

Лекция 3

3 Метод Кристаллографических проекции

Согласно закону постоянства углов, характерными параметрами любого кристаллического вещества являются углы между гранями кристалла. Поэтому форму кристаллического многогранника, расположение его элементов симметрии можно характеризовать набором углов между гранями.

В кристаллографии чаще пользуются углами между нормальными к граням, именно эти углы определяются по рентгенограммам и гониометром. Зная углы между нормальными к граням, можно заменить кристаллический многогранник его *полярным комплексом*, то есть совокупностью прямых, перпендикулярных граням кристалла и проходящим через одну точку в центре комплекса (рисунок 16 и рисунок 17).

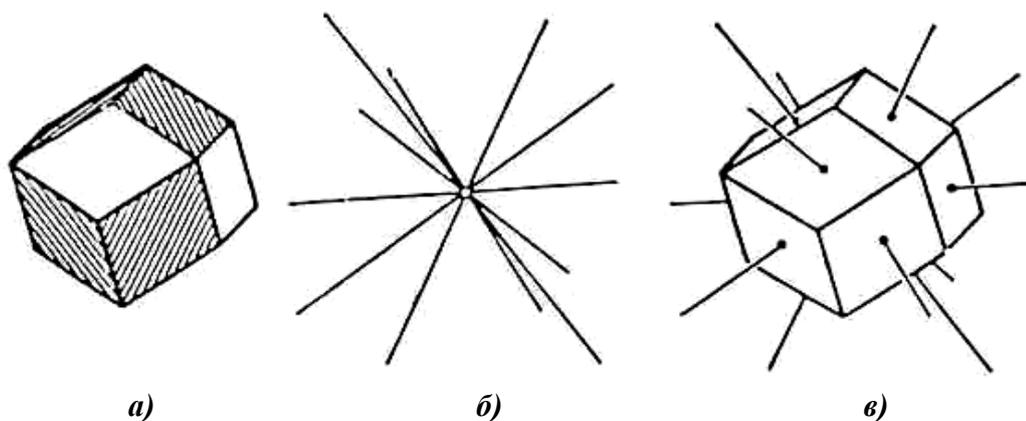
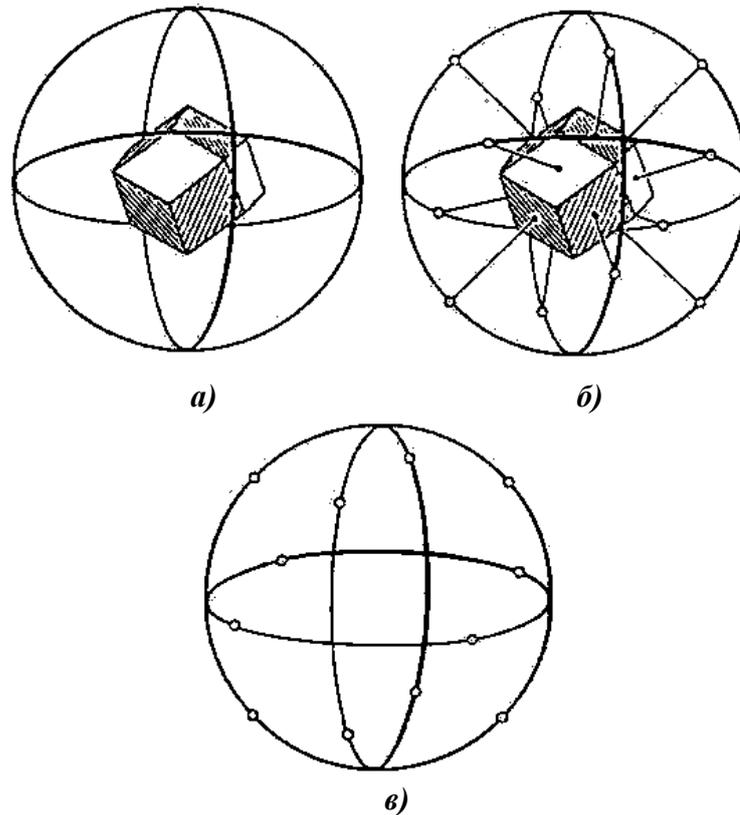


Рисунок 16 – Кристаллический многогранник:
а – ромбический додекаэдр; б – его полярный комплекс; в – нормали к его граням.



**Рисунок 17 – Построение сферы проекций (а) и сферической проекции (б);
полная сферическая проекция ромбического додекаэдра (в)**

Сферическая проекция

Из точки пересечения прямых (на рисунке 16 б) опишем сферу (рисунок 17 а). Пересечение нормалей к граням кристалла с поверхностью сферы представляет собой сферическую проекцию этих нормалей (рисунок 17 б). Каждая нормаль проецируется на поверхность сферы проекций в виде точки. Каждая из точек проекций соответствует одной из граней кристалла (рисунок 17 в). Положение любой точки на поверхности сферы проекций характеризуется двумя координатами: ρ - полярное расстояние, отсчитываемое по любому направлению от нуля (северный полюс); φ - долгота, отсчитываемая по экватору от меридиана, принятого за ноль (рисунок 18).

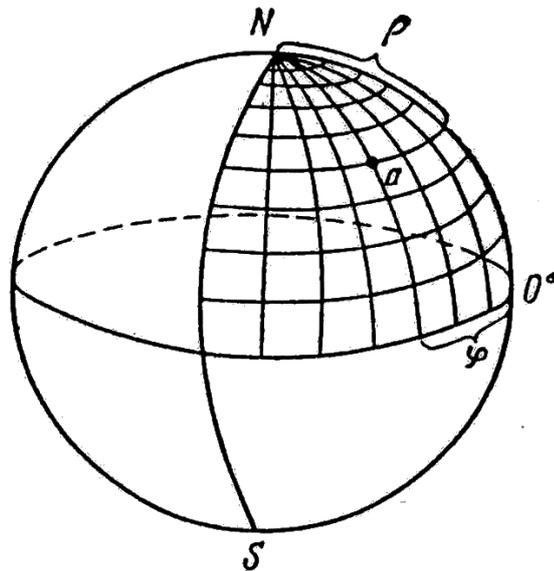


Рисунок 18 – Сферические координаты на поверхности сферы проекций

Сферическая проекция кристалла наглядна, но в практическом отношении не очень удобна. Ее следует спроецировать на плоскость, так появляются другие виды проекций.

Стереографическая проекция

За плоскость стереографической проекции Q выбирается экваториальная плоскость, на которую сфера проецируется в виде круга проекций (рисунок 19). В одном из полюсов этой сферы помещается точка зрения S .

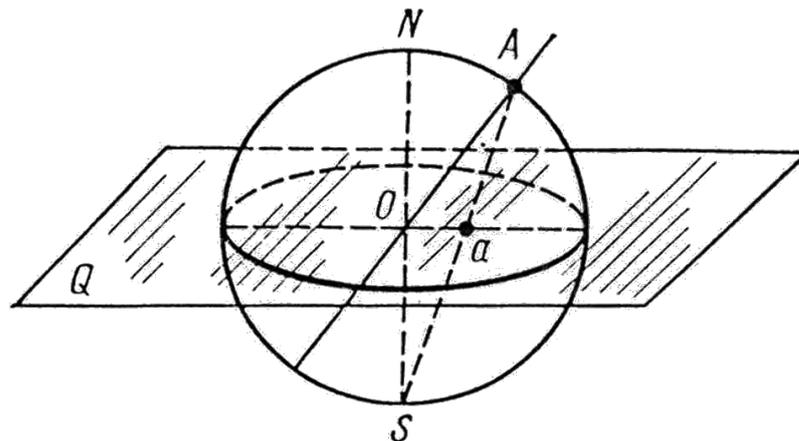


Рисунок 19 - Построение стереографической проекции

Чтобы спроецировать направление OA , проводим линию AS от полюсной точки A этого направления до точки зрения S . Точка a пересечения линии AS с плоскостью проекций есть стереографическая проекция направления OA .

Стереографические проекции направлений изображаются точками внутри круга проекций. Очевидно, что вертикальное направление

изображается точкой в центре круга (рисунок 20 а), горизонтальное – как две точки на экваторе. Плоскость, проходящая через точку О и пересекающая сферу, проецируется в виде дуги.

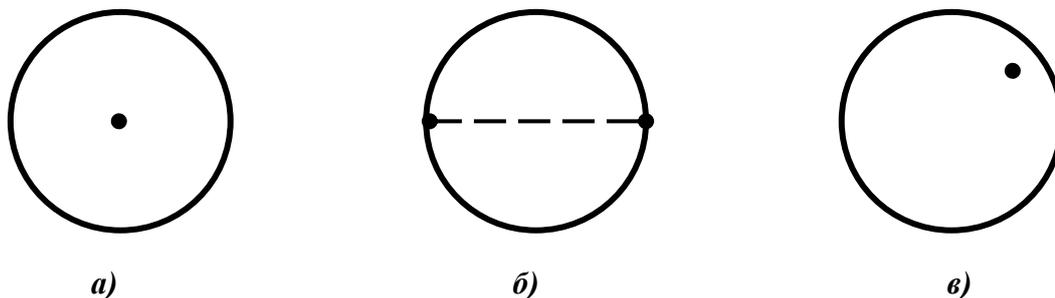


Рисунок 21 - Стереографическая проекция направлений:
а) перпендикулярное; б) в самой плоскости; в) под углом

- Для построения стереографической проекции важны два ее свойства:
- 1) любая окружность, проведенная на сфере, на проекции также изображается окружностью;
 - 2) на стереографической проекции не искажаются угловые соотношения.

Стереографические проекции используются, в основном, для изображения элементов симметрии кристалла (рассмотрим позже), для представления анизотропии физических свойств и изучения пластической деформации и дефектов структуры.

Гномостереографическая проекция

Эта проекция чаще применяется для изображения формы кристалла. При этом проецируется не многогранник, а его полярный комплекс, то есть не грань кристалла, а его нормаль к ней.

Плоскостью гномостереографической проекции служит экваториальная плоскость сферы проекций. *Гномостереографическая проекция* представляет собой совокупность стереографических проекций нормалей к граням кристалла.

Чтобы получить гномостереографическую проекцию плоскости, проводят нормаль к этой плоскости до пересечения со сферой проекции и далее линию, соединяющую полученную точку с точкой зрения S.

Чтобы построить гномостереографические проекции нормалей, пересекающих шар в нижней полусфере, точку зрения переносят в северный полюс N. Проекция граней, расположенных выше плоскости проекции, обозначают O, а ниже – X (или o – верхняя грань, ● – нижняя грань).

Горизонтальные грани проецируются в центре круга проекций, вертикальные – на самом круге, а косые грани – внутри него (рисунок 22).
 Чем круче

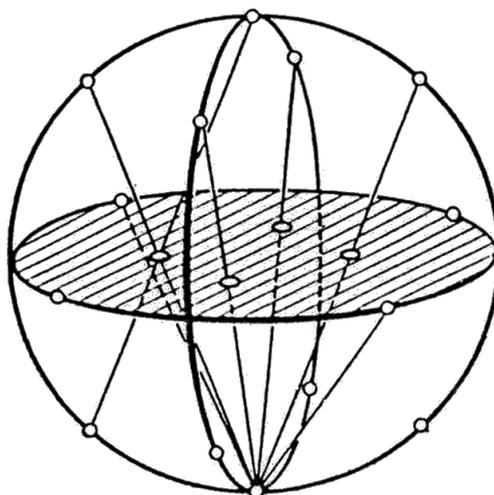


Рисунок 22 - Построение гномостереографической проекции

наклон косо́й грани, тем дальше от центра располагается соответствующая точка. На рисунке 23 приведена гномостереографическая проекция додекаэдра с рисунка 16.

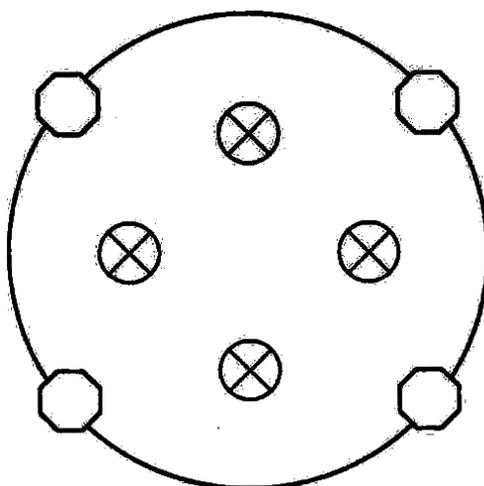


Рисунок 23 - Гномостереографическая проекция додекаэдра

Гномоническая проекция

Этот вид проекций широко применяется в рентгеноструктурном анализе.

Плоскость гномонической проекции параллельна плоскости стереографической и гномостереографической проекции, но она не экваториальная, а касательная к северному полюсу сферы проекций. Нормаль к грани кристалла, проведенная из центра сферы проекций, продолжается до пересечения с плоскостью проекций.

Гномоническая проекция плоскости представляет собой точку, а проекция направления – прямую.

Недостатком гномонической проекции является то, что в ней не

сохраняются угловые соотношения. Большим преимуществом этой проекции является то, что координаты точек прямо пропорциональны индексам Миллера. Докажем это с помощью рисунка 24.

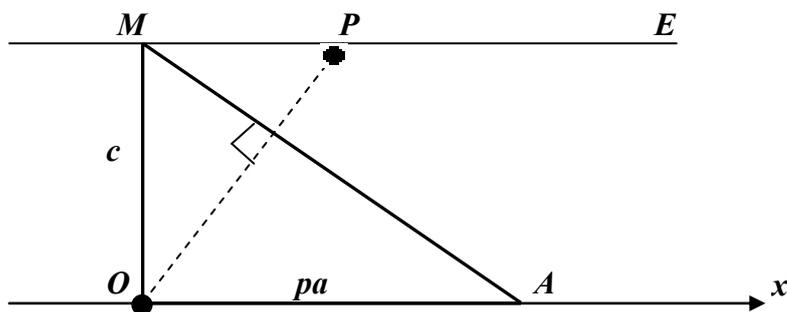


Рисунок 24 - К определению индексов Миллера по гномонической проекции

ME - след плоскости гномонической проекции на плоскости чертежа;
 MA - след грани кристалла, отсекающей на осях координат отрезки ra и c (где p - целое число);

$MP = d$ - расстояние точки p на гномонической проекции от центральной точки проекции M .

Пусть $c \perp a$, то есть $OP \perp MA$ и $MP \parallel OA$. Следовательно,

$\angle OMA = \angle AOP = \angle MPO$, то есть

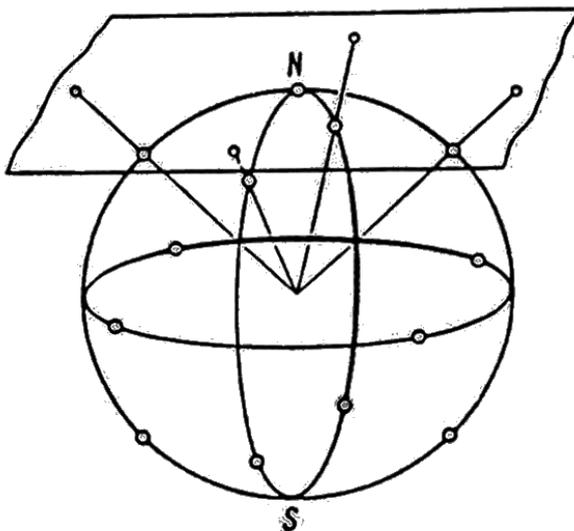
$\triangle MOA \sim \triangle PMO$. Обозначая $OM = c$, имеем:

$d/c = c/ra = hc/a$, где

h - целое число, определяемое соотношением

$1/p : 1/q : 1/r = h : k : l$.

Последнее равенство показывает, что координата точки, изображающей грань кристалла на гномонической проекции, прямо пропорциональна миллеровским индексам этой грани. Это позволяет непосредственно определять символы граней на гномонической проекции. Принцип построения гномонической проекции показан на рисунке 25.



**Рисунок 25 - Построение гномонической проекции
 Соотношения между сферической, стереографической,**

гномостереографической и гномонической проекциями

Принцип построения стереографической и гномостереографической проекций одинаков; различие заключается в том, что стереографическая проекция строится по комплексу граней, а гномостереографическая – по полярному комплексу.

Соотношения между всеми видами проекций сведены в табл. 1 и на рисунке 26.

Таблица 1

Соотношения между различными видами проекций

Тип проекции	Изображение	
	Плоскости	Направления
Сtereoграфическая	Дуга	Точка
Гномостереографическая	Точка	Дуга
Гномоническая	Точка	Прямая

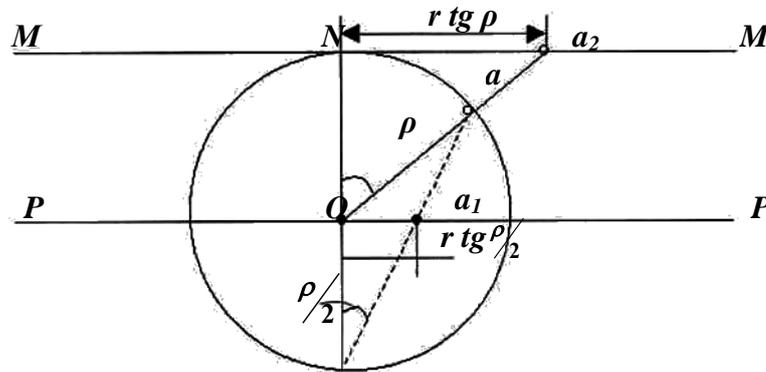


Рисунок 26 - Соотношение между различными видами проекций

Проекция направления Oa на сферической проекции дает точку a , на гномонической проекции (плоскость MM) – точку a_2 , а на стереографической (плоскость PP) – точку a_1 .

Сетка Вульфа

Для решения количественных задач с помощью стереографических и гномостереографических проекций пользуются специальными градусными сетками. Наиболее распространенная – сетка Вульфа.

Сетка Вульфа – это стереографическая проекция всей системы меридианов и параллелей, нанесенных на поверхность сферы (рисунок 27). Плоскостью проекций является плоскость одного из меридианов. Положение любой точки определяется ее сферическими координатами φ и ρ . Сетка чертится на круге $\varnothing 20$ см, линии параллелей и меридианов проводят через 2° . Расстояние между ними на глаз делится еще на четыре части, следовательно, точность до $0,5^\circ$.

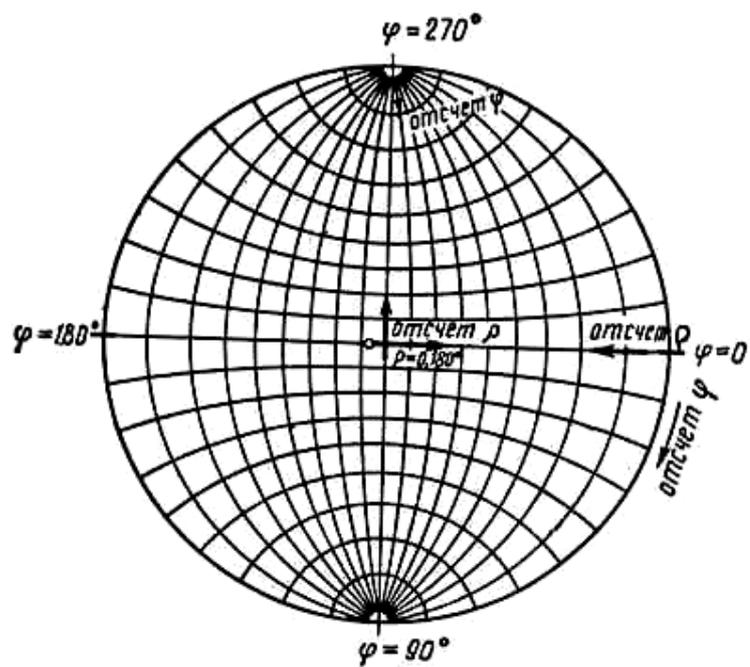


Рисунок 27 – Схема сетки Вульфа и отсчет углов по ней