

## Лекция 2 Фильтры

Для студентов образовательной программы «Электроэнергетика»

Таранов Александр Викторович  
кандидат технических наук,  
Доцент кафедры «Энергетические системы»

## **План лекции:**

- 1.1 Частотный фильтр;
- 1.2 Виды фильтров;
- 1.3 LC-фильтры.

## 1.1 Частотный фильтр

Частотный фильтр — это электрическая цепь, которая эффективно пропускает только одну область частот. Устройство позволяет «игнорировать» лишние частоты. Тем самым выделять и выравнивать сигналы любой формы — квадратные, синусоидальные, треугольные и другие.



Пример диапазона частот усиливаемого сигнала.  
Зависимость коэффициента пропускания по напряжению от частоты сигнала.

Фильтры широко применяют в измерительной, электронно вычислительной и радиотехнике. Яркий пример из схемотехники приемно-передающих устройств — ФНЧ/ ФПЧ в супергетеродинах и приемниках прямого преобразования, которые помогают выделить определенную частоту из диапазона.

Фильтры используют не только в радиостанциях, усилителях и другой профессиональной технике. Их можно встретить в любом приемно-передающем устройстве — например, в смартфоне или роутере. Если говорить о более «прекрасном», то фильтры используют в эквалайзерах для обработки аудиосигналов.



Типичная схема супергетеродина.

## 1.2 Виды фильтров

Чаще всего можно встретить фильтры нижних частот (ФНЧ) и верхних (ФВЧ), а также полосовые и заградительные.

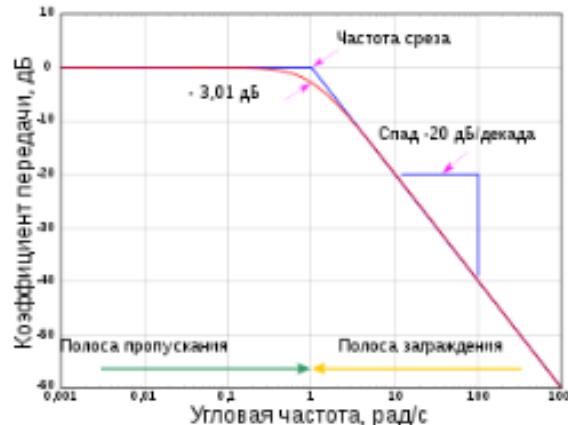
**Фильтр верхних частот** — пропускает частоты выше частоты среза.

**Фильтр нижних частот** — пропускает частоты ниже частоты среза.

**Полосовой фильтр** — пропускает определенную полосу.

**Заградительный фильтр** — не пропускает частоты определенной полосы, но пропускает колебания, выходящие за ее пределы.

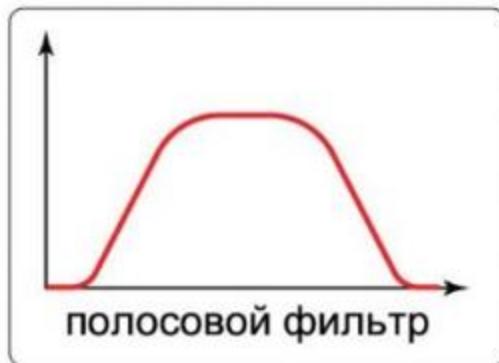
Частота среза — это такая частота, после которой идет фронт (спад) с полосы пропускания на полосу заграждения. Посмотрим, как это выглядит на АЧХ ФНЧ:



Видно, что с увеличением частоты падает коэффициент передачи.

И вот простое правило: чем круче спад, тем круче фильтр.

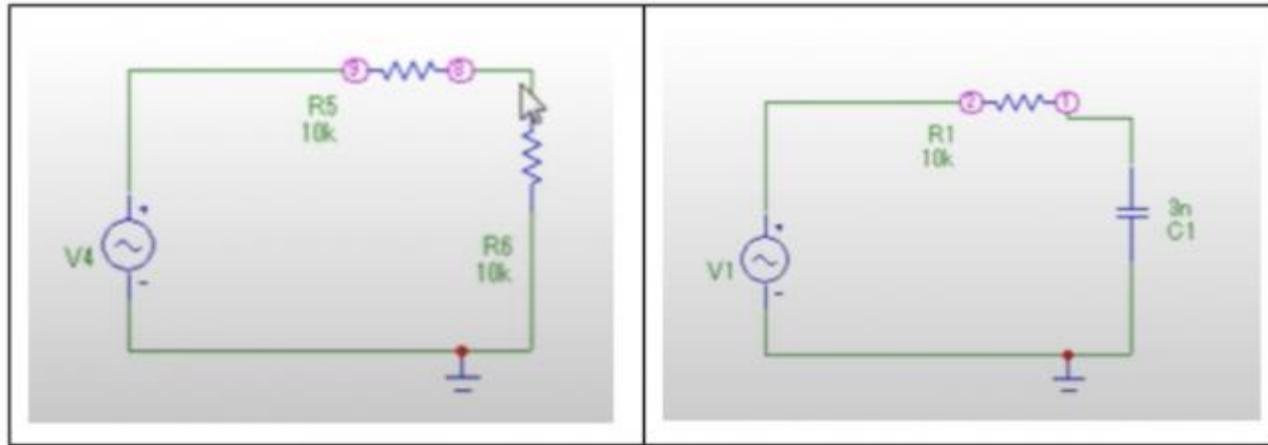
Соответственно, для названных видов фильтров АЧХ будут следующими:



АЧХ для ФНЧ, ФВЧ, полосового и режекторного (заградительного) фильтров.

Резистивный делитель, или из чего состоят фильтры.

На самом деле, схема фильтра напоминает резистивный делитель (делитель напряжения на резисторах). Посмотрите сами:



Слева — резистивный делитель, справа — электрический фильтр.

Разница буквально в одном элементе: вместо резистора стоит конденсатор. Но на АЧХ это влияет очень сильно. При включении делителя АЧХ будет стабильна, то есть частота источника на выходную амплитуду никак влиять не будет. Другая ситуация с фильтром: на определенной частоте появляется явный срез.

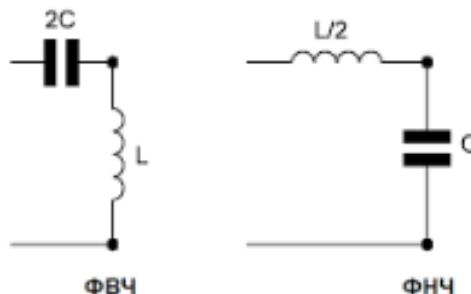
Это связано с тем, что при увеличении частоты тока сопротивление на конденсаторе уменьшается и напряжение падает — по такому принципу работают ФНЧ.

**Запомните правило.** Емкостное сопротивление обратно пропорционально частоте тока и емкости конденсатора — чем больше их величины, тем меньше емкостное сопротивление.

АЧХ можно «отразить», если поменять емкость и резистор местами — превратить ФНЧ в ФВЧ. Но это не все варианты схемотехнического многообразия

## 1.3 LC-фильтры

Вместо резистора можно поставить индуктивность, и тогда вместо привычного ФНЧ (RC-ФНЧ) получим LC-ФНЧ. Суть та же: у него будет своя частота среза и так далее. Но добротность фильтра будет выше — соответственно, область частот, которую пропускает фильтр (она же полоса пропускания), будет меньше, а спад АЧХ — круче. Именно LC-контуры используются в фильтрах для работы с высокочастотным диапазоном.

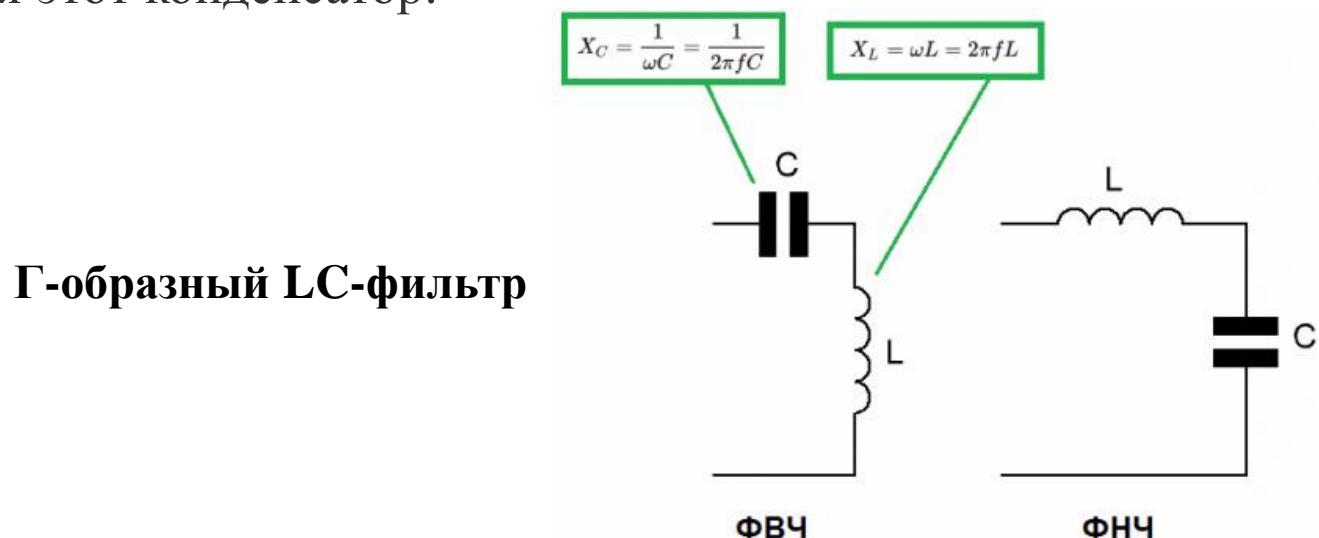


*LC-фильтры.*

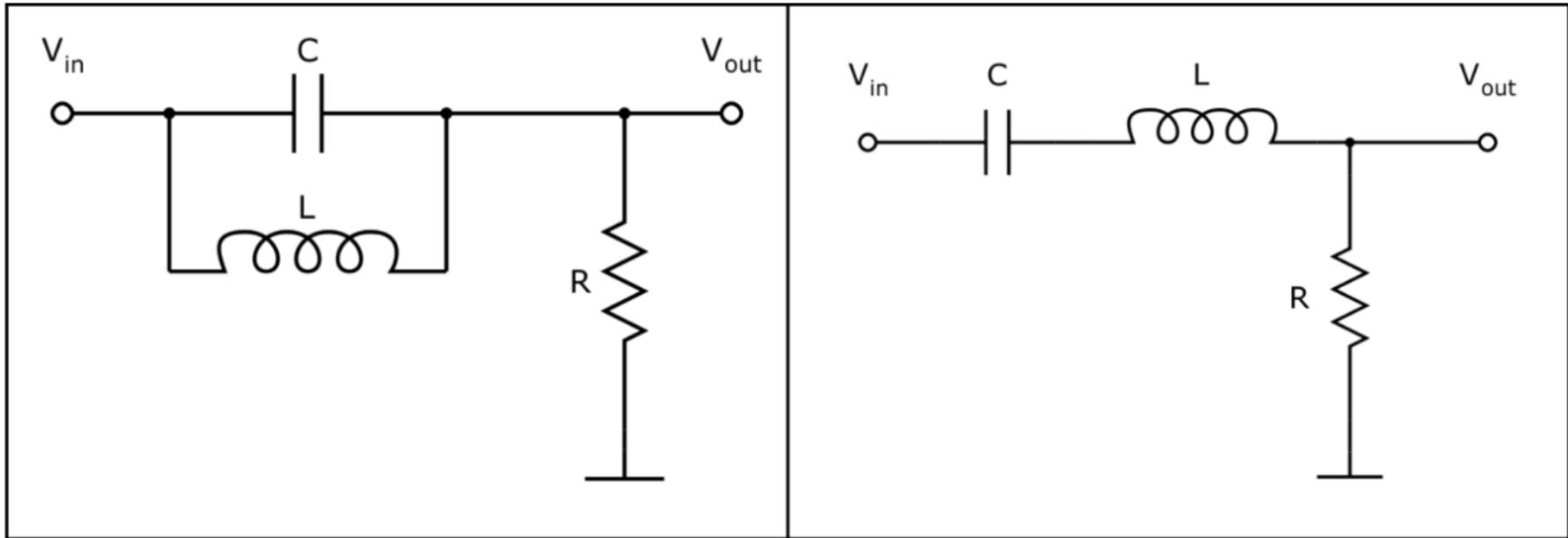
**Принцип построения LC-фильтров основан на свойствах емкостей и индуктивностей по-разному вести себя в цепях переменного тока.**

Индуктивное сопротивление катушки прямо пропорционально частоте тока, проходящего через нее. Следовательно, чем выше частота тока на катушке, тем большее реактивное сопротивление она этому току оказывает — сильнее задерживает переменные токи на более высоких частотах и легче пропускает на более низких.

У конденсатора наоборот: чем выше частота тока, тем легче протекает переменный ток. А чем ниже его частота, тем большим препятствием для тока оказывается этот конденсатор.



Схемы режекторного и полосового фильтров чуть сложней. Режекторный фильтр — это цепь с параллельно соединенными индуктивностью и емкостью, а полосовой — с последовательно соединенными.



Слева — режекторный фильтр, справа — полосовой.

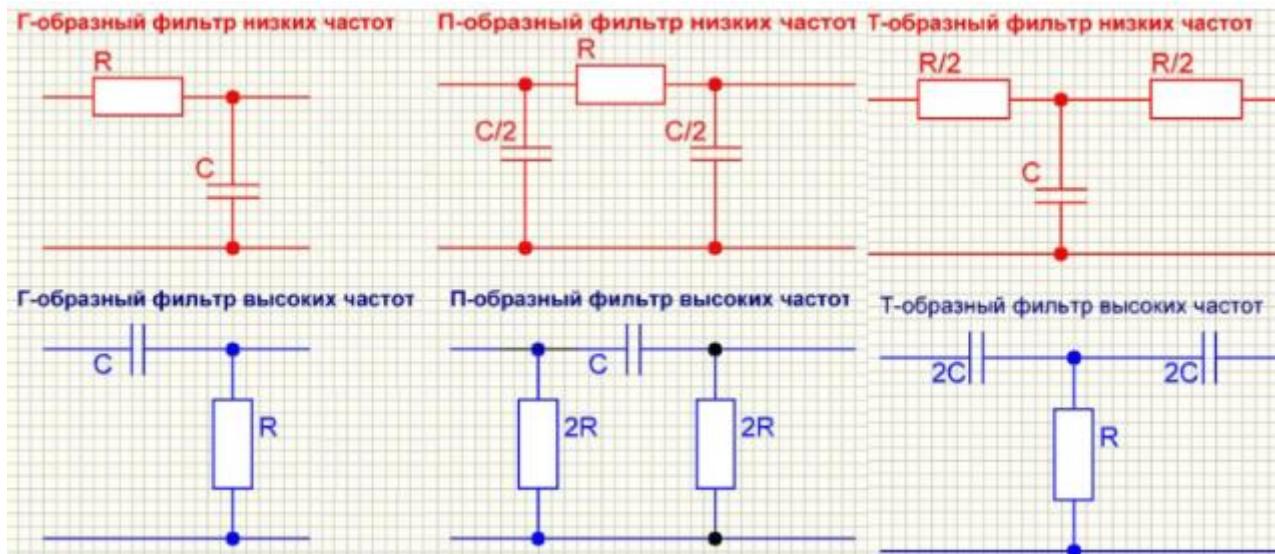
## **План лекции:**

- 1.1 Г-, Т- и П-образные фильтры;
- 1.2 Порядок фильтра;
- 1.3 Расчет фильтров.

## 1.1 Г-, Т- и П-образные фильтры

Схематически ФНЧ и ФВЧ бывают Г-образными, Т-образными и П-образными (многозвенными).

Г-образные — это схемы ФНЧ и ФВЧ, которые мы рассмотрели выше. Их входные сопротивления всегда меньше выходных. Г-образные фильтры часто применяют в качестве трансформаторных сопротивлений. В качестве фильтров обычно используют П- и Т-образные схемы.



Г-, П- и Т-образные RC-фильтры

Тип схемы обычно выбирают из экономических соображений. Например, для сборки LC-ФНЧ лучше использовать П-образную схему, чтобы сэкономить катушки индуктивности, а для LC-ФВЧ — Т-образную.

## Ключевые параметры

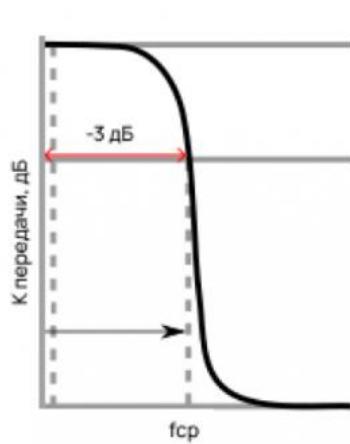
При проектировании частотных фильтров учитывают следующие параметры:

- **наклон АЧХ** — чем круче, тем лучше,
- **частота среза** — выбирается разработчиком,
- **неравномерность АЧХ** — чем меньше, тем лучше,
- **отношение входного и выходного сопротивлений** — особенно важный параметр для ВЧ-фильтров,
- **ослабление в полосе задержания** — оно же ослабление в полосе заграждения, но без учета переходного участка (длительности фронта).

Самый важный параметр — это **частота среза**. С помощью нее мы можем регулировать, какую долю частотного диапазона «пригнорировать», а какую — оставить.

**Частота среза** — это такая частота, на которой ослабление фильтра равно -3 дБ в логарифмическом масштабе (в линейном это 0,707).

Важно отметить, что частота среза для ФНЧ и ФВЧ вычисляется по одному выражению:



$$f_{CP} = \frac{1}{2\pi RC}.$$

$$f_{cp} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

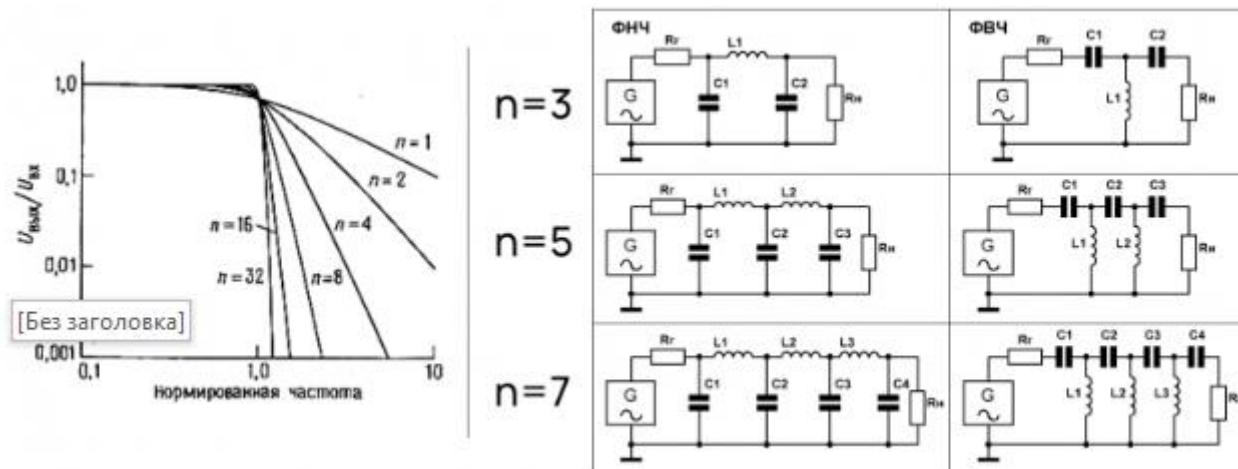
Зная сопротивление/ индуктивность и емкость, можно определить, на какой частоте случится ослабление на -3 дБ. То есть, опираясь на нужную частоту среза, мы можем рассчитать и спроектировать фильтр.

## 1.2 Порядок фильтра

Допустим, вы знаете частоту среза и хотите спроектировать фильтр. Но что такое R, С и L? Обычные номиналы для сопротивления, емкости и индуктивности? Вы можете ответить «да» и будете правы: для ФНЧ и ФВЧ второго порядка (самых обычных Г-образных RC- и LC-фильтров) достаточно подобрать резистор, конденсатор и катушку с нужными параметрами. Но для фильтров больших порядков ответ неоднозначный.

Наклон АЧХ удовлетворяет не всегда: если он сильно пологий, то радиоприемное устройство может поймать лишние частоты. Чтобы избавиться от такого эффекта, разработчики стараются делать фильтры с крутым наклоном АЧХ.

Наклон АЧХ тем круче, чем больше ослабление в полосе задержания и выше порядок фильтра. Последнее указывает на количество L- и C- элементов: в фильтре пятого порядка будет, например, три емкости и две индуктивности.



*Зависимость крутизны наклона АЧХ от количества порядков (n).*

Можно сказать, что каждый LC-элемент — индуктивность или емкость — дает уклонение АЧХ на 12 дБ на октаву, тогда как RC — всего 6 дБ на октаву.

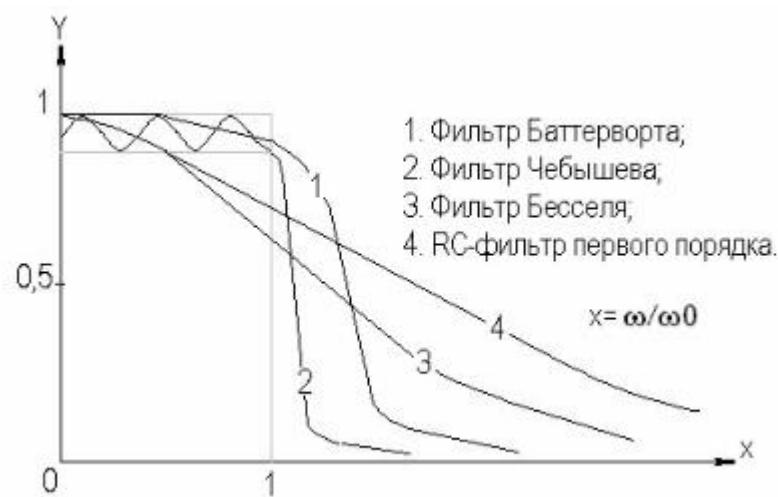
**Октава** — это область частотного диапазона, на которой значение частоты увеличивается в два раза. Иногда в литературе предпочитают измерять в декадах, которые обозначают область с увеличением частоты в десять раз.

## 1.3 Расчет фильтров

**Расчет фильтров** — это отдельная наука, объединяющая теорию электрических цепей, электротехнику и математические методы.

Чтобы рассчитать фильтр большого порядка по заданным условиям, применяют специальные методики. Среди них — формулы на базе полиномов Баттервортса и Чебышева, функций Бесселя.

*Нормированные АЧХ фильтров*



По сути, выбирая конкретную методику, вы выбираете **фильтр**:

**Фильтр Баттерворт** — обладает самой плоской характеристикой затухания в полосе пропускания, за счет этого имеет плавный спад.

**Фильтр Чебышева** — обладает самым крутым спадом, но у него самые неравномерные характеристики в полосе пропускания.

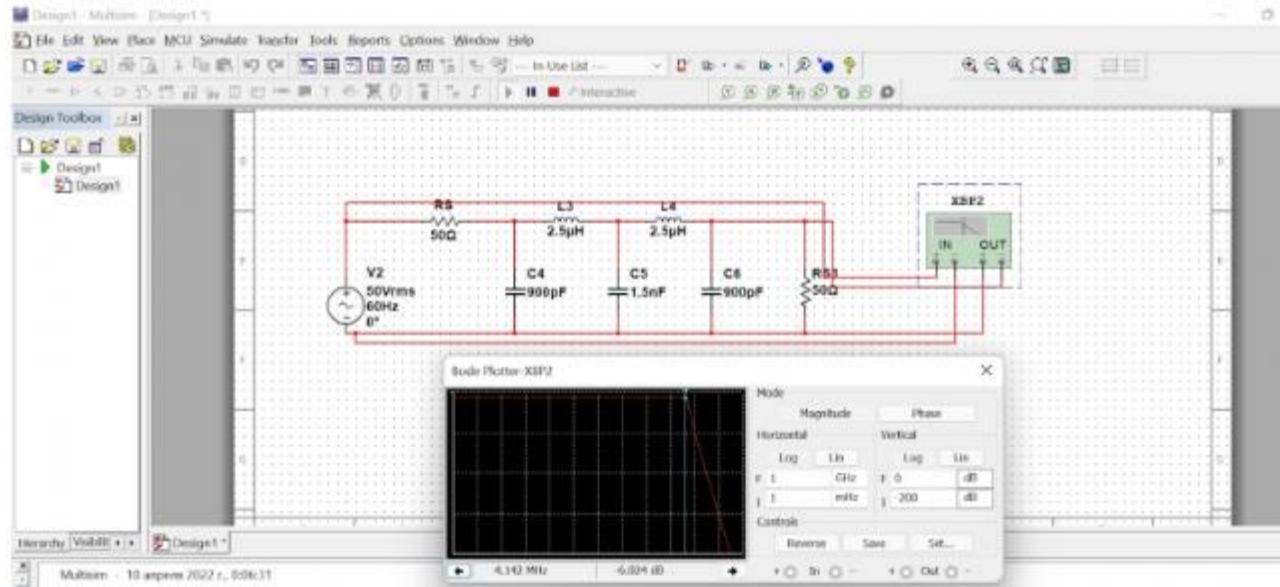
**Фильтр Бесселя** — имеет хорошую фазочастотную характеристику и крутой спад.

Но рассчитать фильтр можно проще, если «схитрить» и использовать онлайн-калькулятор. Так можно узнать, например, номиналы для фильтра Чебышева пятого порядка с частотой среза 4 МГц. Проверим, работает ли он на практике.

### Собираем фильтр Чебышева

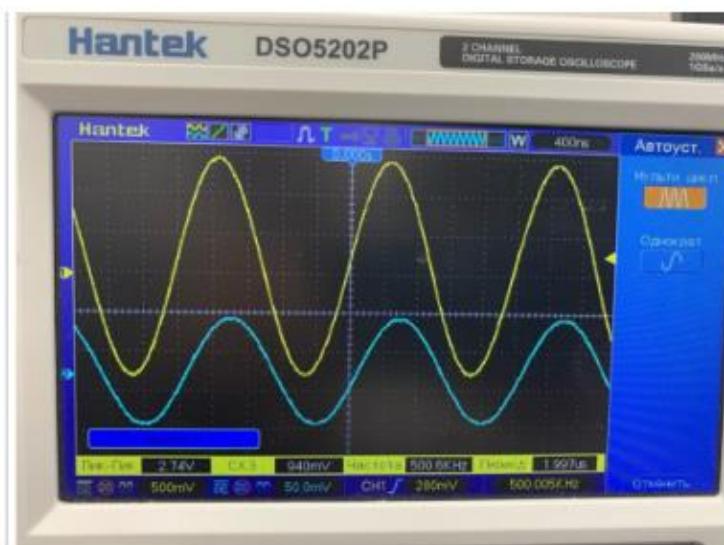
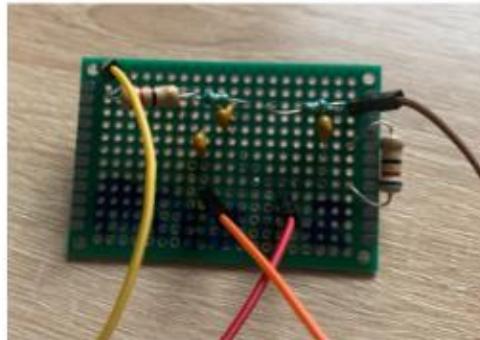
Предварительно я узнал номиналы через онлайн-калькулятор и проверил фильтр в Multisim. Если подключить параллельно Bode Plotter и правильно установить масштабы, программа покажет идеальную АЧХ фильтра Чебышева.

Понадобится генератор гармонических колебаний и осциллограф, подключенный к выходам фильтра. Если у вас есть анализатор цепей, можно использовать его.



Multisim, схема ФНЧ Чебышева пятого порядка.

Схему можно «перенести» на макетную плату.



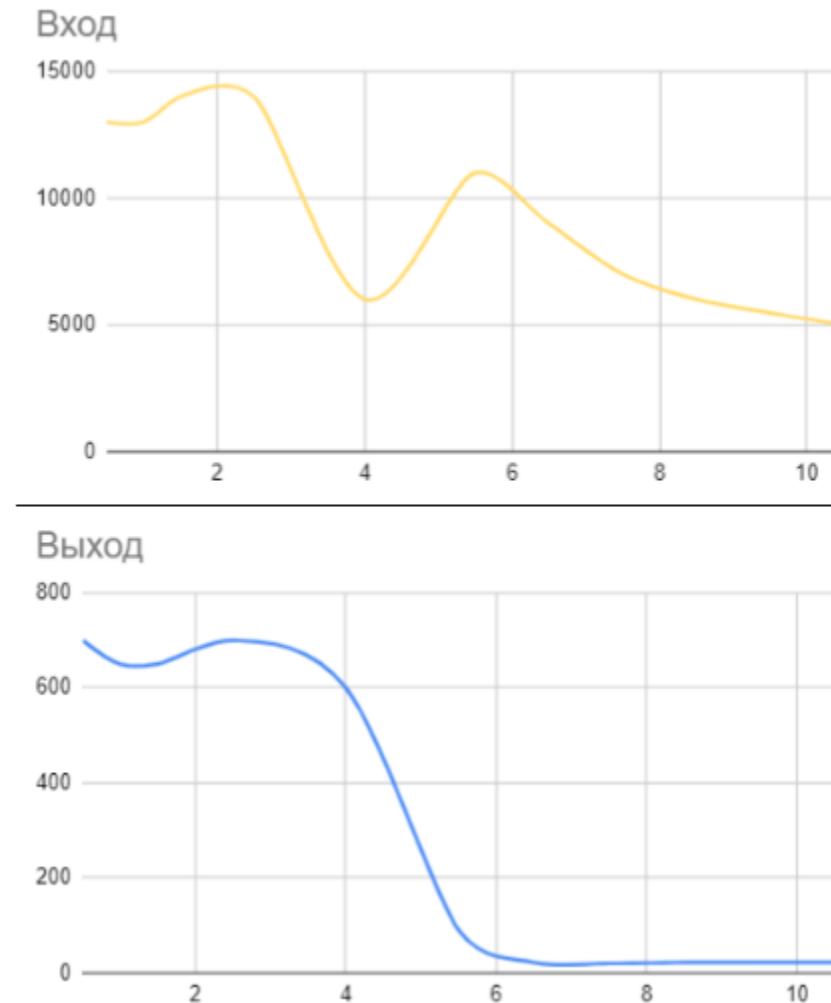
*Синусоида синего цвета — выходной сигнал, желтого — входной.*

**Обратите внимание.** Электрическая схема может отличаться по номиналам от идеальной, которую вы рассчитали под свою частоту среза. Не всегда возможно точно повторить значения емкостей и индуктивностей, потому что элементов с такими номиналами может просто и не быть.

Постепенно увеличивая частоту входного сигнала, можно составить таблицу для построения графика.

Частота, МГц	Вход, мВ	Выход, мВ	Вход, дел	Выход, дел	Вход	Выход
0,5	500	50	26	14	13000	700
1	1000	50	13	13	13000	650
1,5	1000	50	14	13	14000	650
2,5	1000	50	14	14	14000	700
4	500	50	12	12	6000	600
5,5	1000	10	11	9	11000	90
6,5	1000	2	9	11	9000	22
7,5	1000	2	7	10	7000	20
8,5	1000	2	6	11	6000	22
10,5	1000	2	5	11	5000	22

Если отразить значения на системе координат, получится график для фильтра Чебышева.



Готово — у нас получилось добиться вполне крутого спада на частоте 4 МГц, ФНЧ Чебышева работает.

## **План лекции:**

- 1.1 Активный фильтр;
- 1.2 Виды активных фильтров;
- 1.3 Характеристики и параметры активных фильтров.

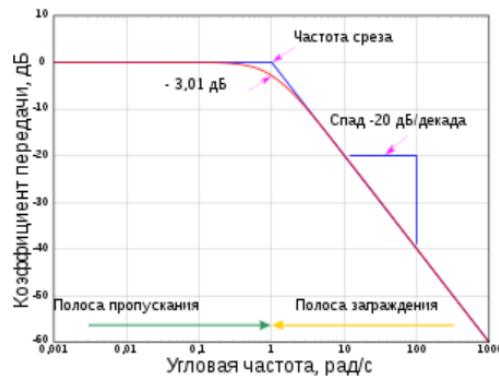
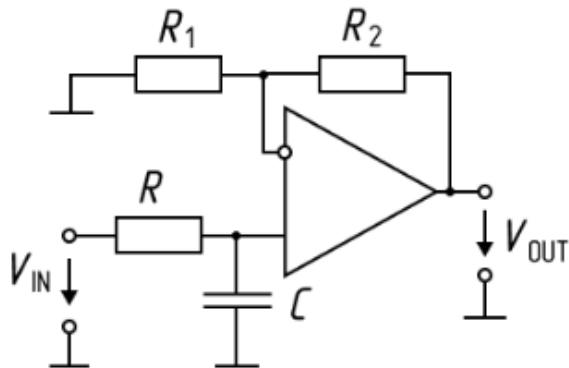
## 1.1 Активный фильтр

Один из способов классификации частотных фильтров — по типу элементов в схемотехнике. Всего принято разделять фильтры на пассивные, активные и электромеханические фильтры. Первые построены на базе катушек индуктивности, резисторов и конденсаторов — в общем, пассивных элементов. Другая ситуация с активными фильтрами.

**Активные фильтры функционируют в том числе на базе активных элементов.** Чаще всего — операционных усилителей, транзисторов, а где-то в прошлом — электронных ламп. Первое используют особенно часто: операционные усилители, как и дискретные транзисторы, обладают высоким уровнем производительности, а также упрощают синтез схемы фильтра. Поэтому далее мы будем говорить именно об активных фильтрах на базе операционных усилителей.

Простой активный фильтр первого порядка можно сделать, добавив конденсатор в неинвертирующую схему включения операционного усилителя.

Если исключить конденсатор из схемы, устройство просто будет усиливать амплитуду подаваемого сигнала. Но если включить конденсатор, на высоких частотах он будет оказывать меньшее сопротивление. В результате ток «не дойдет» до операционного усилителя и на графике АЧХ будет спад — активный ФНЧ заработает!

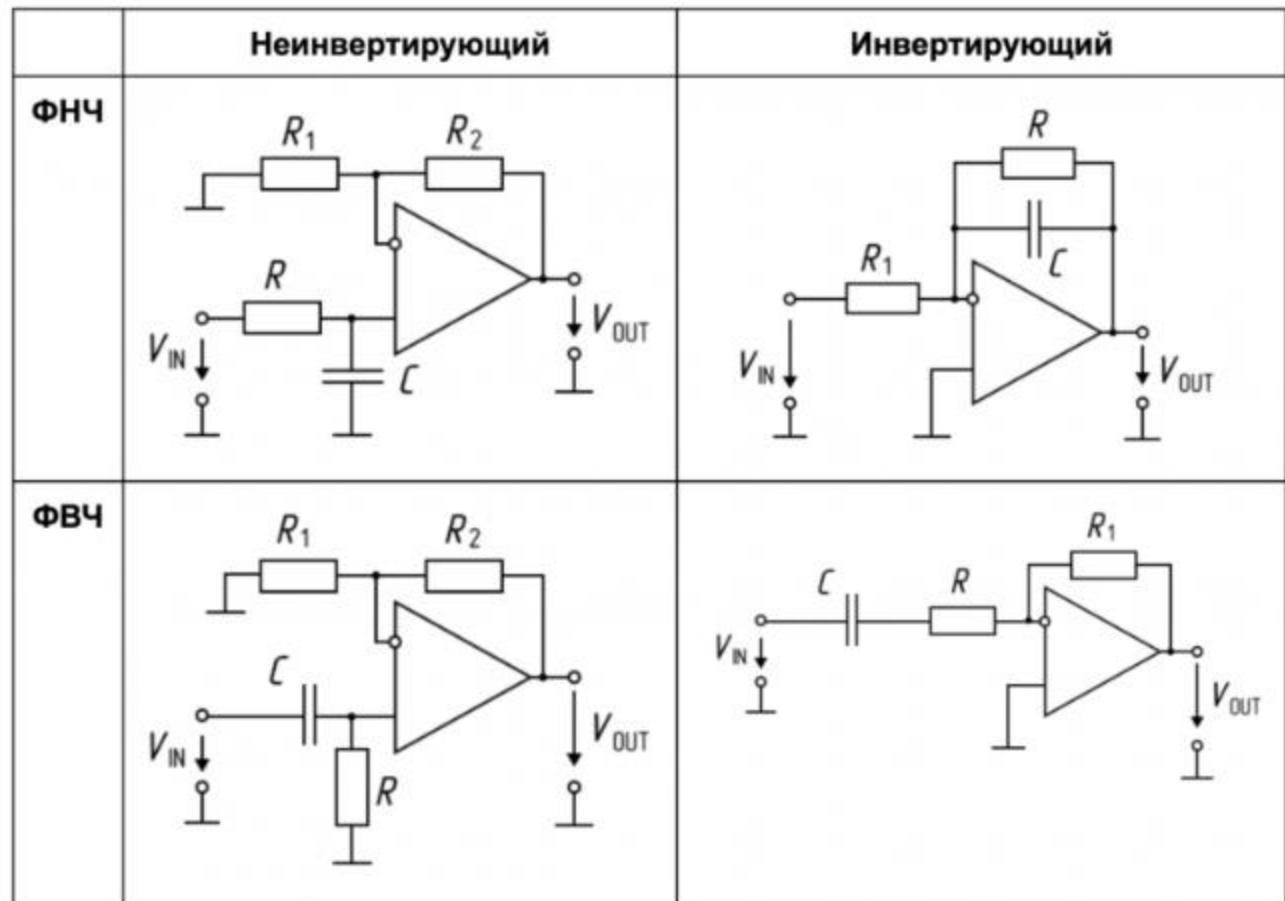


*График отфильтрованного сигнала с помощью ФНЧ.*

## 1.2 Виды активных фильтров

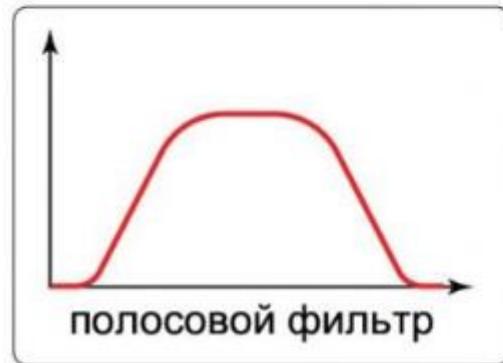
По схеме включения активного компонента фильтры можно разделить на инвертирующие и неинвертирующие. Так можно получить сигнал как в исходной фазе, так и в противофазе, если подключить операционный усилитель «наоборот».

Пример фильтров на разных схемах включения для ФВЧ и ФНЧ.

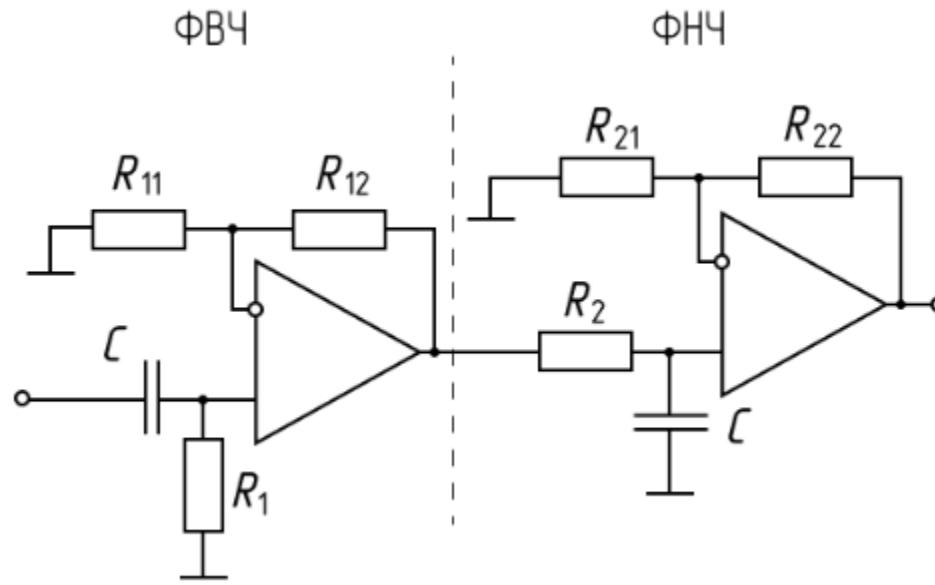


Схемы первого порядка активных фильтров на операционных усилителях. Обратите внимание: принцип деления неинвертирующих активных фильтров на НЧ и ВЧ такой же, как и для пассивных RC: меняешь конденсатор и резистор местами — и готово.

Но активные фильтры, как и пассивные, бывают режекторными и полосовыми. Их схемы чуть сложней.



Например, чтобы добиться эффекта полосового фильтра, когда устройство не подавляет полосу, а пропускает только ее, нужно соединить последовательно ФНЧ и ФВЧ. Но это будет широкополосный вариант устройства. Узкополосные собираются иным образом.



Широкополосная  
реализация  
полосового  
фильтра.

Нельзя сказать, что активные частотные фильтры лучше пассивных или наоборот. Выбор зависит от конкретной задачи.

Например, активные фильтры используют в микроэлектронике, потому что катушки индуктивности в пассивных фильтрах не совместимы с интегральными микросхемами из-за своих габаритов и паразитных свойств. Также активные фильтры существенно проще «масштабировать» до более высоких порядков из-за каскадного включения.

## 1.3 Характеристики и параметры активных фильтров

Активные фильтры обладают идентичным набором характеристик и параметров. Их можно оценивать по наклону АЧХ, итоговой частоте среза, неравномерности АЧХ, отношению входного и выходного сопротивлений и ослаблению в полосе задержаний.

**Фильтры** — устройства на базе минимально-фазовых цепей. Их АЧХ и ФЧХ жестко связаны и напрямую не зависят от того, активный фильтр или пассивный.

Особенно важная характеристика любого фильтра — его порядок, который можно получить каскадным соединением фильтров меньших порядков. Как и в случае с пассивными фильтрами, чем больше порядок  $n$ , тем круче срез. Вы можете проверить это сами, рассчитав передаточную функцию для фильтра Баттервортса вдоль частотного диапазона.

$$H(jw) = \frac{1}{\sqrt{1+w^{2n}}}$$

## **Выбор фильтра по методике**

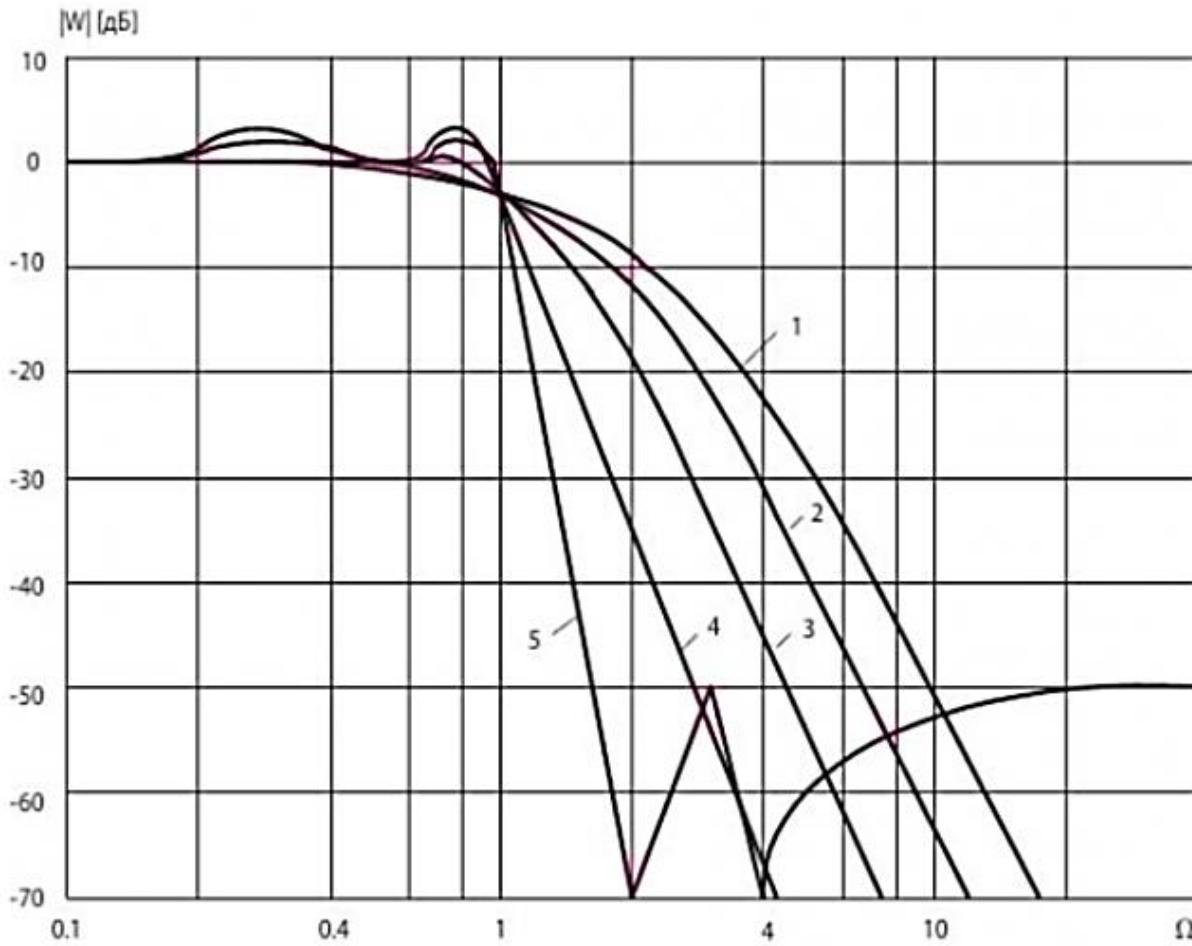
Чтобы рассчитать любой фильтр большого порядка по заданным условиям, применяют специальные методики. Среди них — формулы на базе полиномов Баттервортса и Чебышева, функций Бесселя, Кауэра. И по сути, выбирая конкретную методику, вы выбираете конкретный фильтр.

**Фильтр Баттервортса** — позволяет получить наиболее длинный в полосе пропускания и плавно спадающий за частотой среза «участок» сигнала. Если подать на вход ступенчатый входной сигнал, переходная характеристика будет иметь колебательный характер, который усиливается при увеличении порядка.

**Фильтр Чебышева** — АЧХ спадает более круто за частотой среза. Однако в полосе пропускания она не монотонна, а имеет волнообразный характер с постоянной амплитудой. Колебания переходного процесса при ступенчатом входном воздействии сильнее, чем у фильтра Баттервортса.

**Эллиптический фильтр (фильтр Кауэра)** — АЧХ выражена равномерными флюктуациями как в полосе пропускания, так и в полосе заграждения. Спад АЧХ этого фильтра наиболее крутой по сравнению с фильтрами других типов. Передаточная функция ФНЧ имеет нули в числителе.

**Фильтр Бесселя** — обладает хорошей переходной характеристикой и крутым спадом. Причина — пропорциональность фазового сдвига выходного сигнала частоте входного сигнала.

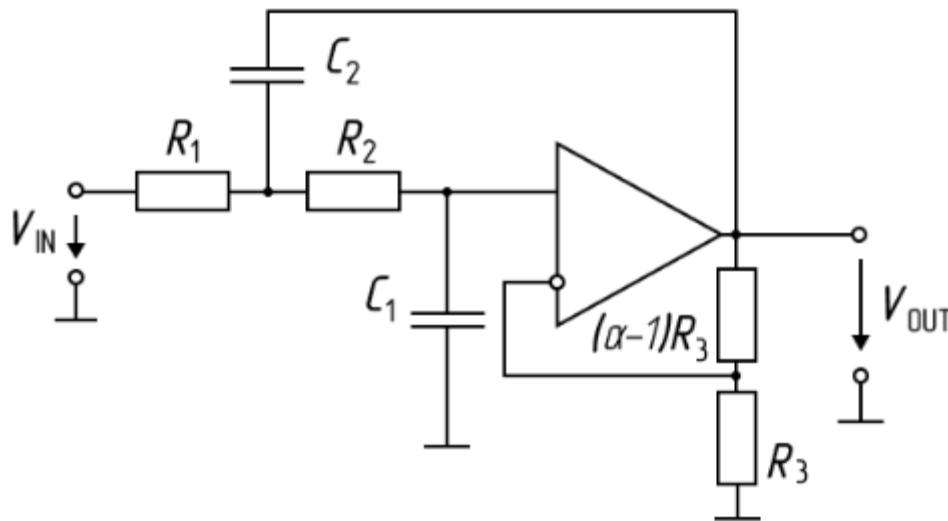


Примеры АЧХ ФНЧ четвертого порядка. 1 — фильтр критического затухания, 2 — фильтр Бесселя, 3 — фильтр Баттервортса, 4 — фильтр Чебышева с неравномерностью 3дБ, 5 — эллиптический фильтр с неравномерностью в полосе пропускания 2дБ и максимумом пульсаций в полосе подавления — 50 дБ.

Попробуем синтезировать и собрать активный ФНЧ Баттервортса второго порядка. Это наиболее равномерный в полосе пропускания фильтр, хоть и не лучший по крутизне среза.

### Синтез фильтра Баттервортса по топологии Саллена-Ки

В нашей задаче не нужно, чтобы активный фильтр усиливал сигналы. Поэтому рассчитаем его по топологии Саллена-Ки, которая позволяет учитывать коэффициент усиления.



Активный ФНЧ  
второго порядка  
по топологии  
Саллена-Ки.

Коэффициент усиления  $\alpha$  равен единице (сигнал не усиливается) и обеспечивается отрицательной обратной связью, которая сформирована с помощью делителя напряжения  $[(\alpha-1)R_3, R_3]$ .

Положительная обратная связь обусловлена наличием конденсатора С2. В результате передаточная функция принимает вид:

$$W(S) = \frac{\alpha}{1 + \omega_c [C_1(R_1 + R_2) + (1 - \alpha)R_1 C_2]S + \omega_c^2 R_1 R_2 C_1 C_2 S^2} = |a = 1| = \frac{1}{1 + \omega_c C_1 (R_1 + R_2)S + \omega_c^2 R_1 R_2 C_1 C_2 S^2}$$

Перед расчетом номиналов элементов нужно выбрать значение хотя бы для одной емкости. Например, можно принять  $C_1 = 100$  пФ. Тогда можно найти сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ , а также емкость  $C_2$ .

Чтобы значения  $R_1$  и  $R_2$  были действительными, должно выполняться следующее условие:

$$\frac{C_2}{C_1} \geq \frac{4b}{a_1^2}$$

$a$  и  $b$  — коэффициенты полинома передаточной функции.

После определения коэффициентов можно рассчитать емкость  $C_2$  и сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ . В качестве  $f_C$  принимаем частоту среза, на которой фильтр должен «обрубать» сигнал. Пусть это будет 4 МГц.

$$C_2 = C_1 * \frac{4b}{a_1^2} = 200 \text{ пФ}$$

$$R_1 = R_2 = a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4b_1 C_1 C_2} / 4\pi f_c C_1 \approx 200 \text{ Ом}$$

## **План лекции:**

- 1.1 Основные определения электрических фильтров;
- 1.2 Условие прозрачности электрического фильтра;
- 1.3 Виды фильтров.

## **1.1 Основные определения электрических фильтров**

**Электрический фильтр** – это устройство способное разделять электрические колебания различных частот.

### **Электрические фильтры:**

- Аналоговые
- Цифровые

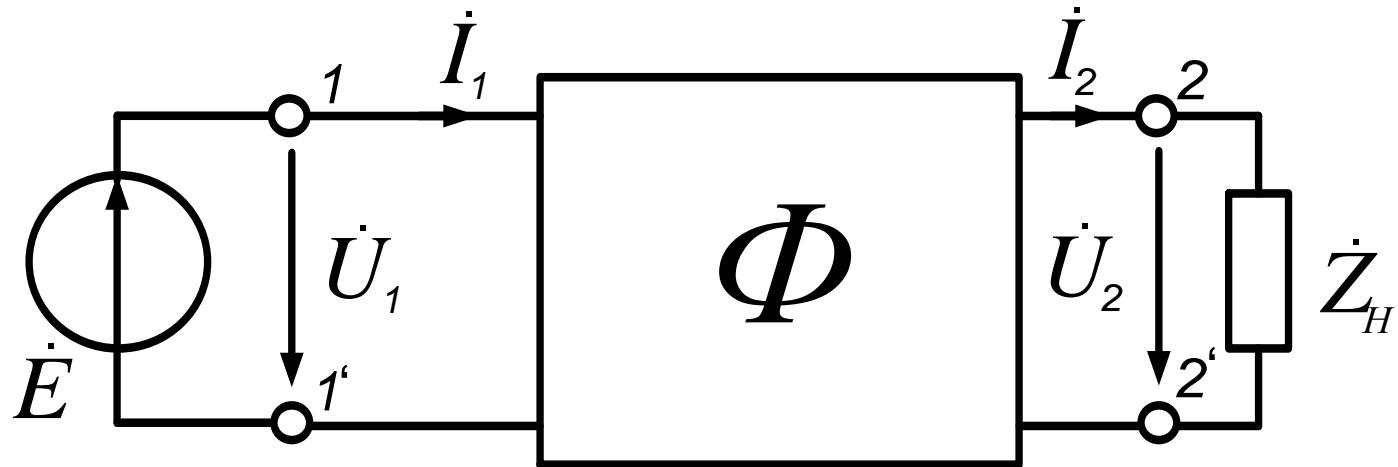
### **Аналоговые фильтры:**

- Активные
- Пассивные

Основная задача пассивных электрических фильтров - разделять электрические колебания т.е. пропускать колебания одной полосы (полоса пропускания) и задерживать другую полосу частот (полоса задержания).

При этом от источника к нагрузке попадают только те колебания, которые пропускает фильтр .

**Фильтры включают между источником и нагрузкой.**



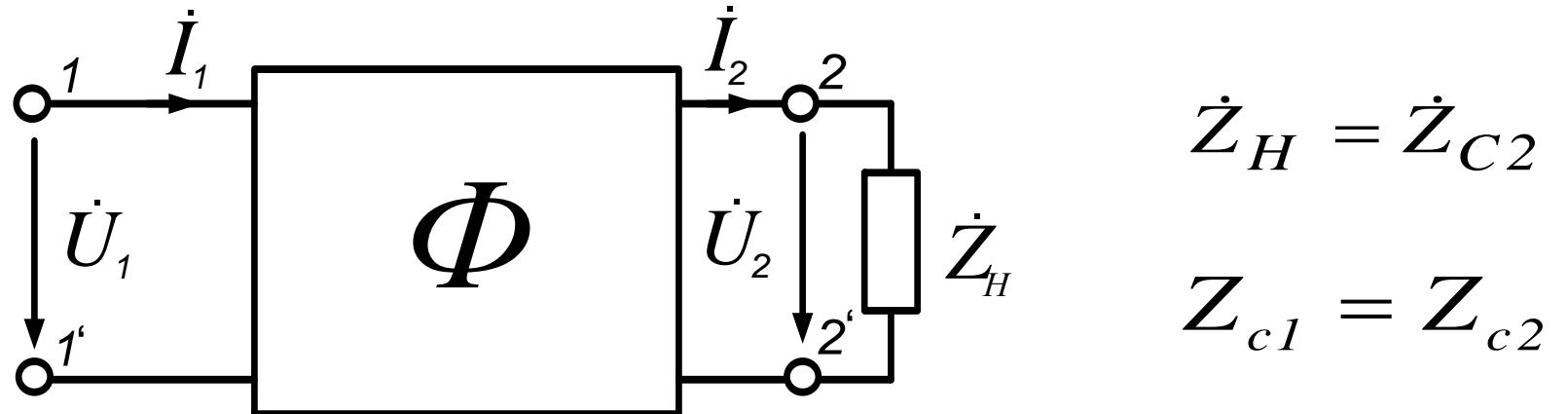
Основная характеристика фильтра - коэффициент распространения

$$\gamma = \alpha + j\beta = -\ln K_U$$

$\alpha = -\ln K_U(\omega)$  - коэффициент затухания

$\beta = -\varphi(\omega)$  - коэффициент фазы

Рассмотрим пассивный электрический фильтр как симметричный четырехполюсник, нагруженный на выходное характеристическое сопротивление:



В таком случае фильтром называется пассивный четырехполюсник, который:

1. Колебания в определенной полосе частот пропускает с небольшим затуханием (**полоса пропускания или полоса прозрачности**);
2. Колебания, частоты которых лежат вне этой полосы пропускает с большим затуханием (**полоса затухания**).

**Полоса пропускания (ПП) фильтра** – это область частот в которой амплитуда колебаний на выходе фильтра не меньше амплитуды колебаний на входе

$$\dot{K}_U(\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = e^{-\gamma} \quad K_U(\omega) = \frac{U_2}{U_1} \geq 1 \quad - \text{АЧХ}$$

В полосе пропускания  $U_1 = U_2; \quad I_1 = I_2;$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_1}{I_2} = e^\alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

**Полоса задержания (ПЗ) фильтра** – это область частот в которой амплитуда колебаний на выходе фильтра меньше амплитуды колебаний на входе

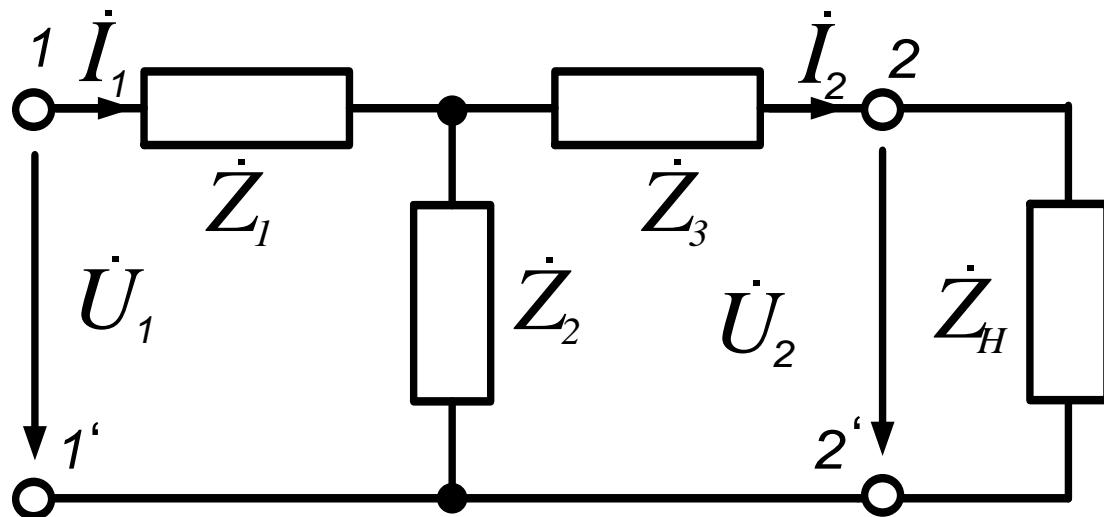
$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = e^\gamma, \quad K_U(\omega) = \frac{U_2}{U_1} \langle 1 - ACH \rangle$$

В полосе задержания  $I_2 = 0; \quad U_2 = 0;$

$$\frac{U_1}{0} = \frac{I_1}{0} = e^\alpha \rightarrow \infty \Rightarrow \boxed{\alpha = \infty}$$

## 1.2 Условие прозрачности электрического фильтра

Рассмотрим фильтр как симметричный Т-образный четырехполюсник



$$A_{11} = ch\gamma = \\ = ch(\alpha + j\beta).$$

В полосе пропускания:

$$\alpha = 0, \Rightarrow \gamma = j\beta \Rightarrow chj\beta = \cos\beta$$

$$\Rightarrow -1 \leq A_{11} \leq 1$$

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2}, \quad \frac{Z_1}{4Z_2} = 1 \Rightarrow Z_1 = 4Z_2.$$

**В полосе  
пропускания:**

$$\alpha = 0,$$

$$\beta = 0 \pm \pi,$$

**В полосе затухания:**

$$\alpha = arcch \left[ 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \right].$$

$$\beta = arccos \left[ 1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right].$$

**Характеристическое сопротивление:**

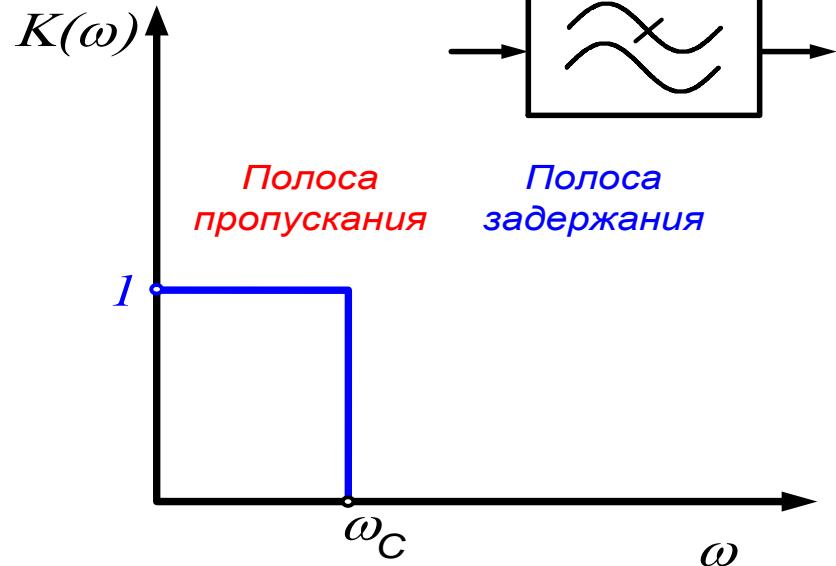
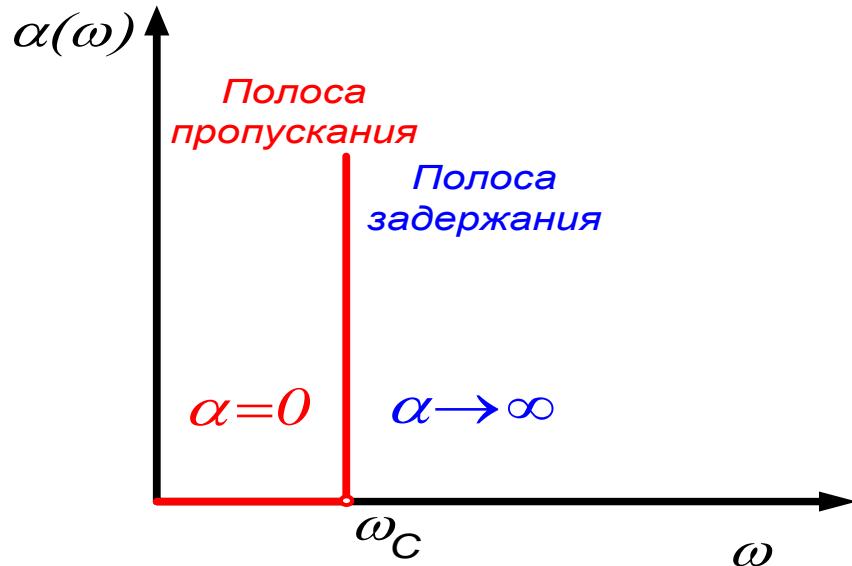
$$Z_c = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} = \sqrt{Z_1 Z_2 \left[ 1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \right]}.$$

## 1.3 Виды фильтров

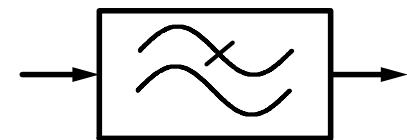
Различают пять видов фильтров по пропускаемым частотам:

1. Фильтр нижних частот;
2. Фильтр верхних частот;
3. Полосовой фильтр;
4. Заграждающий фильтр;
5. Режекторный (гребенчатый) фильтр.

1. Фильтры нижних частот (низкочастотные фильтры)

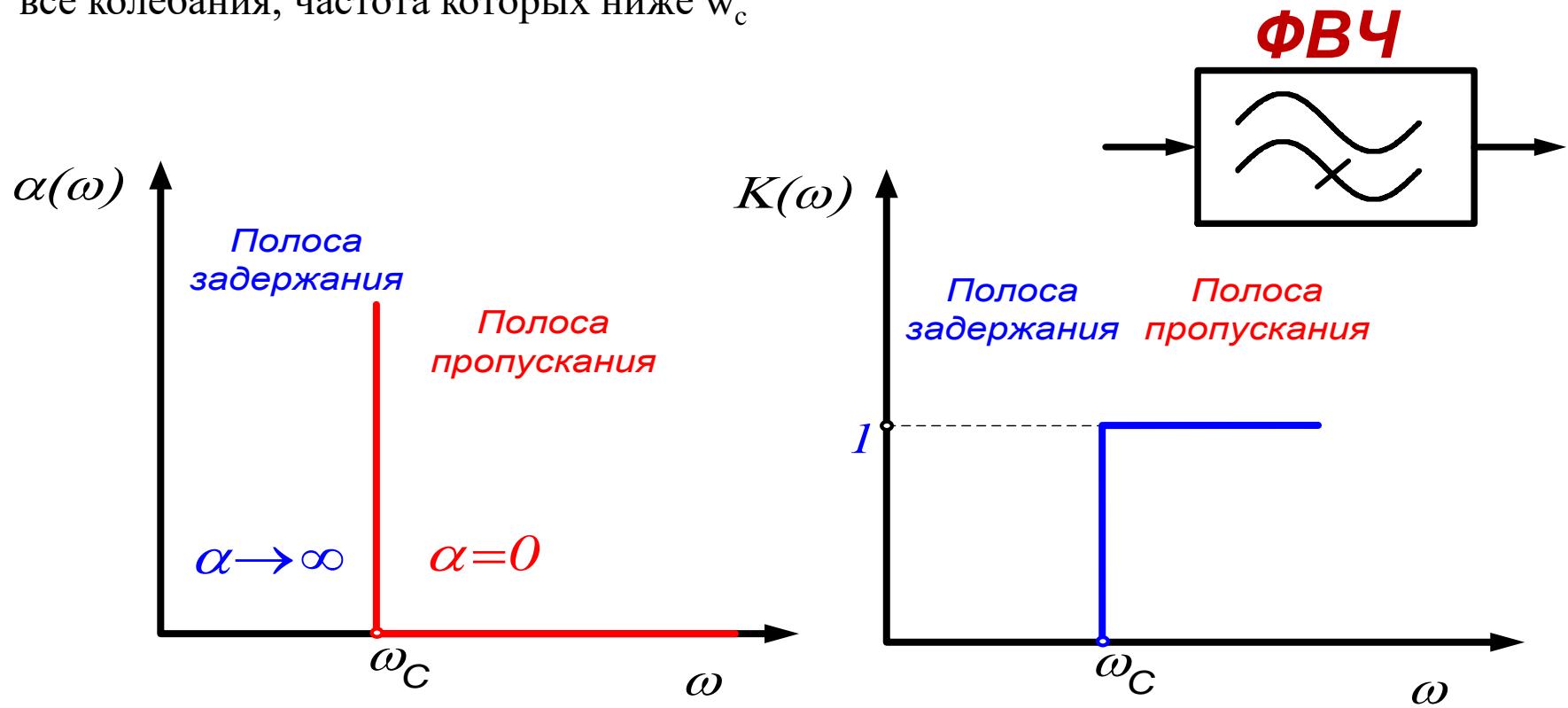


**ФНЧ**



## 2. Фильтры верхних частот (высокочастотные фильтры)

Пропускают колебания с частотами от  $w_c$  до бесконечности и задерживают все колебания, частота которых ниже  $w_c$

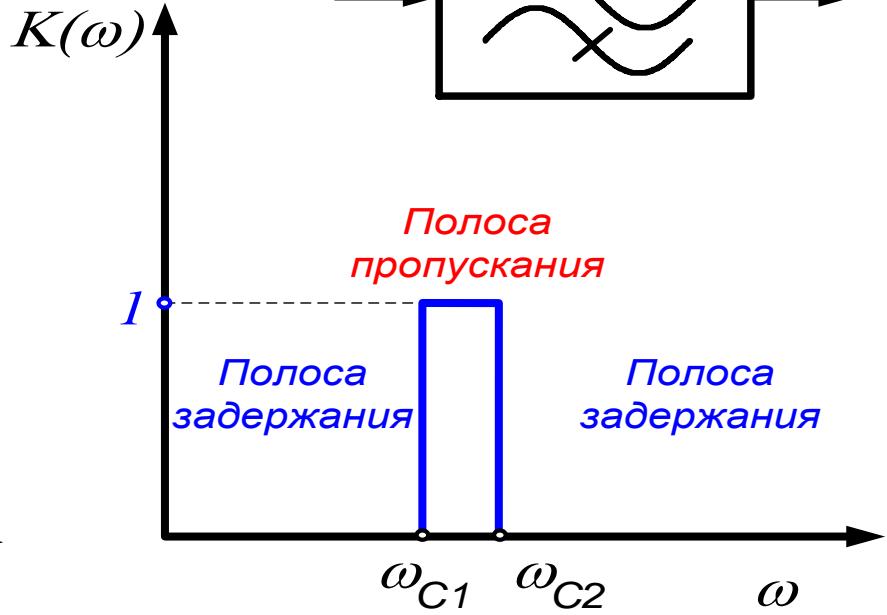
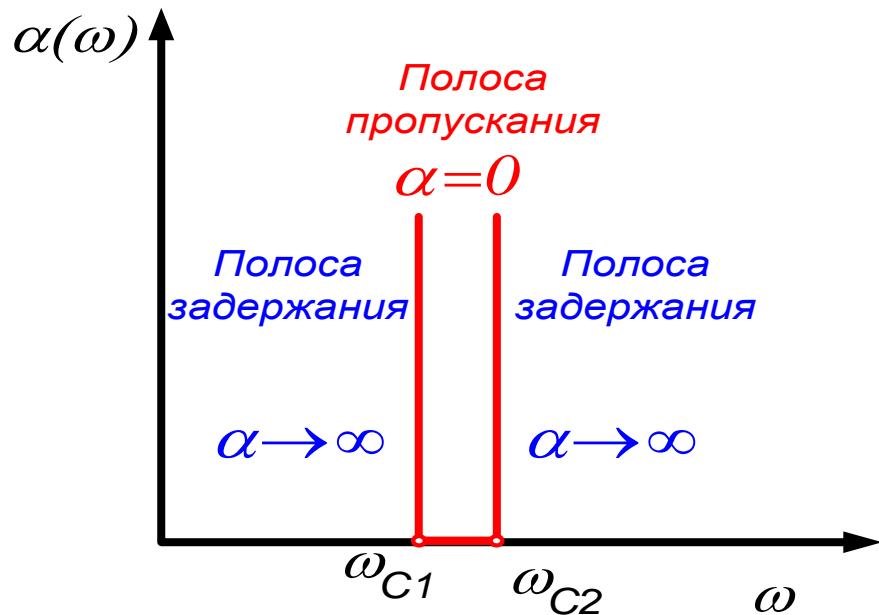


Простейший электронный фильтр верхних частот состоит из последовательно соединённых конденсатора и резистора. Конденсатор пропускает лишь переменный ток, его реактивное сопротивление понижается с увеличением частоты, поэтому при стремлении частоты входного гармонического сигнала к бесконечности коэффициент передачи такого фильтра стремится к 1.

### 3. Полосовые фильтры

Пропускают колебания с частотами от  $\omega_{c1}$  до  $\omega_{c2}$  и задерживают все колебания, частота которых вне этого диапазона

**ПФ**

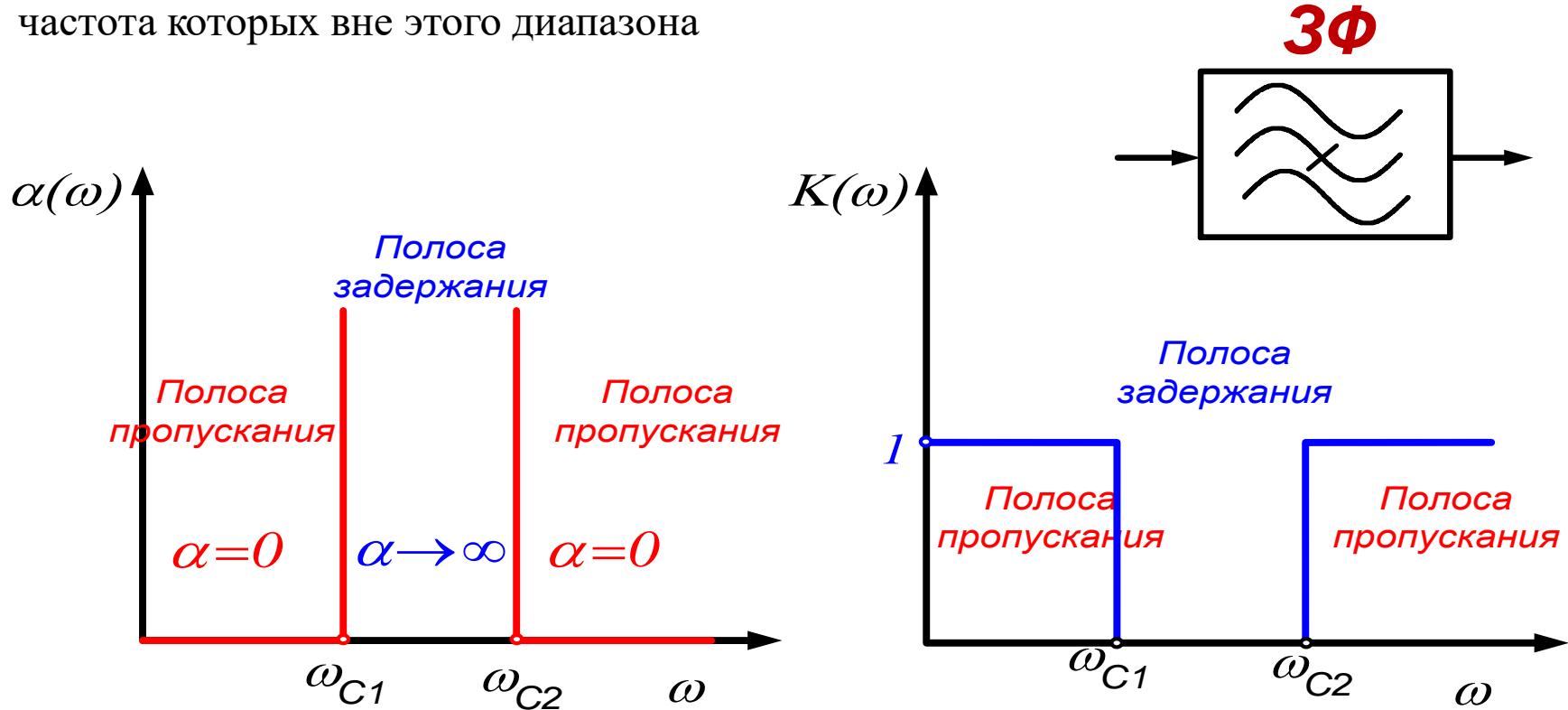


Полосовой фильтр — линейная система и может быть представлен в виде последовательно включённых фильтра верхних частот и фильтра нижних частот.

Примером простейшего такого фильтра может служить колебательный контур (цепь из последовательно соединенных резистора, конденсатора и индуктивности).

#### 4. Заграждающие фильтры

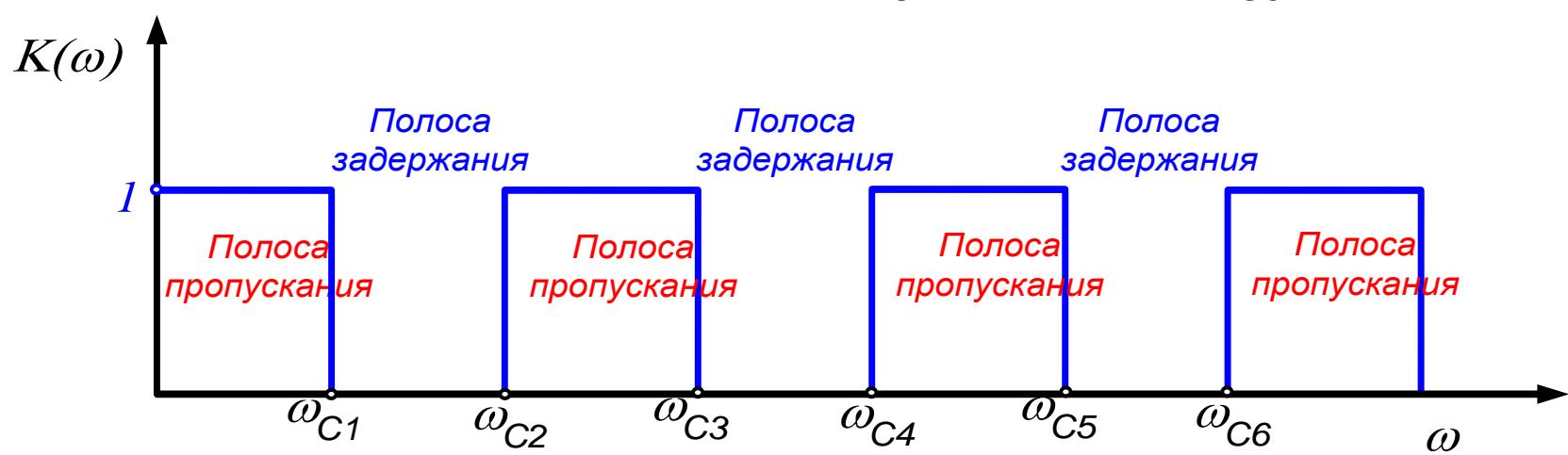
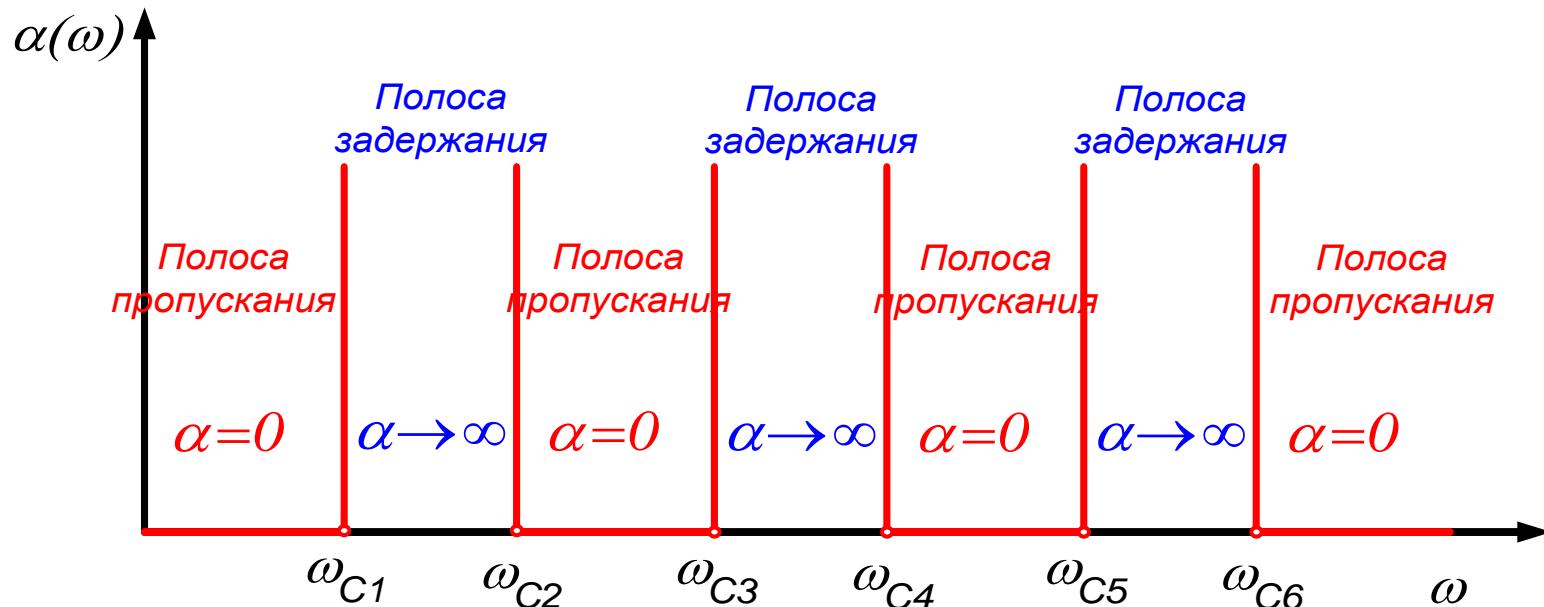
Задерживают колебания с частотами от  $\omega_{c1}$  до  $\omega_{c2}$  и пропускают все колебания, частота которых вне этого диапазона



Заграждающий или режекторный фильтр не пропускает колебания некоторой определённой полосы частот и пропускает колебания с частотами, выходящими за пределы этой полосы. Заграждающий фильтр предназначен, главным образом, для подавления внутриполосных помех, вызванными интерференцией соседних частот. Это его свойство часто используется для проведения проверки влияния соседних или побочных сигналов и джиттера.

## 5. Режекторные (гребенчатые) фильтры

Задерживают колебания с частотами от  $\omega_{ci}$  до  $\omega_{cj}$  и пропускают все колебания, частота которых вне этих диапазонов



## **План лекции:**

- 1.1 Расчетные параметры фильтров типа k;
- 1.2 Расчет АЧХ фильтра;
- 1.3 Особенности расчета АЧХ фильтров, выполненных по «Т» или «Π» схеме.

## **1.1 Расчетные параметры фильтров типа k**

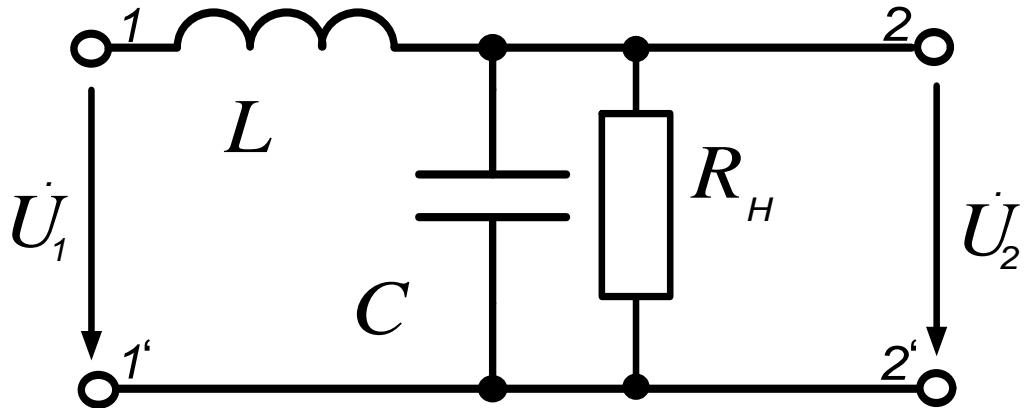
Фильтры типа к - это реактивные фильтры, у которых произведение комплексных сопротивлений продольной и поперечной ветвей не зависит от частоты и равно квадрату некоторого вещественного числа к

### **Исходные данные для расчета:**

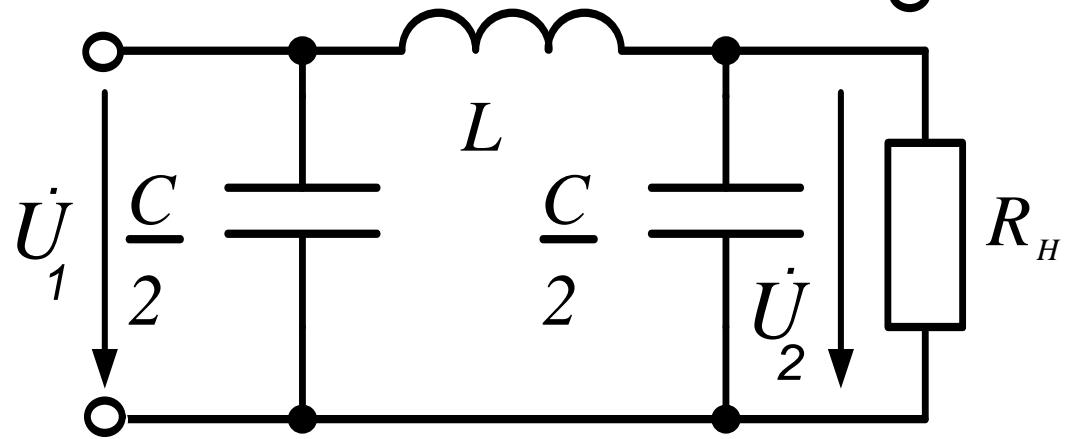
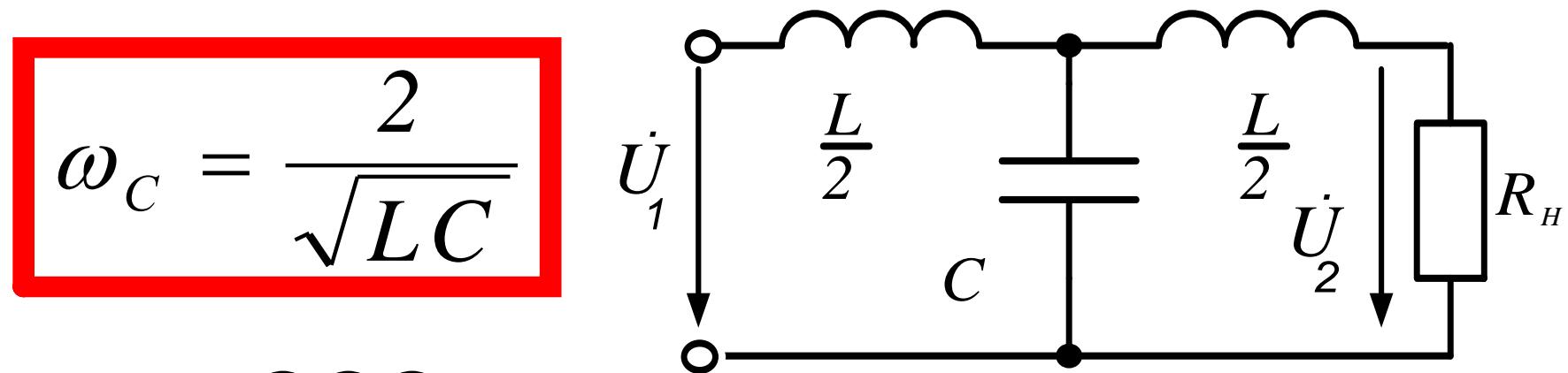
1. Диапазон частот фильтра;
2. Тип схемы фильтра;
3. Сопротивление нагрузки;
4. Требования к качеству АЧХ.

### **Основные этапы расчета:**

1. Расчет первичных параметров фильтра ( $L$ ,  $C$ );
2. Определение зависимости характеристического сопротивления фильтра от частоты;
3. Расчет АЧХ фильтра;
4. Расчет ЛЧХ фильтра.



**ФНЧ «К» тина**



## Расчет первичных параметров ФНЧ

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} = R_H \quad \text{- условие согласования ФНЧ с нагрузкой}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{L} = \sqrt{C} R_H \\ \omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}} \end{array} \right. \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{2}{\sqrt{C} \sqrt{C} R_H} = \frac{2}{CR_H}$$
$$\omega_c = \frac{2 R_H}{\sqrt{L} \sqrt{L}} = \frac{2 R_H}{L}$$

$$L = \frac{2 R_H}{\omega_c};$$

$$C = \frac{2}{R_H \omega_c}$$

**Определение зависимости характеристического сопротивления фильтра от частоты:**

$$Z_{C_T}(\omega) = \sqrt{Z_1(\omega) \cdot Z_2(\omega) \cdot \left( 1 + \frac{Z_1(\omega)}{4 \cdot Z_2(\omega)} \right)}$$

- характеристическое сопротивление фильтра по «Т» схеме

$$Z_{C_\Pi}(\omega) = \sqrt{Z_1(\omega) \cdot Z_2(\omega) \cdot \left( 1 + \frac{Z_1(\omega)}{4 \cdot Z_2(\omega)} \right)^{-1}}$$

- характеристическое сопротивление фильтра по «П» схеме

## 1.2 Расчет АЧХ фильтра

Расчёт амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) фильтра обычно проводится по следующему шаговому алгоритму:

### 1. Определить передаточную функцию фильтра

Для аналогового фильтра:  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$

$$\dot{K}_U(\omega) = \frac{\dot{U}_2(\omega)}{\dot{U}_1(\omega)}$$

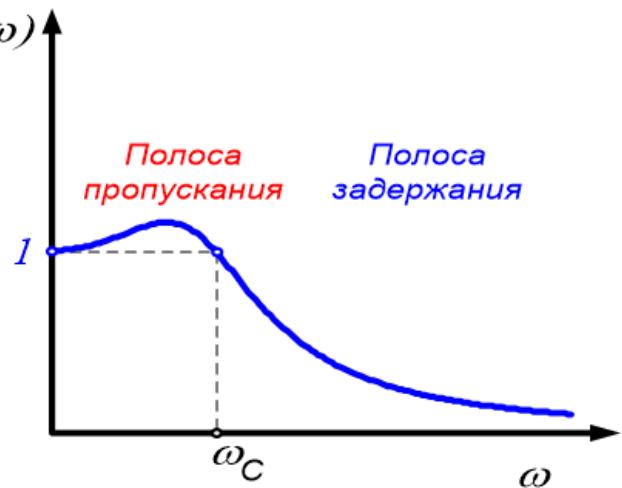
Для цифрового фильтра:  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

где  $s = j\omega$  — для аналогового фильтра,  $z = e^{j\omega}$  — для цифрового.

### 2. Подставить частотную переменную $K(\omega)$

Для аналогового:  $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$

Для цифрового:  $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$



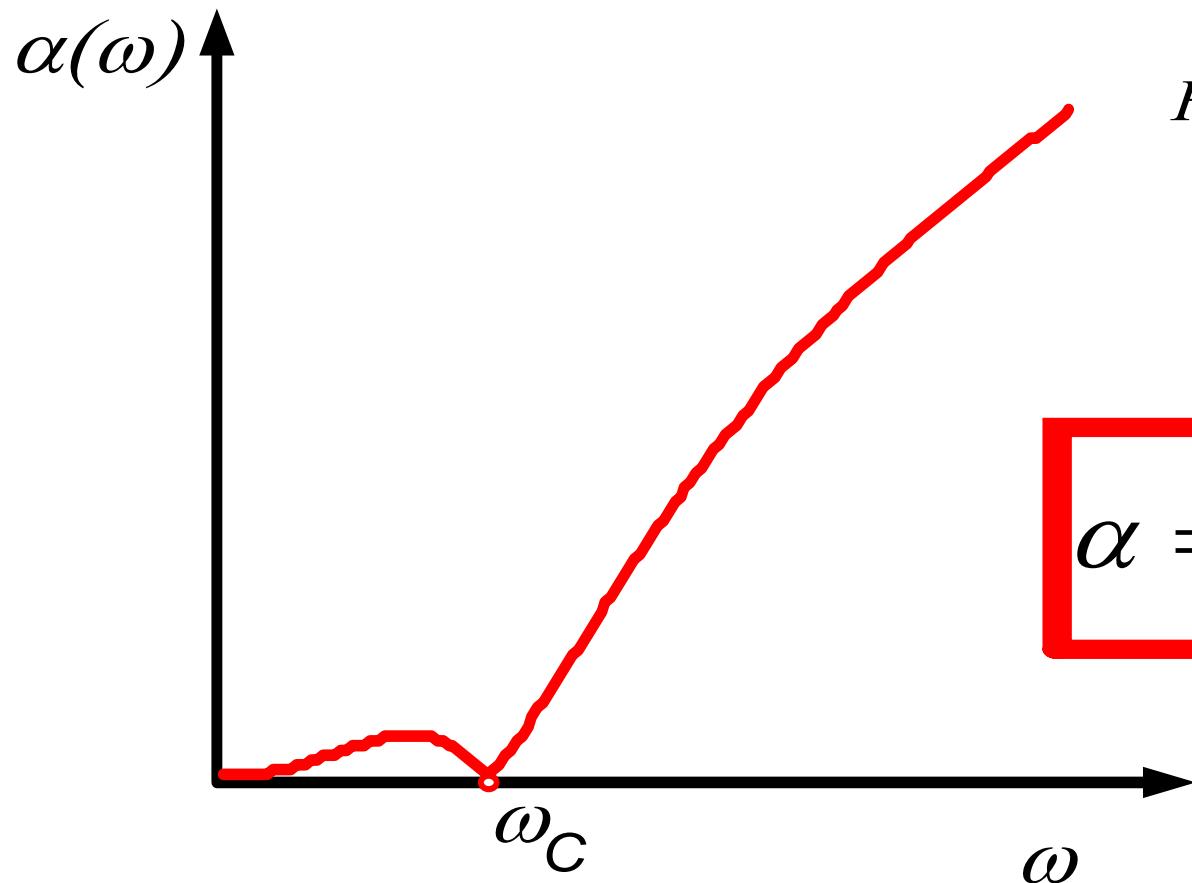
### 3. Рассчитать модуль

АЧХ — это модуль передаточной функции:  $|H(j\omega)|$  или  $|H(e^{j\omega})|$

### 4. Построить график

Обычно строят зависимость:  $|H(j\omega)|$  или  $20 \log_{10} |H(j\omega)|$  (в дБ)

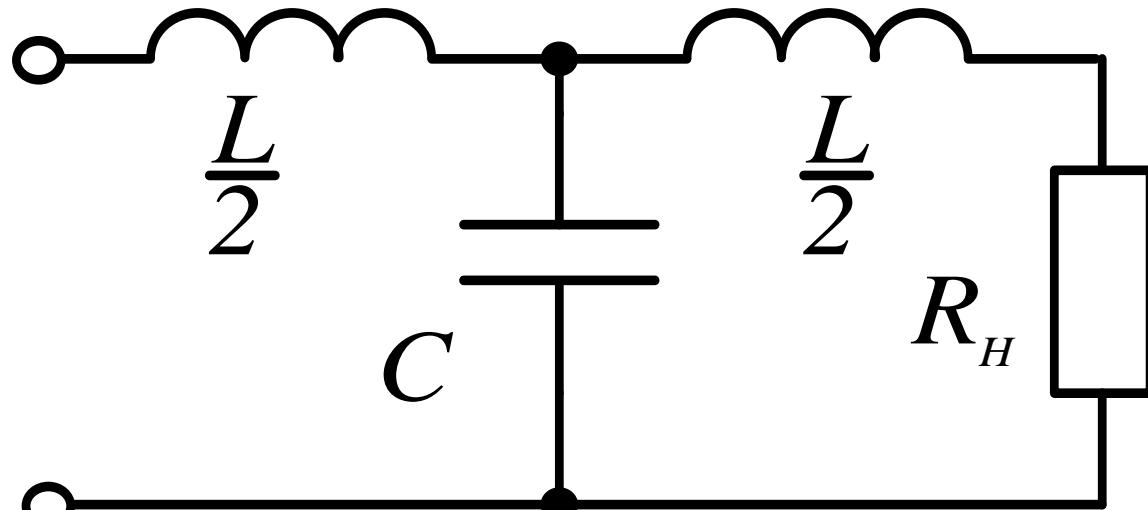
по оси X — частота (обычно в рад/с или Гц).



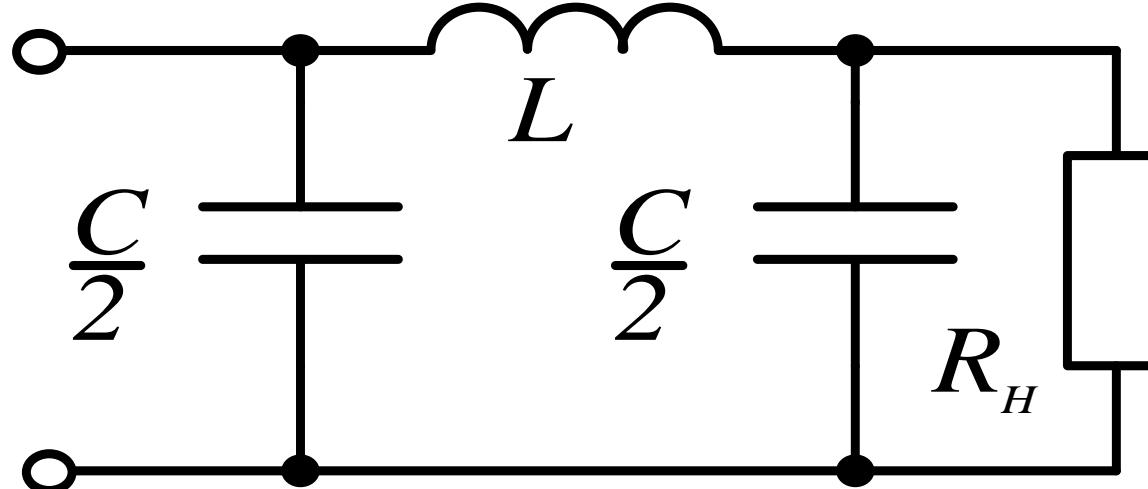
$$\dot{K}_U(\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = e^{-\gamma}$$

$$\alpha = -\ln K_U(\omega)$$

# 1.3 Особенности расчета АЧХ фильтров, выполненных по «Т» или «П» схеме

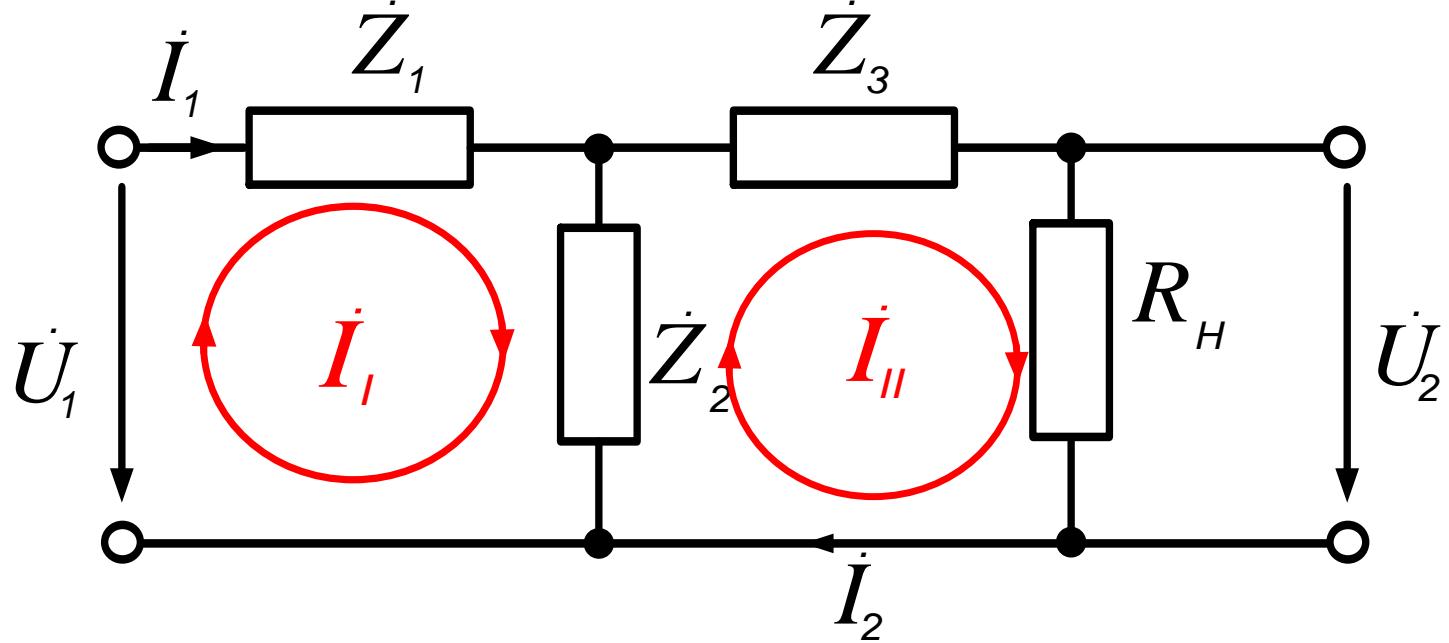


«Т» схема



«П» схема

1. Составить эквивалентную схему «Т» фильтра



2. Записать систему контурных уравнений

$$\begin{cases} \dot{Z}_{11}\dot{I}_I + \dot{Z}_{12}\dot{I}_{II} = \dot{E}_{11} \\ \dot{Z}_{21}\dot{I}_I + \dot{Z}_{22}\dot{I}_{II} = \dot{E}_{22} \end{cases}$$

### 3. Определить элементы системы контурных уравнений

$$\dot{Z}_{11} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2$$

- комплексное сопротивление первого контура

$$\dot{Z}_{22} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + R_H$$

- комплексное сопротивление второго контура

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} = -\dot{Z}_2$$

- комплексное взаимное сопротивление

$$\dot{E}_{11} = \dot{U}_1$$

- комплексное ЭДС первого контура

$$\dot{E}_{22} = 0$$

- комплексное ЭДС второго контура

#### 4. Найти определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{Z}_{12} \\ \dot{Z}_{21} & \dot{Z}_{22} \end{vmatrix} = \dot{Z}_{11}\dot{Z}_{22} - \dot{Z}_{12}\dot{Z}_{21} =$$

- общий определитель

$$= \dot{Z}_{11}\dot{Z}_{22} - \dot{Z}_2^2;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{U}_I & \dot{Z}_{12} \\ 0 & \dot{Z}_{22} \end{vmatrix} = \dot{U}_I \cdot \dot{Z}_{22};$$

- первый частный определитель

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \dot{Z}_{11} & \dot{U}_I \\ \dot{Z}_{21} & 0 \end{vmatrix} = - \dot{U}_I \cdot \dot{Z}_{21} = \dot{U}_I \cdot \dot{Z}_2$$

- второй частный определитель

$$\dot{\Delta}(\omega) = (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2)(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + R_H) - \dot{Z}_2^2$$

- общий определитель

$$\dot{\Delta}_I(\omega) = \dot{U}_I(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + R_H)$$

- первый частный определитель

$$\dot{\Delta}_2(\omega) = \dot{U}_I \dot{Z}_2$$

- второй частный определитель

## 5. Найти контурные токи

$$\dot{I}_I(\omega) = \frac{\dot{\Delta}_I(\omega)}{\dot{\Delta}(\omega)}$$

- контурный ток первого контура

$$\dot{I}_{II}(\omega) = \frac{\dot{\Delta}_2(\omega)}{\dot{\Delta}(\omega)}$$

- контурный ток второго контура

**Контурный ток первого контура равен входному току**

$$\dot{I}_I(\omega) = \dot{I}_I(\omega) = \frac{\dot{U}_I (\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + R_H)}{(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2)(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + R_H) + Z_2^2}$$

**Контурный ток второго контура равен выходному току**

$$\dot{I}_{II}(\omega) = \dot{I}_2(\omega) = \frac{\dot{U}_I \dot{Z}_2}{(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2)(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + R_H) + Z_2^2}$$

**Выходное напряжение фильтра**

$$\dot{U}_2(\omega) = \frac{\dot{U}_I \dot{Z}_2 R_H}{(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2)(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + R_H) + Z_2^2}$$

**Комплексный коэффициент передачи по напряжению**

$$\dot{K}_U(\omega) = \frac{\dot{U}_2(\omega)}{\dot{U}_I(\omega)} = \frac{\dot{Z}_2 R_H}{(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2)(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + R_H) + Z_2^2}$$

## **План лекции:**

- 1.1 Фильтрация сигналов;
- 1.2 Типы фильтров;
- 1.3 Дискретная свертка как временное описание процесса фильтрации.

## 1.1 Фильтрация сигналов

Понятие **фильтрация** широко используется во многих областях. Под этим термином обычно понимают создание препятствий для прохождения каких-либо объектов.

Например, в электротехнике фильтры используются для преобразования электрических сигналов из одной формы в другую, главным образом, чтобы исключить (отфильтровать) различные частоты в сигнале.

В теории цифровой обработки сигналов мы будем понимать понятие **фильтрации** в более широком смысле.

Пусть в результате дискретизации некоторого непрерывного сигнала получена цифровая последовательность данных.

Будем понимать под **цифровой фильтрацией** такое преобразование сигнала, при которой связь между входной и выходной последовательностями является линейной.

Так, например, такой сигнал можно просто регистрировать, дифференцировать, интегрировать, сглаживать, интерполировать и экстраполировать, устранять из него шум и т.д. Все эти операции являются линейными и могут рассматриваться как фильтрация цифровых данных.

**Частотный спектр** сигнала при таких операциях над ним претерпевает изменения, некоторые частоты подавляются, другие усиливаются.

С такой точки зрения обработка данных (линейная) вообще и есть фильтрация. Поэтому каждую конкретную линейную процедуру над последовательностью данных будем называть **цифровым фильтром**.

**Цифровой фильтр** представляет собой устройство обработки сигнала, преобразующее одну последовательность чисел (называемую входной) в другую (называемую выходной).

Фильтр представляет собой устройство обработки сигнала, которое усиливает одни сигналы и подавляет другие.

## 1.2 Типы фильтров

В зависимости от вида частотной характеристики выделяют три основных группы частотных фильтров:

**ФНЧ** - фильтры низких частот (low-pass filters) - пропускание низких и подавление высоких частот во входном сигнале;

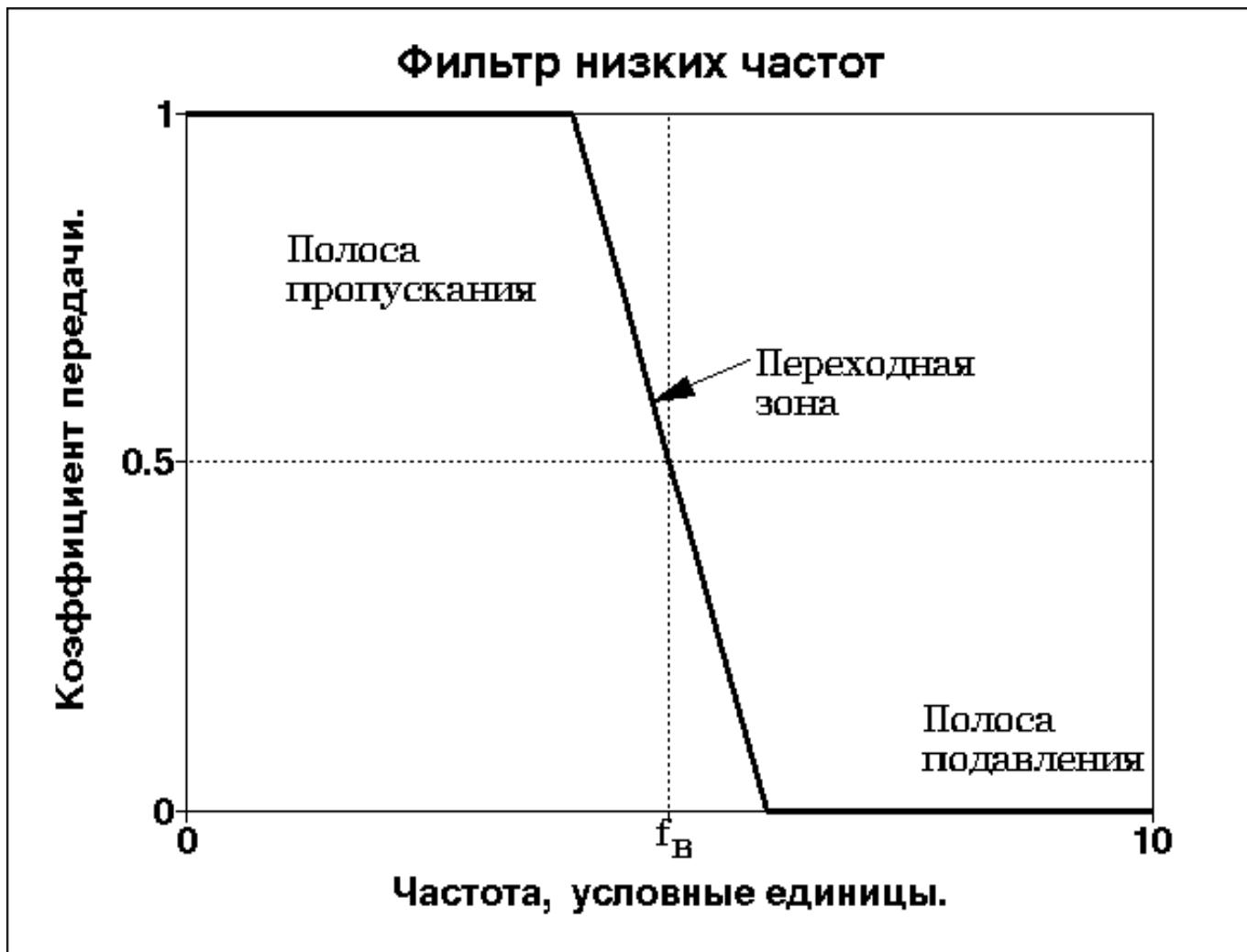
**ФВЧ** - фильтры высоких частот (high-pass filters) - пропускание высоких и подавление низких частот;

**ПФ** - полосовые фильтры, которые пропускают (band-pass filters) или подавляют (band-reject filters) сигнал в определенной частотной полосе.

Среди последних в отдельную группу иногда выделяют РФ - режекторные фильтры, понимая под ними фильтры с подавлением определенной гармоники во входном сигнале, и СФ – селекторные фильтры, обратные РФ.

Если речь идет о подавлении определенной полосы частот во входном сигнале, то такие фильтры называют заградительными. Ни теоретического, ни практического интереса к методам их расчета обычно не проявляется, так как их частотная характеристика обычно задается инверсией характеристики полосового фильтра ( $1-H_{\pi}(w)$ ) и каких-либо дополнительных особенностей при своем проектировании не имеет.

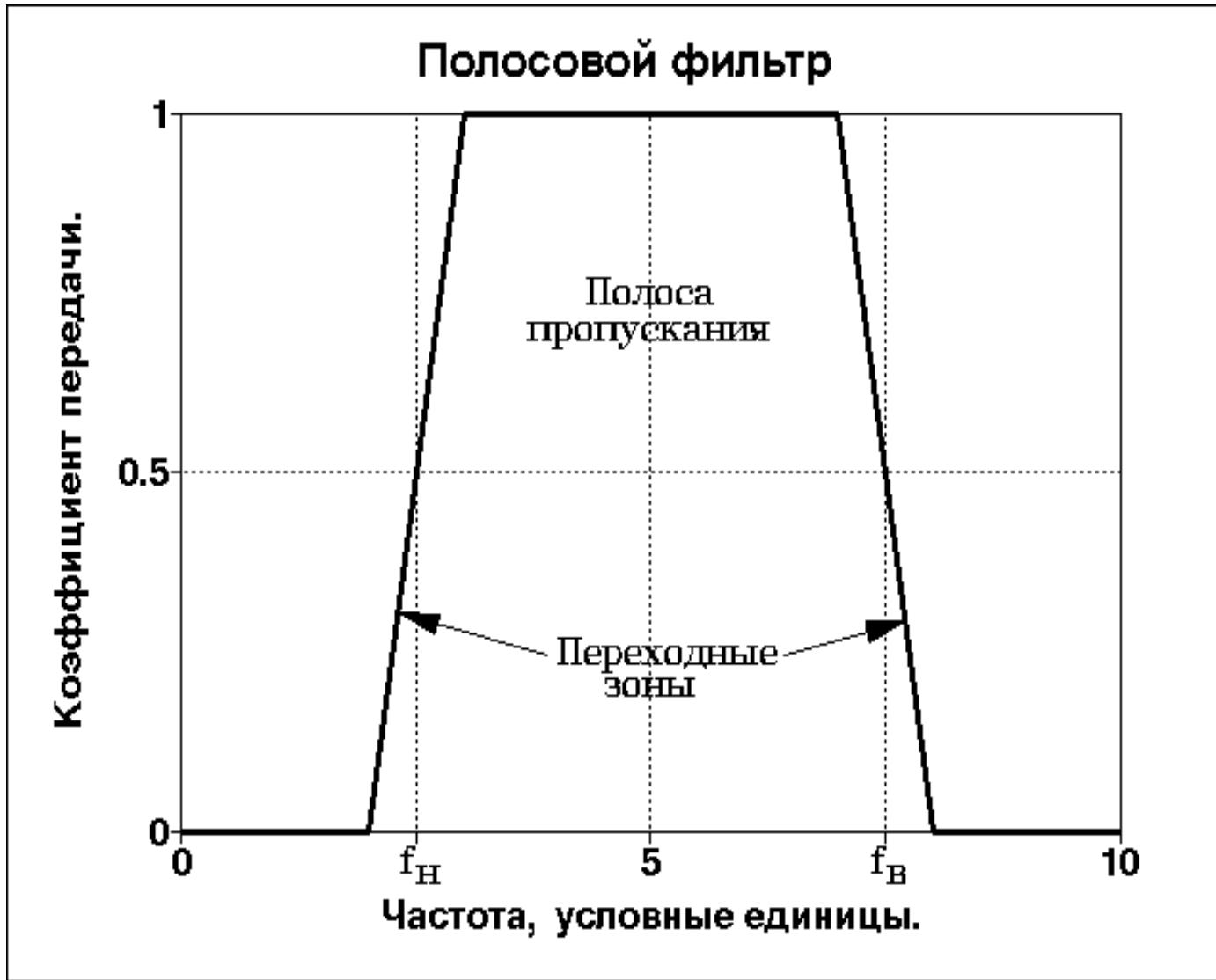
# Типы основных частотных фильтров



# Типы основных частотных фильтров



# Типы основных частотных фильтров



## 1.3 Дискретная свертка как временное описание процесса фильтрации

Дискретизацию непрерывного сигнала, т.е. взятие равноотстоящих отсчетов с временным интервалом  $T$ , можно математически записать с использованием  $\delta$ -функции:

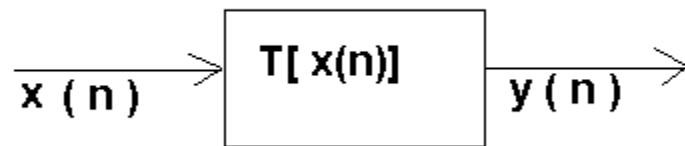
$$\hat{x}(t) = x(nT) = Tx(t) \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = T \sum_{-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(nT - kT) \quad (1).$$

Или переходя от дискретных моментов времени  $nT$  к самим временным отсчетам  $n$  и учитывая при этом свойство  $\delta$ -функции  $\delta(aT) = \frac{1}{|a|} \delta(T)$ , получим:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k) \quad (2).$$

Итак, (2) представляет собой цифровую последовательность которая будет подвергаться обработке.

При этом любая обработка сигнала математически может быть рассмотрена как однозначное преобразование или оператор, отображающий входную последовательность  $x(n)$  в выходную последовательность, которую обозначим за  $y(n)$ . Формально этот процесс можно записать в виде  $y(n) = T[x(n)]$ , а графически часто изображается так, как показано на рисунке



Представление преобразования, отображающего входную последовательность  $x(n)$  в выходную последовательность  $y(n)$ .

Будем называть последовательность  $y(n)$ , полученную в результате обработки некоторой системой, описываемой оператором  $T$ , входного сигнала  $x(n)$  откликом этой системы на  $x(n)$ .

Так как под фильтрацией мы условились понимать лишь линейные преобразования последовательности данных, то будем сейчас рассматривать лишь линейные системы обработки и описывающие их линейные операторы  $A$ .

Класс линейных систем (или линейных операторов) определяется выполнением [принципа суперпозиции](#):

Если  $y_1(n)$  и  $y_2(n)$  отклики на  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ , соответственно, то система линейна тогда и только тогда, когда для произвольных  $a$  и  $b$  выполняется равенство:

$$A[x_1 + bx_2] = aA[x_1] + bA[x_2] = ay_1(n) + by_2(n)$$

Линейность означает, что выходная реакция на сумму сигналов равна сумме реакций на эти сигналы, поданные на вход по отдельности.

Наложим на систему обработки еще одно ограничение, состоящее в инвариантности к сдвигу.

Класс инвариантных к сдвигу систем характеризуется следующим свойством: если  $y(n)$  отклик на  $x(n)$ , то  $y(n-k)$  - отклик на  $x(n-k)$ . Когда индекс  $n$  связывается со временем, свойству инвариантности к сдвигу соответствует свойство инвариантности во времени. Т.е. будем рассматривать только линейные стационарные системы, параметры которых не зависят от времени, а задержка входного сигнала приводит лишь к такой же задержке выходного сигнала, не меняя его формы.

# Контрольные вопросы

1. Что такое фильтр в электрических сетях и какие основные типы фильтров существуют?
2. Чем отличается пассивный фильтр от активного? Приведите примеры.
3. Что такое амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) фильтра и как её интерпретировать?
4. Какой физический смысл имеет срезная (границная) частота фильтра?
5. Как определяются полоса пропускания и полоса задерживания фильтра?
6. Что такое добротность фильтра, и как она связана с резонансными свойствами цепи?
7. Чем отличается фильтр низких частот (ФНЧ) от фильтра высоких частот (ФВЧ)?
8. Что такое полосовой фильтр и где он применяется в электрических сетях?
9. Какую роль играют элементы R, L, C в формировании частотных свойств фильтров?
10. Что такое передаточная функция фильтра и как её использовать для расчёта АЧХ?
11. Как изменяется поведение фильтра при параллельном и последовательном соединении элементов?
12. Какие потери могут возникать в фильтрах и как их минимизировать на практике?

## Список литературы

1. Теоретические основы электротехники [Текст]: учебник для студентов вузов энергетических и электротехнических специальностей / А. Н. Горбу-нов [и др.] ; под ред. А. В. Кравцова, 2022. - 412 с.
2. Электротехника и электроника [Текст]: учебник для студентов вузов энергетических и электротехнических специальностей / А. Н. Горбунов [и др.] ; под ред. А. В. Кравцова, 2022. - 614 с.
3. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи [Текст] : учебник для студентов вузов, аспирантов, обучающихся по направлению подготовки "Электротехника, электромеханика и электротехнологии", "Электроэнергетика", "Приборостроение" / Л. А. Бессонов, 2023. - 701 с.
4. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле [Текст] : Учебник для студентов вузов, обучающихся по направлениям "Электротехника", "Электротехнологии", "Электромеханика" и "Приборостроение" / Л.А. Бессонов, 2023. - 316 с.
5. Ждановская Г. В. Электрооборудование технологических установок отрасли [Текст]. Ч. 1: Теоретические основы электротехники, 2023. - 414 с.
6. Ibrayev, A.T. Theoretical basics of electrical engineering [Текст]: textbook for is students of technical specialty / A. T. Ibrayev, 2016. - 298 p.
7. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле [Текст]: Электронный ресурс]: учебник / Л. А. Бессонов, 2016. - 317 с.
8. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи [Электронный ресурс] : учебник / Л. А. Бессонов, 2016. - 701 с.
9. Теоретические основы электротехники : учебник / А. Д. Мехтиев [и др.]; Кафедра "Энергетические системы". - Караганда : Караганда : КарГТУ, 2017
10. Johnson, Don. Fundamentals of Electrical Engineering I [Электронный ресурс] / Don Johnson, 2017. - 334/1 с.
11. Кузнецов Э. В. Электротехника и электроника [Текст]: учебник и практикум для академического бакалавриата. Т. 1: Электрические и магнитные цепи: учебник и практикум для студентов, 2019. - 255 с.
12. Основы электроники: учебник / А. В. Таранов [и др.] ; М-во образования и науки РК, Карагандинский государственный технический университет, Кафедра "Энергетические системы". - Караганда : Караганда : КарГТУ, 2019. - 160 с.
13. Basics of Electronics : tutorial / A. V. Taranov [et al.] ; Karaganda state technical university. - Karaganda : KSTU Publishing House, 2020. - 148 p.

**Спасибо за внимание!**

**Желаю успехов в изучении данного онлайн-курса!**