Лекция 4

4 Элементы симметрии кристаллических многогранников

Симметричной фигурой или симметричным многогранником называется фигура, которая может совместиться сама с собой в результате симметричных преобразований.

Операции и элементы симметрии I рода

Отражения и вращения, приводящие многогранник в совмещение с самим собой, называются преобразованиями симметрии или симметричными операциями.

Воображаемые плоскости, линии и точки, с помощью которых осуществляются эти отражения и вращения, называются элементами симметрии.

Для обозначения симметричных преобразований и соответствующих им элементов симметрии пользуются специальными условными символами, которые приводятся в таблице 2.

Плоскости симметрии, оси симметрии, центр симметрии – это характерные элементы симметрии кристаллических многогранников.

Плоскость симметрии – плоскость, которая делит фигуру на две части, расположенные друг относительно друга, как предмет и его зеркальное отражение (рисунок 28).

Плоскости симметрий располагаются строго определённо, и все пересекаются друг с другом.

Осью симметрии называется прямая линия, при повороте вокруг которой на некоторый определённый угол фигура совмещается сама с собой. Порядок оси симметрии n показывает, сколько раз фигура совместится сама с собой при полном обороте вокруг этой оси.

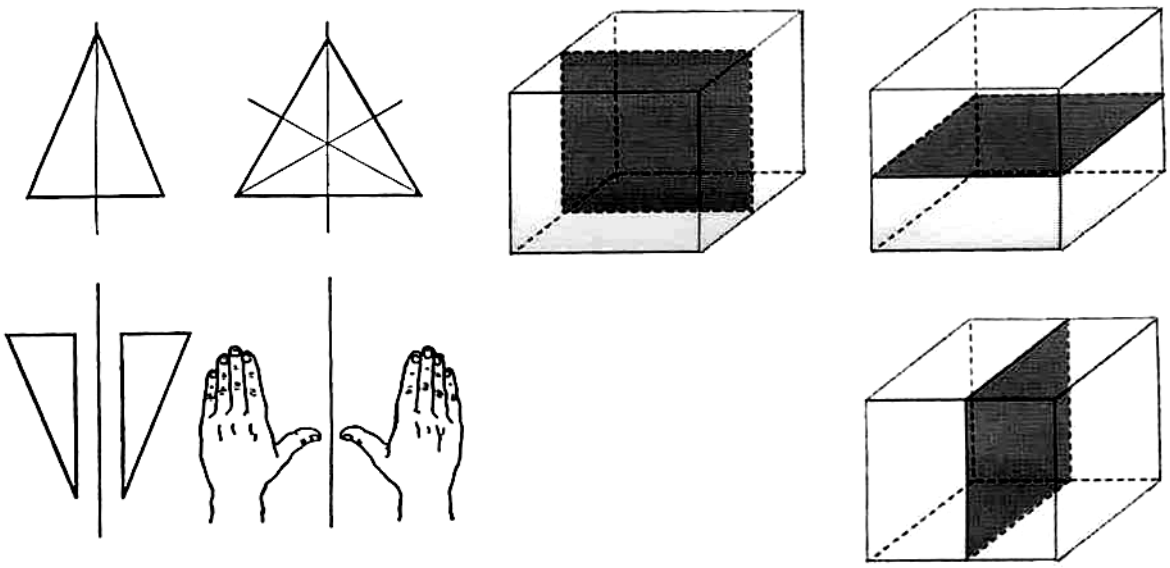
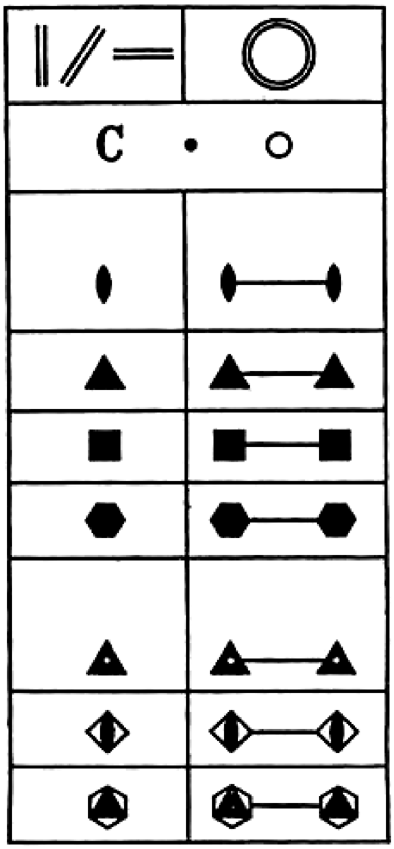


Рисунок 28 - ***Примеры плоскостей симметрии m***

Таблица 2

Элементы симметрии конечных фигур
и их обозначения на стереографической проекции

Название	Обозначение		Изображение по отношению к плоскости чертежа	
	между-народный символ	по формуле симметрии	перпендикулярное	параллельное
Плоскость симметрии	m	P		
Центр симметрии	$\bar{1}$	C	C • ○	
Поворотная ось симметрии:	n	L_n		
двойная	2	L_2		
тройная	3	L_3		
четверная	4	L_4		
шестерная	6	L_6		
Инверсионная ось симметрии:	$\bar{n}$	$L_{\bar{n}} = L_{ni}$		
тройная	$\bar{3}$	$L_{\bar{3}} = L_{3i}$		
четверная	$\bar{4}$	$L_{\bar{4}} = L_{4i}$		
шестерная	$\bar{6}$	$L_{\bar{6}} = L_{6i}$		



У куба есть:

- три оси 4-го порядка (4, L_4), которые проходят через центры противоположных граней (рисунок 29а);
- четыре оси 3-го порядка (3, L_3), являющиеся пространственными диагоналями куба (рисунок 29б);
- шесть осей 2-го порядка (2, L_2), проходящие через середины противоположенных рёбер (рисунок 29в).

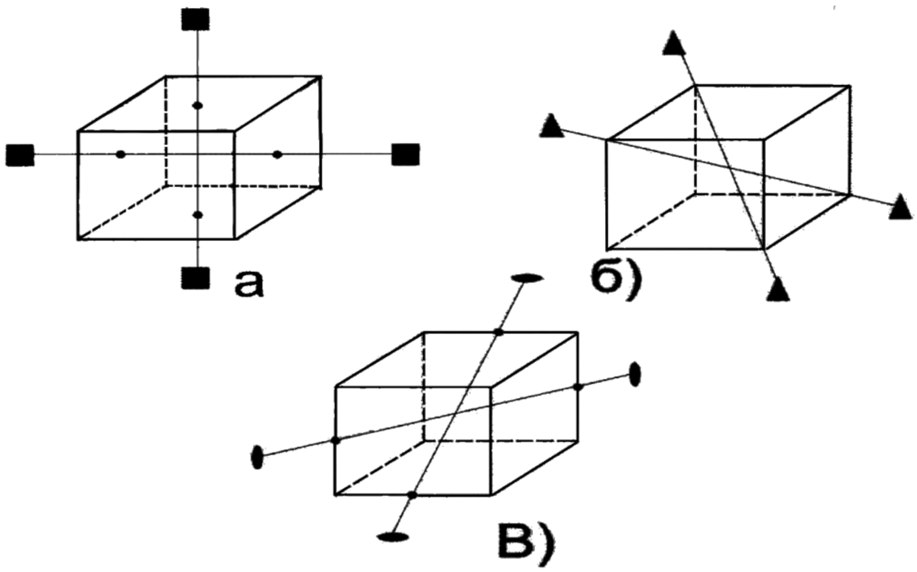


Рисунок 29 - ***Некоторые оси симметрии куба***

Центр симметрии (центр инверсии, центр обратного равенства) – особая точка внутри фигуры, характеризующаяся тем, что любая прямая, проведённая через центр симметрии, встречает одинаковые (соответственные) точки фигуры по обе стороны от центра на равных расстояниях.

Симметричное преобразование в центре симметрии – это есть зеркальное отражение в точке, при этом каждая точка фигурки отражается в центре так, что фигурка как бы поворачивается при этом с лица наизнанку (рисунок 29).

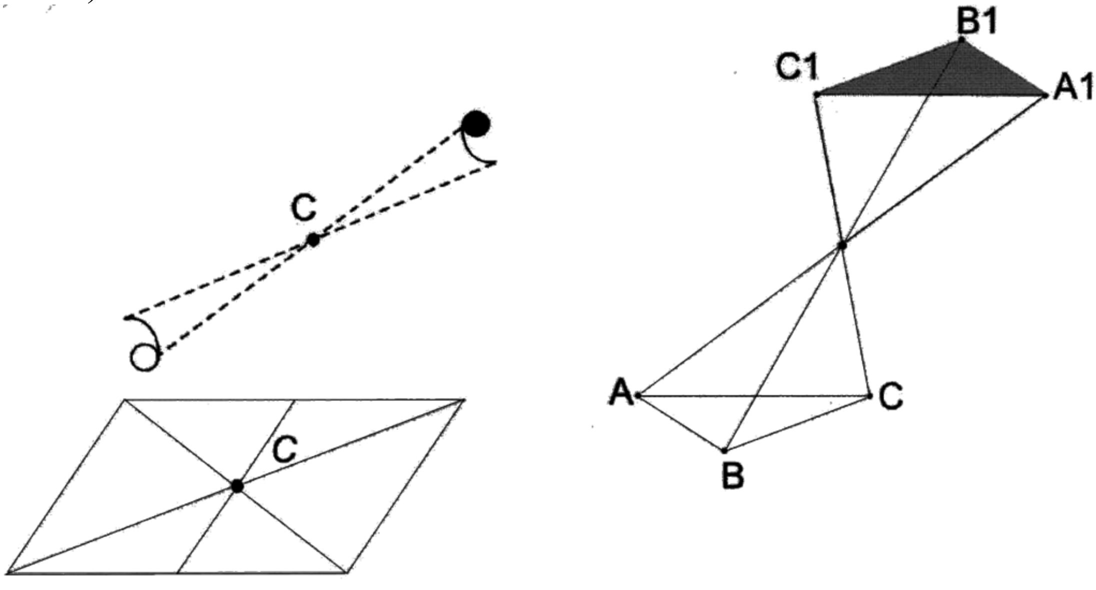


Рисунок 30 – ***Действие центра симметрии***

На рисунке 30 приведены фигуры, обладающие центром симметрии: параллелограмм, равные и обратно параллельные треугольники.

Вообще, обратная параллельность – характерное свойство фигур, обладающих центром симметрии.

При всех симметричных преобразованиях все расстояния между точками фигуры остаются неизменными, то есть кристалл не испытывает ни растяжения, ни изгиба и так далее.

В природе можно найти примеры осей симметрии различного порядка: у пятиконечной звезды – ось 5-го порядка (L_5), у ромашки – ось n-го порядка (L_n, где n – число лепестков).

В кристаллах оси 5-го порядка и выше 6-го – невозможны. В кристаллах возможны только оси 2, 3, 4, 6-порядков (формально можно говорить об оси 1-го порядка).

В кристаллах также приходится постоянно сталкиваться с такой ситуацией, когда происходит наложение элементов симметрии друг на друга. В этом случае вступает действие принцип Кюри: если накладываются друг на друга два явления или явление и окружающая среда, то сохраняется только та симметрия, которая является общей для обеих.

Проиллюстрируем действие принципа Кюри на простейшем примере: (рисунок 31).

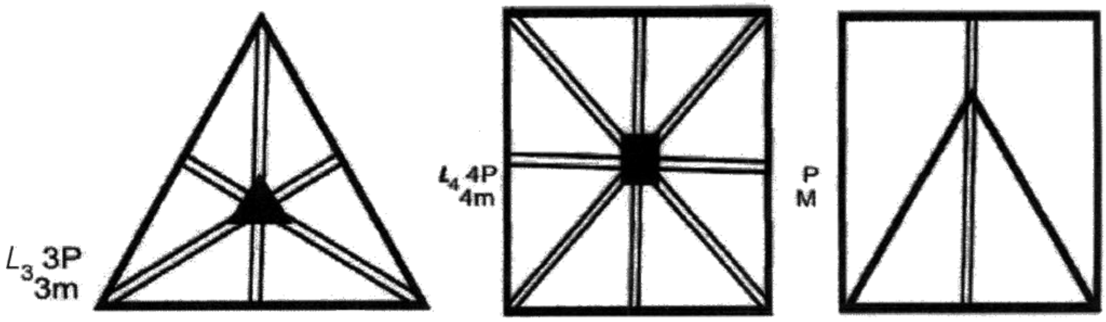


Рисунок 31 – ***К иллюстрации принципа Кюри***

На центр грани куба выходит ось 4-го порядка L_4, там же пересекаются четыре плоскости симметрии 4 m.

Нарисуем на грани куба равносторонний треугольник. У самого треугольника есть ось симметрии 3-го порядка L_3 и три плоскости симметрии 3m. Но если треугольник находится на грани куба, то квадрат и треугольник теряют свои элементы симметрии, остаётся только одна общая плоскость симметрии. В этом и заключается принцип Кюри.

Операции и элементы симметрии 2-го рода

Инверсионная ось симметрии представляет собой совместное действие оси вращения и одновременного отражения (инверсии) в центре симметрии.

Инверсионных осей 5-го порядка и больше, чем 6-го порядка в кристаллах быть не может.

Инверсионные оси обозначаются:

L_2 или $\overline{2}$ или L_{6i} .

Рассмотрим многогранник и его гномостереографическую проекцию (рисунок 32).

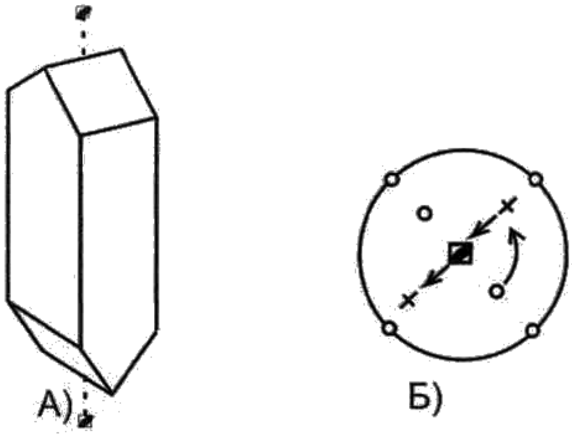


Рисунок 32 - ***Многогранник с инверсионной осью $L_{\bar{4}}$ (а) и его гномостереографическая проекция (б)***

Повернём многогранник на 90° : грани четырёхгранной призмы при этом симметрично совмещаются друг с другом, но не совместятся две «двускатные крыши», повёрнутые под углом 90° друг к другу. Значит, простой оси 4-го порядка (L_4) у этого многогранника нет. Можно совместить его грани друг с другом только путём более сложного преобразования: повернуть многогранник на 90° вокруг его вертикальной оси и одновременно отразить его грани в центре симметрии. Это и есть симметричное преобразование инверсионной осью 4-го порядка L_4.

На рисунке 32 (б) показано это преобразование: грань А поворачивается на 90° в верхней полусфере проекций и, отражаясь в центре симметрии, занимает положение точки В в нижней полусфере.

Таким образом, познакомившись с элементами симметрии кристалла, приходим к выводу: внешняя, видимая симметрия кристалла полностью описывается элементами симметрии: m, осями симметрии L_n, и инверсионными осями симметрии $L_{\bar{n}}$.

Надо обратить внимание на то, что не всегда можно отличить действие оси 2-го порядка от плоскости или центра симметрии.

Например (рисунок 33).

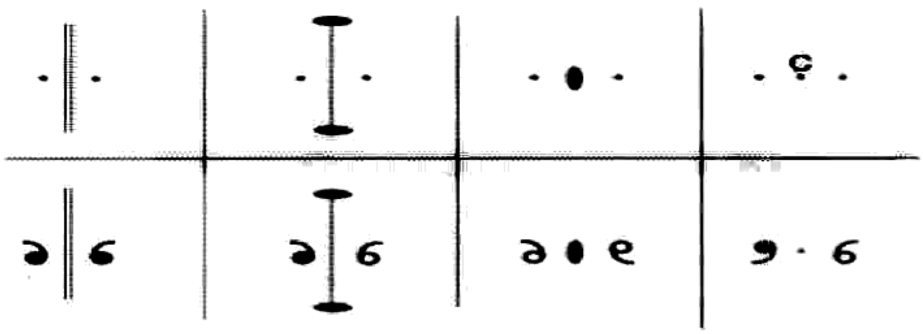


Рисунок 33 - ***Симметричное преобразование:***
а) плоскостью симметрии; б) осью симметрии 2-го порядка, лежащий в плоскости чертежа; в) осью симметрии 2-го порядка, лежащий перпендикулярно плоскости чертежа; г) центром симметрии

В верхнем ряду преобразования показаны на примере точки, и различия в расположении разными способами преобразования нет.

Если же рассматривать преобразования несимметричных цветных фигурок (нижний ряд)- различие очевидно.

Следовательно, для того чтобы находить отдельные элементы симметрии на моделях идеальных кристаллов, нужно рассматривать не только симметричную грань, но и те грани, которыми она окружена.

В симметричных многогранниках операции симметрии сочетаются друг с другом. При этом не все сочетания элементов симметрии возможны: например, ось L_4 не может быть перпендикулярна L_3 или L_6.