_x — горизонтальная составляющая силы гидростатического давления на цилиндрическую стенку;

2) сумма проекций всех сил на ось oy равна нулю

$$\Sigma y = G - W + P_y - R_y = 0.$$

Подставляя значения W , G , P_y в уравнение и получим:

$$\gamma H \cdot \overline{BN} \cdot B - \gamma H \cdot \overline{BN} \cdot B + \gamma \cdot \text{пл. } CAB \cdot B - R_y = 0,$$

отсюда $R_y = \gamma \cdot \text{пл. } CAB \cdot B$, а учитывая соотношение $P_y = \gamma \cdot \text{пл. } CAB \cdot B$, можно написать $P_y = R_y = \gamma \cdot \text{пл. } CAB \cdot B$ или $P_y = \gamma V_0$.

Здесь P_y – вертикальная составляющая силы гидростатического давления на цилиндрическую стенку, V_0 – объем жидкости.

Правая часть уравнения $P_y = R_y = \gamma \cdot \text{пл.СAB} \cdot V$ или $P_y = \gamma V_0$ выражает собой силу тяжести жидкости над цилиндрической поверхностью. Объем этой жидкости называется *телом давления* (на рисунке 1 заштрихован).

Итак, получены формулы, которые позволяют определить горизонтальную и вертикальную составляющие силы гидростатического давления на цилиндрическую стенку.

Полная сила гидростатического давления на цилиндрическую стенку P определяется как геометрическая сумма P_x и P_y

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}.$$

Графически P – это замыкающая силового треугольника.

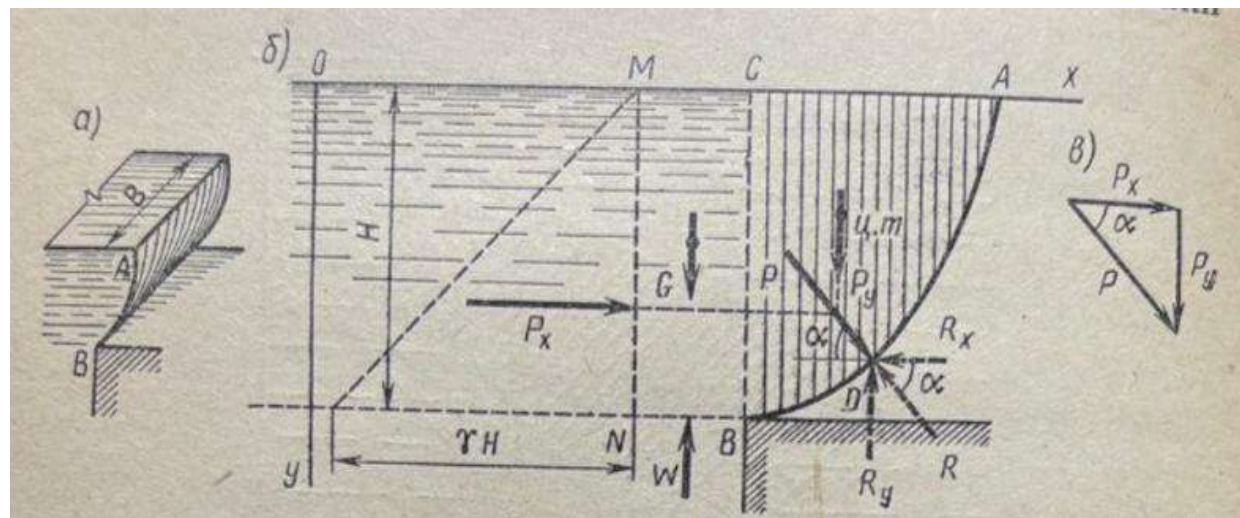
Направление силы гидростатического давления определяется углом наклона α ее к горизонту, тангенс которого находят из силового треугольника

$$\operatorname{tg} \alpha = P_y / P_x.$$

5. Объем тела давления



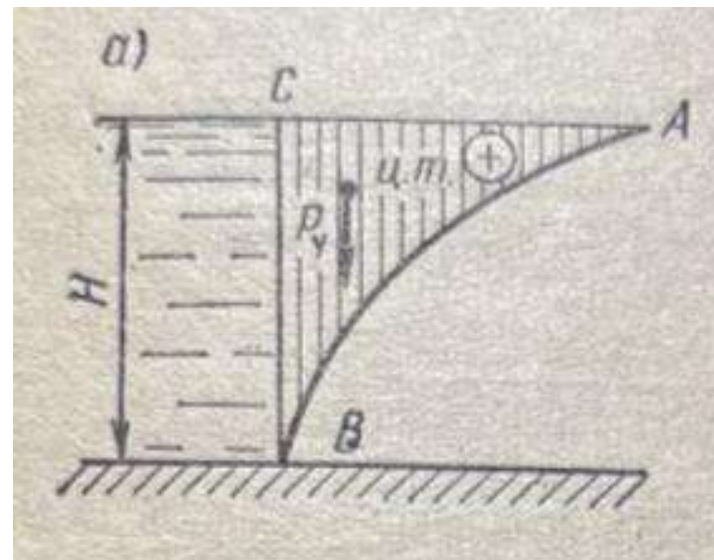
Точку приложения силы давления (центр давления) можно найти графическим построением, показанным на рисунке 1). Порядок определения следующий. Находят точку пересечения линий действия составляющих P_x и P_y и через нее проводят равнодействующую под найденным углом α к горизонту. Точка пересечения линии действия силы P с цилиндрической поверхностью (точка D) и будет центром давления.



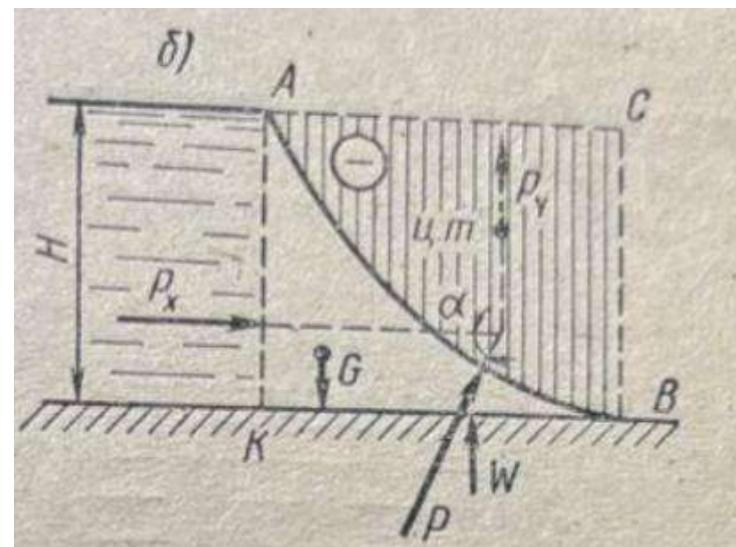
Если цилиндрическая поверхность описывается по окружности, то линия действия силы давления проходит через геометрический центр окружности под углом α к горизонту; пересечение ее с образующей цилиндрической поверхности определяет точку D (центр давления). Следует помнить, что вертикальная составляющая P_y , может быть направлена либо вверх, либо вниз, в зависимости от положения поверхности по отношению к жидкости.



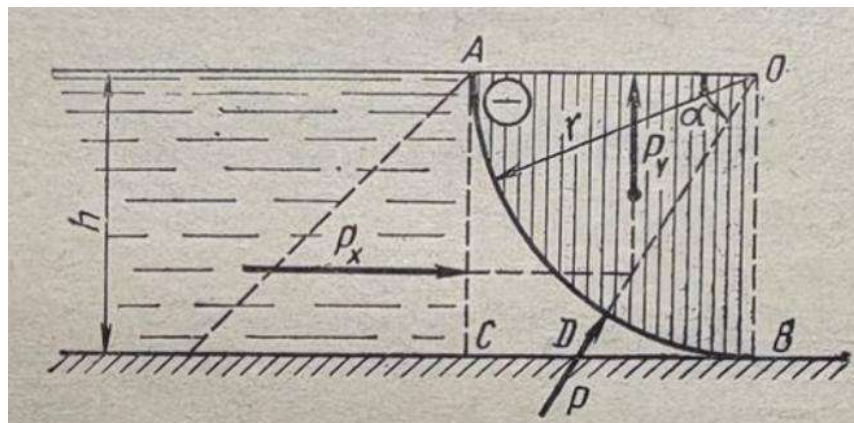
Так, например, на цилиндрические поверхности, изображенные на рисунках 1 и 2, когда жидкость находится над цилиндрической поверхностью, вертикальная составляющая P_y , будет положительна (т. е. направлена вниз) и численно равна силе тяжести жидкости в объеме так называемого положительного (действительного) тела давления, образованного жидкостью.



Когда жидкость находится под цилиндрической поверхностью (рисунок 3), вертикальная составляющая P_y , будет отрицательна (т. е. направлена вверх) и численно равна силе тяжести воображаемого объема жидкости в пределах так называемого отрицательного (фиктивного) тела давления, образованного воздухом (масса объема в пределах площади ABC на рисунке 3) В самом деле, в этом случае $W = \gamma H \cdot \overline{BK} \cdot B$, где B – ширина стенки и $G = \gamma \cdot \text{пл. KAB} \cdot B$.



Определим величину и направление силы гидростатического давления на четверть цилиндра, поддерживающего слой воды $h=r=2$ м. Ширина поверхности $B=4$ м (рисунок 5).



Горизонтальная составляющая равна

$$P_x = (1/2)\gamma h^2 B = (1/2) \cdot 10 \cdot 2^2 \cdot 4 = 80 \text{ кН.}$$

Вертикальная составляющая равна $P_y = -\gamma V_0$. Объем тела давления $V_0 = F_0 B = (1/4) \pi r^2 B = (1/4) \cdot 3,14 \cdot 2^2 \cdot 4 = 12,56 \text{ м}^3$;

$$\text{отсюда } P_y = -10 \cdot 12,56 = -125,6 \text{ кН.}$$

Равнодействующая силы давления равна:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \sqrt{80^2 + (-125,6)^2} = 149 \text{ кН.}$$

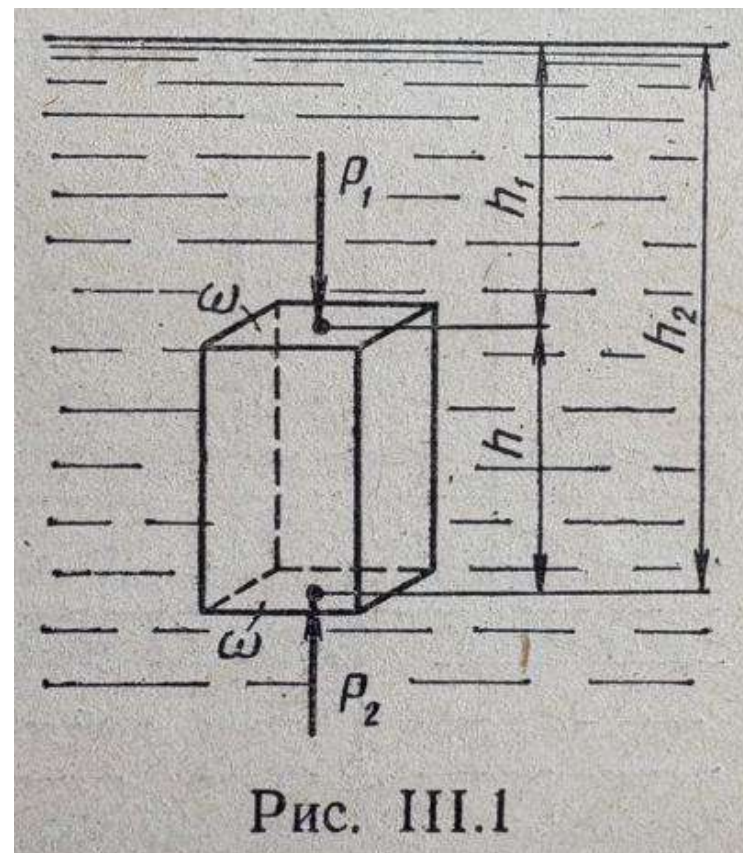
Определим $\text{tg } \alpha$: $\text{tg } \alpha = P_y / P_x = 125,6 / 80 = 1,57$; $\alpha = 54^\circ$.

Проведя прямую через центр окружности (точка O) под углом $\alpha = 54^\circ$ к горизонту, получим направление R, а точка пересечения этой прямой с образующей цилиндра даст центр давления — точку D.

6. Закон Архимеда



Рассмотрим силы давления жидкости на тело, погруженное в жидкость (рисунок 1). Тело призматической формы имеет высоту h и площадь верхнего и нижнего оснований ω . Верхнее основание погружена в жидкость на глубину h_1 , нижнее – на глубину h_2 .



Со стороны жидкости на тело действуют силы:

1) сила гидростатического давления жидкости на верхнее основание (действует сверху вниз) $P_1 = \gamma h_1 \omega$.

2) сила гидростатического давления жидкости на нижнее основание (действует снизу вверх) $P_2 = \gamma h_2 \omega$.

3) силы давления жидкости на боковые поверхности, которые не учитываются, так как они взаимно уравновешиваются.



Равнодействующая сила гидростатического давления на рассматриваемый объем равна разности P_2 и P_1 и направлена вверх (в сторону большей силы):

$$P = P_2 - P_1 = \gamma h_2 \omega - \gamma h_1 \omega = \gamma \omega (h_2 - h_1),$$

где $h_2 - h_1 = h$; $\omega h = V$ – объем тела; γ – удельный вес жидкости.

Тогда $P = \gamma V$

Здесь γV – сила тяжести жидкости в объеме тела.

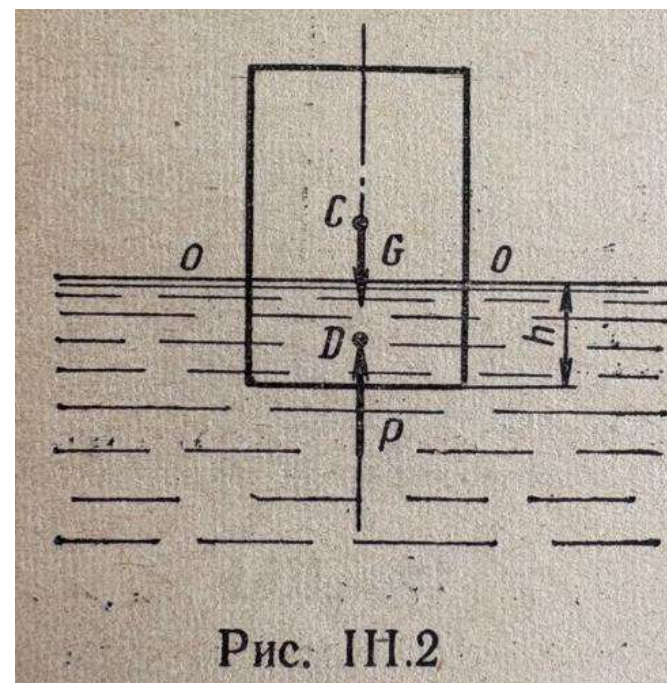


Таким образом, на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная силе тяжести жидкости в объеме этого тела. Это положение известно под названием закона Архимеда (греческий ученый, живший в III в. до н.э.).

Тело более сложной формы можно представить состоящим из множества элементарных вертикальных призм; для каждой из них сделанный вывод справедлив, следовательно, закон Архимеда действителен для тела любой формы. Этот закон подтверждается и экспериментально.



На тело, погруженное полностью или частично в жидкость, действуют две силы: 1) сила тяжести G , приложенная в его центре тяжести C , действует сверху вниз и 2) выталкивающая (подъемная) сила P , приложенная в центре давления или, как его называют еще, в центре водоизмещения D , которая направлена снизу вверх (рисунок 2).



Центром водоизмещения является центр тяжести вытесненного объема жидкости. В зависимости от соотношения сил G и P могут быть три состояния тела, погруженного в жидкость:

1) если $G > P$, тело тонет;

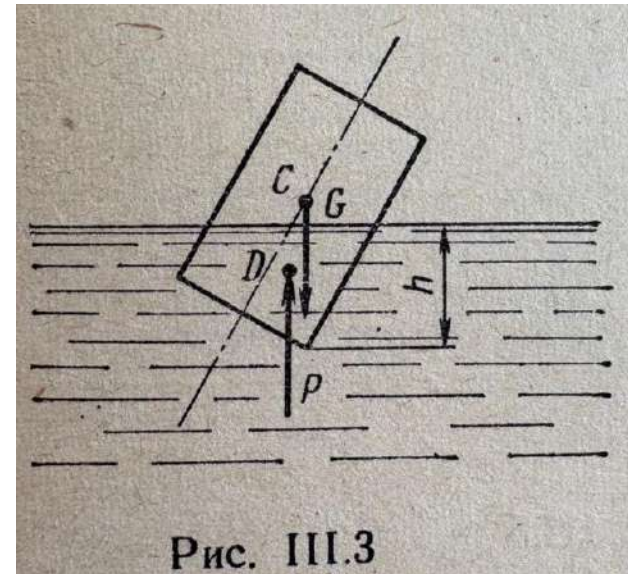
2) если $G = P$, тело находится внутри жидкости в безразличном состоянии (тело плавает в погруженном состоянии);

3) если $G < P$, тело всплывает до тех пор, пока сила тяжести вытесненной жидкости не станет равна силе тяжести G .



Рассмотрим условие плавучести тел. Для равновесия тела, плавающего на свободной поверхности, условия $G=P$ недостаточно. В самом деле, из рисунка 3 ясно, что в случае, если центр тяжести тела и центр давления не лежат на одной вертикали, появляется пара сил P и G , которая стремится вращать тело. Поэтому условий равновесия плавающего тела будет два:

- 1) центр тяжести тела и центр давления должны лежать на одной вертикали (рисунок 2);
- 2) $G=P$



Введем следующие понятия. Линия пересечения свободной поверхности жидкости с поверхностью плавающего тела называется *ватерлинией* (линия 0-0 на рисунке 2). Глубина погружения самой низкой точки под уровень свободной поверхности называется *глубиной погружения*, или осадкой (h на рисунках 2 и 3).

Объем жидкости, вытесненный телом, называется *объемным водоизмещением*, а сила тяжести этого объема – *весовым водоизмещением* (которое равно выталкивающей силе P).

