

Лекция 1

Четырехполюсники

Для студентов образовательной программы «Электроэнергетика»

Таранов Александр Викторович
кандидат технических наук,
Доцент кафедры «Энергетические системы»

План лекции:

- 1.1 Электрические цепи с четырехполюсными элементами;
- 1.2 Четырехполюсники. Основные понятия ;
- 1.3 Уравнения четырехполюсников.

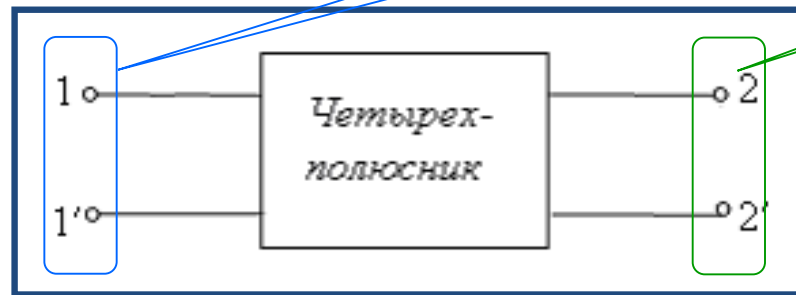
1.1 Электрические цепи с четырехполюсными элементами

Ранее рассматривались элементы с двумя выводами — **двухполюсники**. Любой **пассивный двухполюсник** может быть представлен схемой замещения с одним эквивалентным параметром — входным сопротивлением (проводимостью), **активный двухполюсник** — схемой замещения с двумя параметрами — эквивалентной ЭДС и входным сопротивлением.

Однако рассмотренный ранее **трансформатор** — **четырёхполюсный элемент**, имеющий два входных и два выходных вывода. Широкое использование элементов **четырёхполюсников**, к классу которых относится трансформатор, обуславливает необходимость рассмотрения особенностей анализа цепей, содержащих **четырёхполюсные элементы**.

1.2 Четырехполюсники. Основные понятия

Четырехполюсники – часть электрической цепи, подключенная к остальным участкам цепи двумя парами выводов: **первичных** 1-1' и **вторичных** 2-2'.

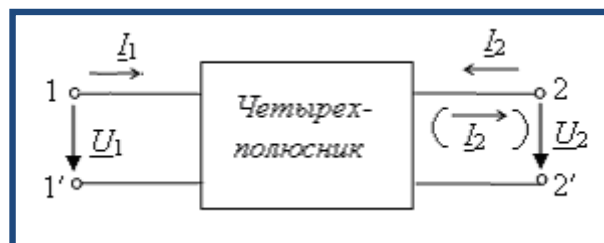


Если четырехполюсник не содержит зависимых или независимых источников энергии или эти источники взаимно компенсируются, то его называют **пассивным**, в противном случае – активным четырехполюсником.

Активные четырехполюсники принято подразделять на автономные, содержащие независимые источники ЭДС и тока, и неавтономные, содержащие зависимые источники. Будем рассматривать пассивные четырехполюсники с неизменными линейными параметрами при действии в цепи синусоидальных источников ЭДС или тока. Активный четырехполюсник может быть приведен к пассивному с вынесенными за его выводы эквивалентными источниками ЭДС или тока.

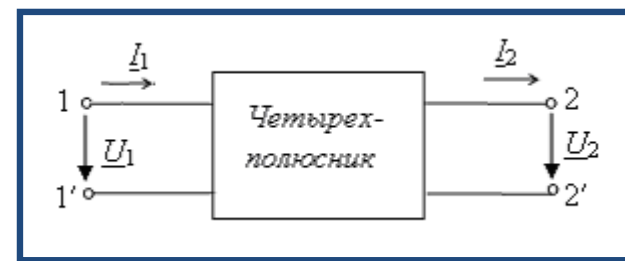
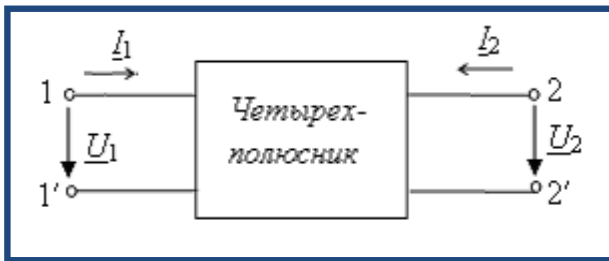
Выбор первичных и вторичных выводов весьма условен, обычно полагают, что в качестве первичных выводов берутся те, от которых идет поток энергии (подсоединенных к источнику питания), в качестве вторичных — выводы, к которым движется этот поток энергии (подсоединенных к приемнику). Будем обозначать токи и напряжения первичных выводов \underline{I}_1 и \underline{U}_1 вторичных выводов \underline{I}_2 и \underline{U}_2 .

токи и напряжения
первичных
выводов \underline{I}_1 \underline{U}_1



токи и напряжения
вторичных
выводов \underline{I}_2 \underline{U}_2

Выбор направления для тока \underline{I}_2 возможен в двух вариантах, выбор конкретного направления оговаривается при использовании того или иного типа уравнений четырехполюсника.

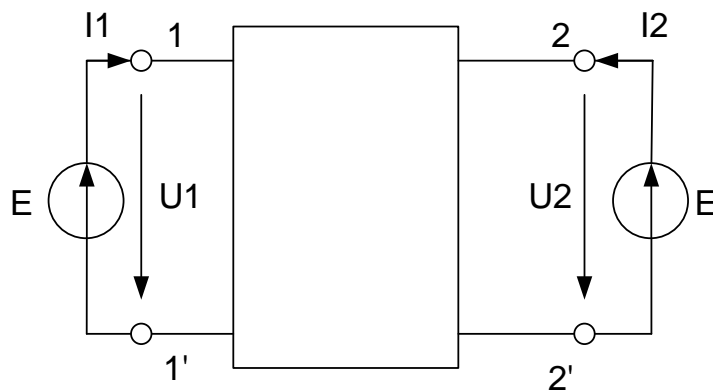


Уравнения четырехполюсника связывают значения входных и выходных токов и напряжений с помощью четырех констант, три из которых являются независимыми.

Исследование режима работы сложной электрической цепи сводится к установлению связи между токами, напряжениями и мощностями различных ее участков или ветвей.

Часть цепи, которая характеризуется обобщенными параметрами, необходимыми и достаточными для составления уравнений связи между токами и потенциалами на ее зажимах, называется **многополюсником**. Наиболее часто рассматривают двухполюсники, трехполюсники и четырехполюсники.

Рассмотрим схему с двумя источниками энергии, остальную часть схемы относим к пассивному четырехполюснику с первичными – входными зажимами 1- 1' и вторичными – выходными зажимами 2 - 2', внутренние сопротивления источников энергии отнесены внутрь четырехполюсника.



Режим работы 4-полюсника полностью определен, если известны \dot{U}_1 , \dot{U}_2 , \dot{I}_1 , \dot{I}_2 .

Обычно две из четырех величин, определяющих режим 4-полюсника известны (их рассматривают как заданные воздействия). Тогда требуется найти две остальные величины (отклики на воздействия).

В зависимости от конкретных условий может встретиться один из шести вариантов.

Варианты	1	2	3	4	5	6
Воздействия	\dot{U}_1, \dot{U}_2	\dot{U}_2, \dot{I}_2	\dot{I}_1, \dot{I}_2	\dot{I}_1, \dot{U}_2	\dot{U}_1, \dot{I}_2	\dot{U}_1, \dot{I}_1
Отклики	\dot{I}_1, \dot{I}_2	\dot{U}_1, \dot{I}_1	\dot{U}_1, \dot{U}_2	\dot{U}_1, \dot{I}_2	\dot{U}_2, \dot{I}_1	\dot{U}_2, \dot{I}_2

1.3 Уравнения четырехполюсников

Наиболее распространенными являются уравнения, в которых в качестве известных (заданных) считаются **ток и напряжения вторичных выводов**, а в качестве неизвестных (определяемых) – **ток и напряжение первичных**. Такие уравнения называют «**уравнения в A - параметрах**», направление выходного тока выбирают слева направо.

Для решения поставленной задачи необходимо располагать системой уравнений, которые называются **основными уравнениями 4-полюсника**.

Остановимся на первом варианте, когда известны \dot{U}_1 и \dot{U}_2 , тогда искомые токи представляют функции напряжений:

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= f_1(u_1, u_2); \\ i_2 &= f_2(u_1, u_2); \end{aligned} \right\}$$

Если предположить, что \dot{U}_1 и \dot{U}_2 изменяются на бесконечно малые величины du_1 и du_2 , то изменения токов определяются полными дифференциалами:

$$\left. \begin{aligned} di_1 &= \frac{df_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{df_1}{\partial u_2} du_2 = \frac{\partial i_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial i_1}{\partial u_2} du_2; \\ di_2 &= \frac{df_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{df_2}{\partial u_2} du_2 = \frac{\partial i_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial i_2}{\partial u_2} du_2; \end{aligned} \right\}$$

Частные производные имеют размерности проводимостей:

$$\frac{\partial i_1}{\partial u_1} = g_{11}, \quad \frac{\partial i_1}{\partial u_2} = g_{12}, \quad \frac{\partial i_2}{\partial u_1} = g_{21}, \quad \frac{\partial i_2}{\partial u_2} = g_{22}.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= g_{11} du_1 + g_{12} du_2; \\ i_2 &= g_{21} du_1 + g_{22} du_2; \end{aligned} \right\}$$

План лекции:

- 1.1 Переходные процессы в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами;
- 1.2 Классический метод расчета;
- 1.3 Законы коммутации.

1.1 Переходные процессы в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами

При всех изменениях в электрической цепи: включении, выключении, коротком замыкании, колебаниях величины какого-либо параметра и т.п. — в ней возникают **переходные процессы**, которые не могут протекать мгновенно, так как невозможно мгновенное изменение энергии, запасенной в электромагнитном поле цепи. Таким образом, переходный процесс обусловлен несоответствием величины запасенной энергии в магнитном поле катушки и электрическом поле конденсатора ее значению для нового состояния цепи.

При переходных процессах могут возникать большие перенапряжения, сверхтоки, электромагнитные колебания, которые могут нарушить работу устройства вплоть до выхода его из строя. С другой стороны, переходные процессы находят полезное практическое применение, например, в различного рода электронных генераторах. Все это обуславливает необходимость изучения методов анализа нестационарных режимов работы цепи.

Основные методы анализа переходных процессов в линейных цепях:

Классический метод, заключающийся в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитное состояние цепи.

Операторный метод, заключающийся в решении системы алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных с последующим переходом от найденных изображений к оригиналам.

Частотный метод, основанный на преобразовании Фурье и находящий широкое применение при решении задач синтеза.

Метод расчета с помощью **интеграла Дюамеля**, используемый при сложной форме кривой возмущающего воздействия.

Метод переменных состояния, представляющий собой упорядоченный способ определения электромагнитного состояния цепи на основе решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в нормальной форме (форме Коши).

1.2 Классический метод расчета

Классический метод расчета переходных процессов заключается в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих изменения токов и напряжений на участках цепи в переходном процессе.

В общем случае при использовании классического метода расчета составляются уравнения электромагнитного состояния цепи по законам Ома и Кирхгофа для мгновенных значений напряжений и токов, связанных между собой на отдельных элементах цепи соотношениями, приведенными в таблице 1.1.

Таблица 1.1 - Связь мгновенных значений напряжений и токов на элементах электрической цепи

Резистор (идеальное активное сопротивление)	Катушка индуктивности (идеальная индуктивность)	Конденсатор (идеальная емкость)
$u_R = Ri_R$	$u_L = L \frac{di_L}{dt}$	$i_C = C \frac{du_C}{dt}$
-	при наличии магнитной связи с катушкой, обтекаемой током i_M , $u_L = L \frac{di_L}{dt} \pm M \frac{di_M}{dt}$	$u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$

Для последовательной цепи, содержащей линейные резистор R, катушку индуктивности L и конденсатор C, при ее подключении к источнику с напряжением u (см. рисунок 1.5) можно записать:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

Значение тока через конденсатор:

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

Получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно U_C

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u$$

В общем случае уравнение, описывающее переходный процесс в цепи с n независимыми накопителями энергии.

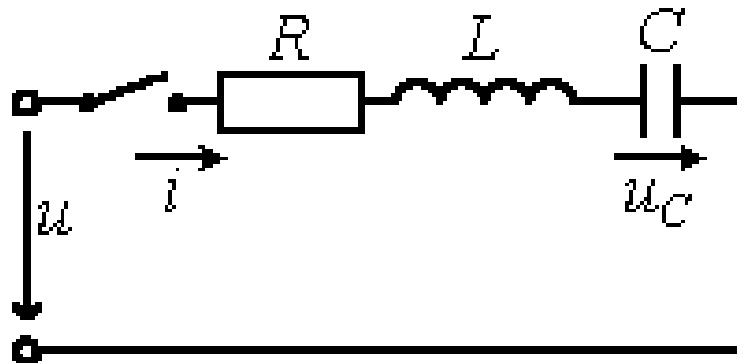


Рисунок 1.5 – Схема с последовательно соединенными R, L, C

И имеет вид:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_k \frac{d^k x}{dt^k} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

где x – искомая функция времени (напряжение, ток, потокосцепление и т.п.);

$f(t)$ – известное возмущающее воздействие (напряжение и (или) ток источника электрической энергии);

a_k – k -й постоянный коэффициент, определяемый параметрами цепи.

Порядок данного уравнения равен числу независимых накопителей энергии в цепи, под которыми понимаются катушки индуктивности и конденсаторы в упрощенной схеме, получаемой из исходной путем объединения индуктивностей и соответственно емкостей элементов, соединения между которыми являются последовательными или параллельными.

В общем случае порядок дифференциального уравнения определяется соотношением:

$$n = n_L + n_C - k_L - k_C$$

где n_L и n_C – соответственно число катушек индуктивности и конденсаторов после указанного упрощения исходной схемы;

k_L – соответственно число катушек индуктивности и конденсаторов после указанного упрощения исходной схемы;

k_C - число контуров схемы, ветви которых содержат только конденсаторы (в соответствии со вторым законом Кирхгофа напряжение на любом из конденсаторов в этом случае определяется напряжениями на других).

Наличие индуктивных связей на порядок дифференциального уравнения не влияет.

При классическом методе расчета послекоммутационный процесс рассматривается как наложение друг на друга двух режимов – принужденного, наступающего как бы сразу после коммутации, и свободного, имеющего место только в течение переходного процесса.

Необходимо подчеркнуть, что, поскольку принцип наложения справедлив только для линейных систем, метод решения, основанный на указанном разложении искомой переменной x , справедлив только для линейных цепей.

1.3 Законы коммутации

Первый закон коммутации (закон сохранения потокосцепления) - Магнитный поток, сцепленный с катушками индуктивности контура, в момент коммутации сохраняет то значение, которое имел до коммутации, и начинает изменяться именно с этого $\psi(0+) = \psi(0-)$

Второй закон коммутации (закон сохранения заряда) - Электрический заряд на конденсаторах, присоединенных к любому узлу, в момент коммутации сохраняет то значение, которое имел до коммутации, и начинает изменяться именно с этого значения: $q(0+) = q(0-)$

Доказать законы коммутации можно от противного: если допустить обратное, то получаются бесконечно большие значения:

$$u_L = d\psi/dt = \infty \qquad i_C = dq/dt = \infty$$

что приводит к нарушению законов Кирхгофа.

На практике, за исключением особых случаев (некорректные коммутации), допустимо использование указанных законов в другой формулировке, а именно:

Первый закон коммутации – в ветви с катушкой индуктивности ток в момент коммутации сохраняет свое докоммутационное значение и в дальнейшем начинает изменяться с него:

$$i_L(0+) = i_L(0-)$$

Второй закон коммутации – напряжение на конденсаторе в момент коммутации сохраняет свое докоммутационное значение и в дальнейшем начинает изменяться с него:

$$u_C(0+) = u_C(0-)$$

Необходимо подчеркнуть, что более общей формулировкой законов коммутации является положение о невозможности скачкообразного изменения в момент коммутации для схем с катушкой индуктивности – потокосцеплений, а для схем с конденсаторами – зарядов на них. В качестве иллюстрации сказанному могут служить схемы на рисунке 1.6, переходные процессы в которых относятся к так называемым некорректным коммутациям (название произошло от пренебрежения в подобных схемах малыми параметрами, корректный учет которых может привести к существенному усложнению задачи).

Действительно, при переводе в схеме на рисунке 1.6,а ключа из положения 1 в положение 2 трактование второго закона коммутации как невозможность скачкообразного изменения напряжения на конденсаторе приводит к невыполнению второго закона Кирхгофа ($u_{C1}(0) \neq u_{C2}(0)$).

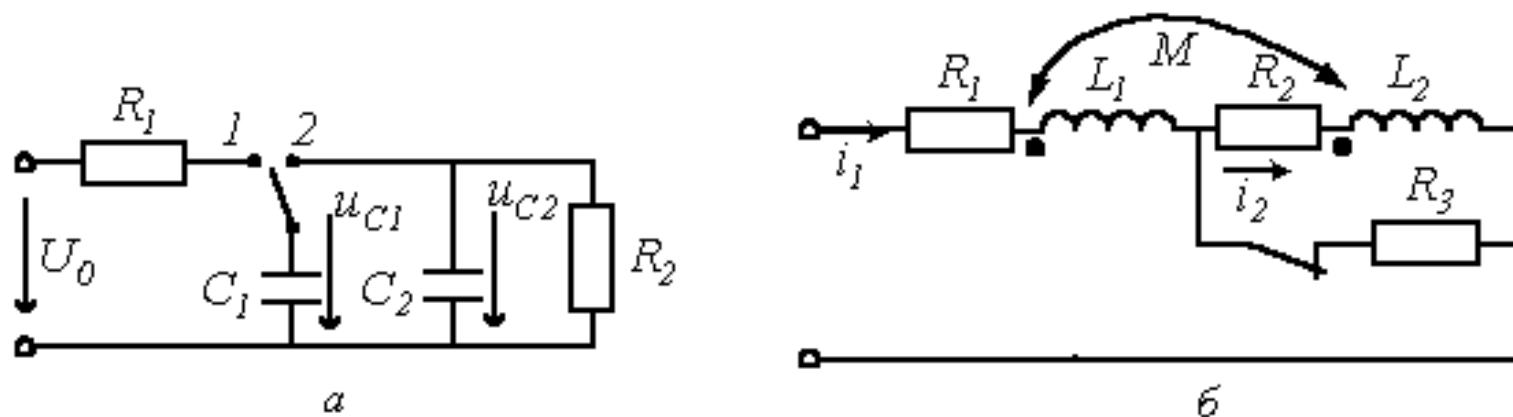


Рисунок 1.6 - Переходные процессы

Аналогично при размыкании ключа в схеме на рисунке 1.6,б трактование первого закона коммутации как невозможность скачкообразного изменения тока через катушку индуктивности приводит к невыполнению первого закона Кирхгофа ($i_1(0) \neq i_2(0)$).

Для данных схем, исходя из сохранения заряда и соответственно потокосцепления, можно записать:

$$C_1 u_{C1}(0-) + C_2 u_{C2}(0-) = C_1 U_0 = (C_1 + C_2) u_C(0+);$$

$$L_1 i_1(0-) + M i_2(0-) + L_2 i_2(0-) + M i_1(0-) = (L_1 + L_2 + 2M) i(0+).$$

Зависимыми начальными условиями называются значения остальных токов и напряжений, а также производных от искомой функции в момент коммутации, определяемые по независимым начальным условиям при помощи уравнений, составляемых по законам Кирхгофа для $t = 0$. Необходимое число начальных условий равно числу постоянных интегрирования. Поскольку уравнение такого вида рационально записывать для переменной, начальное значение которой относится к независимым начальным условиям, задача нахождения начальных условий обычно сводится к нахождению значений этой переменной и ее производных до $(n-1)$ порядка включительно при $t = 0$.

План лекции:

- 1.1 Корни характеристического уравнения. Постоянная времени;
- 1.2 Способы составления характеристического уравнения;
- 1.3 Общая методика расчета переходных процессов классическим методом.

1.1 Корни характеристического уравнения. Постоянная времени.

Выражение свободной составляющей $x_{\text{СВ}}$ общего решения x дифференциального уравнения:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_k \frac{d^k x}{dt^k} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

определяется видом корней характеристического уравнения, таблица 1.2.

Необходимо помнить, что, поскольку в линейной цепи с течением времени свободная составляющая затухает, вещественные части корней характеристического уравнения не могут быть положительными.

При вещественных корнях $x_{\text{СВ}}$ монотонно затухает, и имеет место апериодический переходный процесс. Наличие пары комплексно сопряженных корней обуславливает появление затухающих синусоидальных колебаний (колебательный переходный процесс).

Таблица 1.2 - Выражения свободных составляющих общего решения

Вид корней характеристического уравнения	Выражение свободной составляющей
Корни p_1, p_2, \dots, p_n вещественные и различные	$x_{св} = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}$
Корни p_1, p_2, \dots, p_n вещественные и $p_1 = p_2 = \dots = p_m = p \ (m < n)$	$x_{св} = \sum_{k=1}^m A_k t^{k-1} e^{pt} + \sum_{k=m+1}^n A_k e^{p_k t}$
Пары комплексно-сопряженных корней $p_{k,k+1} = -\delta_k \pm j\omega_k$	$\begin{aligned} x'_{св} &= e^{-\delta_k t} (A_k \cos \omega_k t + A_{k+1} \sin \omega_k t) = \\ &= B_k e^{-\delta_k t} \sin(\omega_k t + \varphi_k) \end{aligned}$

Поскольку физически колебательный процесс связан с периодическим обменом энергией между магнитным полем катушки индуктивности и электрическим полем конденсатора, комплексно-сопряженные корни могут иметь место только для цепей, содержащих оба типа накопителей. Быстроту затухания колебаний принято характеризовать отношением:

$$\frac{x(t)}{x(t + T_0)} = e^{\delta T_0}$$

которое называется **декрементом колебания**.

Или натуральным логарифмом этого отношения: $\Delta = \ln e^{\delta T_0} = \delta T_0$

называемым **логарифмическим декрементом** колебания, где $T_0 = 2\pi/\omega_0$

Важной характеристикой при исследовании переходных процессов является постоянная времени t , определяемая для цепей первого порядка, как: $\tau = mod(1/p)$ где p – корень характеристического уравнения.

Постоянную времени можно интерпретировать как временной интервал, в течение которого свободная составляющая уменьшится в e раз по сравнению со своим начальным значением. Теоретически переходный процесс длится бесконечно долго. Однако на практике считается, что он заканчивается при $t = (3...4)\tau$.

1.2 Способы составления характеристического уравнения

Характеристическое уравнение составляется для цепи после коммутации. Оно может быть получено следующими способами:

1. Непосредственно на основе дифференциального уравнения т.е. путем исключения из системы уравнений, описывающих электромагнитное состояние цепи на основании первого и второго законов Кирхгофа, всех неизвестных величин, кроме одной, относительно которой и записывается уравнение;

2. Путем использования выражения для входного сопротивления цепи на синусоидальном токе;
3. На основе выражения главного определителя.

Согласно первому способу в предыдущей лекции было получено дифференциальное уравнение относительно напряжения u_C на конденсаторе для последовательной R-L-C-цепи, на базе которого записывается характеристическое уравнение.

Следует отметить, что, поскольку линейная цепь охвачена единым переходным процессом, корни характеристического уравнения являются общими для всех свободных составляющих напряжений и токов ветвей схемы, параметры которых входят в характеристическое уравнение. Поэтому по первому способу составления характеристического уравнения в качестве переменной, относительно которой оно записывается, может быть выбрана любая.

Применение второго и третьего способов составления характеристического уравнения рассмотрим на примере цепи рисунке 1.7.

Составление характеристического уравнения по методу входного сопротивления заключается в следующем:

1. Записывается входное сопротивление цепи на переменном токе;
2. $j\omega$ заменяется на оператор p ;
3. Полученное выражение $Z(p)$ приравнивается к нулю.

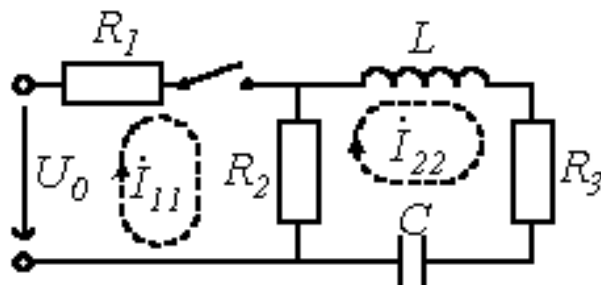


Рисунок 1.7 – Электрическая цепь

Уравнение $Z(p) = 0$, совпадает с характеристическим.

Следует подчеркнуть, что входное сопротивление может быть записано относительно места разрыва любой ветви схемы. При этом активный двухполюсник заменяется пассивным по аналогии с методом эквивалентного генератора. Данный способ составления характеристического уравнения предполагает отсутствие в схеме магнитосвязанных ветвей; при наличии таковых необходимо осуществить их предварительное развязывание.

Для цепи на рисунке 1.7 относительно зажимов источника:

$$\underline{Z}(j\omega) = R_1 + \frac{R_2 \left(j\omega L + R_3 + \frac{1}{j\omega C} \right)}{R_2 + R_3 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

Заменив $j\omega$ на p и приравняв полученное выражение к нулю, запишем:

$$Z(p) = R_1 + \frac{R_2 \left(pL + R_3 + \frac{1}{pC} \right)}{R_2 + R_3 + pL + \frac{1}{pC}} = 0$$

или

$$CL(R_1 + R_2)p^2 + C(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)p + (R_1 + R_2) = 0$$

При составлении характеристического уравнения на основе выражения главного определителя число алгебраических уравнений, на базе которых он записывается, равно числу неизвестных свободных составляющих токов. Алгебраизация исходной системы интегро-дифференциальных уравнений, составленных, например, на основании законов Кирхгофа или по методу контурных токов, осуществляется заменой символов дифференцирования и интегрирования соответственно на умножение и деление на оператор p . Характеристическое уравнение получается путем приравнивания записанного определителя к нулю. Поскольку выражение для главного определителя не зависит от правых частей системы неоднородных уравнений, его составление можно производить на основе системы уравнений, записанных для полных токов.

Для цепи на рисунке 1.7 алгебраизованная система уравнений на основе метода контурных токов имеет вид:

$$\begin{aligned} i_{11}(R_1 + R_2) - i_{22}R_2 &= U_0; \\ -i_{11}R_2 + i_{22} \left(R_2 + R_3 + Lp + \frac{1}{Cp} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда выражение для главного определителя этой системы:

$$D = \begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + Lp + \frac{1}{Cp} \end{vmatrix} = (R_1 + R_2) \left(R_2 + R_3 + Lp + \frac{1}{Cp} \right) - R_2^2$$

Приравняв D к нулю, получим результат, аналогичный:

$$CL(R_1 + R_2)p^2 + C(R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3)p + (R_1 + R_2) = 0$$

1.3 Общая методика расчета переходных процессов классическим методом

В общем случае методика расчета переходных процессов классическим методом включает следующие этапы:

1. Запись выражения для искомой переменной в виде $x(t) = x_{np} + x_{св}$
2. Нахождение принужденной составляющей общего решения на основании расчета установившегося режима послекоммутационной цепи.
3. Составление характеристического уравнения и определение его корней (для цепей, описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка, вместо корней можно находить постоянную времени t).

Запись выражения свободной составляющей в форме, определяемой типом найденных корней.

4. Подстановка полученных выражений принужденной и свободной составляющих в соотношение $x(t) = x_{np} + x_{св}$.

5. Определение начальных условий и на их основе — постоянных интегрирования.

Применительно к электрическим цепям в качестве частного решения неоднородного дифференциального уравнения выбирают установившийся режим в рассматриваемой цепи (если он существует), т.е. постоянные токи и напряжения, если в цепи действуют источники постоянных ЭДС и токов, или синусоидальные напряжения и токи при действии источников синусоидальных ЭДС и токов. Токи и напряжения установившегося режима называют установившимися.

Общее решение однородного дифференциального уравнения описывает процесс в цепи без источников ЭДС и тока, который поэтому называют свободным процессом. Токи и напряжения свободного процесса называют свободными, а их выражения должны содержать постоянные интегрирования, число которых равно порядку однородного уравнения.

План лекции:

1.1 Переходные процессы в R-L цепи при ее подключении к источнику напряжения;

1.2 Переходные процессы при отключении катушки индуктивности от источника питания.

1.1 Переходные процессы в R-L цепи при ее подключении к источнику напряжения

Такие процессы имеют место, например, при подключении к источнику питания электромагнитов, трансформаторов, электрических двигателей и т.п.

Рассмотрим два случая:

1. $u(t) = U_0$;
2. $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_U)$.

Согласно рассмотренной методике для тока в цепи на рисунке 1.8 можно записать $i = i_{np} + i_{св}$.

Тогда для первого случая принужденная составляющая тока: $i_{np} = \frac{U_0}{R}$
Характеристическое уравнение: $Lp + R = 0$.

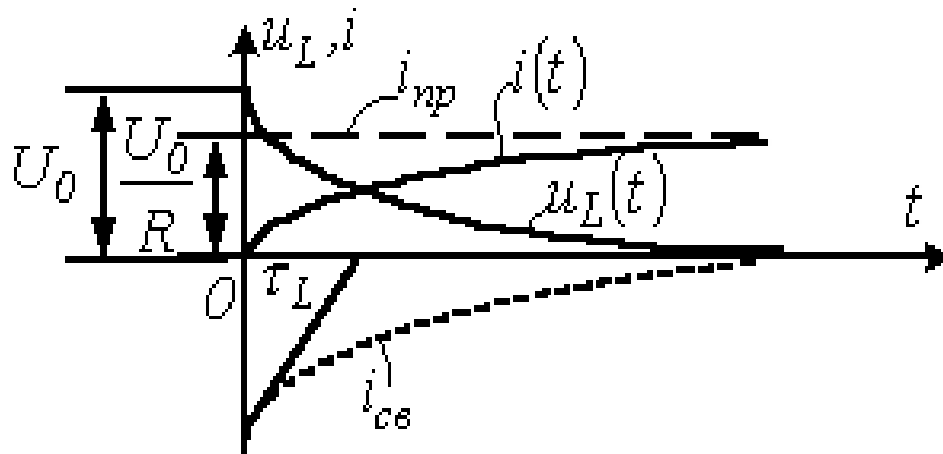


Рисунок 1.8 – Электрическая цепь

откуда: $p = -R/L$ и постоянная времени $\tau_L = |1/p| = L/R$

Таким образом $i_{св} = Ae^{-\frac{t}{\tau_1}}$ $i = \frac{U_0}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau_1}}$

В соответствии с первым законом коммутации $i(0) = 0$. Тогда $i(0) = \frac{U_0}{R} + A = 0$
откуда $A = -U_0/R$

Таким образом, ток в цепи в переходном процессе описывается уравнением:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau_1}}$$

а напряжение на катушке индуктивности – выражением $u_L(t) = L \frac{di}{dt} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_1}}$

Качественный вид кривых $i(t)$ и $u_L(t)$, соответствующих полученным решениям, представлен на рисунке 1.8.

При втором типе источника принужденная составляющая рассчитывается с использованием символического метода:

$$\dot{I}_{npm} = \frac{\dot{U}_m}{R + j\omega L} = \frac{U_m e^{j\varphi_v}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} e^{j \arctg \frac{\omega L}{R}}} = I_m e^{j(\varphi_v - \varphi)}$$

где $I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$; $\varphi = \arctg(\omega L/R)$

Отсюда: $i_{np} = I_m \sin(\omega t + \varphi_U - \varphi)$

Выражение свободной составляющей не зависит от типа источника напряжения. Следовательно:

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_U - \varphi) + A e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

Поскольку $i(0) = 0$, то

$$0 = I_m \sin(\varphi_U - \varphi) + A$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_U - \varphi) - I_m \sin(\varphi_U - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

Анализ полученного выражения показывает:

1. При начальной фазе напряжения $\varphi_U = \varphi \pm \pi$ постоянная интегрирования $A=0$. Таким образом, в этом случае коммутация не повлечет за собой переходного процесса, и в цепи сразу возникнет установившийся режим.

2. При $\varphi_U - \varphi = \pm \pi/2$ свободная составляющая максимальна по модулю. В этом случае ток переходного процесса достигает своей наибольшей величины.

Если τ_L значительна по величине, то за полпериода свободная составляющая существенно не уменьшается. В этом случае максимальная величина тока переходного процесса i_{\max} может существенно превышать амплитуду тока установившегося режима.

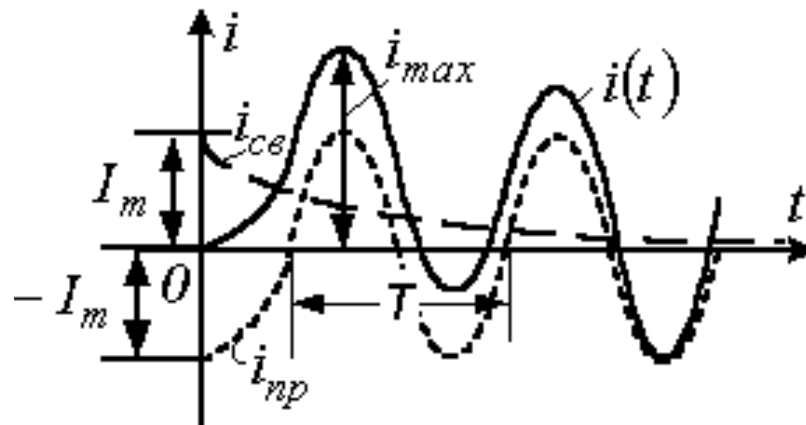


Рисунок 1.9 – Схема для анализа

Как видно из рисунка 1.9, где $\varphi_U - \varphi = \pm\pi/2$, максимум тока имеет место примерно через $t = T/2$. В пределе при $\tau_L \rightarrow \infty$ $i_{max} = 2I_m$

Таким образом, для линейной цепи максимальное значение тока переходного режима не может превышать удвоенной амплитуды принужденного тока: $i_{Lmax} < 2I_m$.

Аналогично для линейной цепи с конденсатором: если в момент коммутации принужденное напряжение равно своему амплитудному значению и постоянная времени τ_C цепи достаточно велика, то примерно через половину периода напряжение на конденсаторе достигает своего максимального значения u_{Cmax} , которое не может превышать удвоенной амплитуды принужденного напряжения: $u_{Cmax} < 2U_{Cm}$.

1.2 Переходные процессы при отключении катушки индуктивности от источника питания

При размыкании ключа в цепи на рисунке 1.10 принужденная составляющая тока через катушку индуктивности $i_{пр} = 0$.

Характеристическое уравнение: $Lp + R + R_k = 0$

откуда $p = -(R + R_k)/L$ и $\tau_L = L/(R + R_k)$.

В соответствии с первым законом коммутации: $i(0) = \frac{U_0}{R_k} = A$

Таким образом, выражение для тока в переходном режиме: $i(t) = \frac{U_0}{R_k} e^{-\frac{t}{\tau_L}}$

и напряжение на катушке индуктивности: $u_k(t) = -Ri = -\frac{R}{R_k} U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}}$

Анализ показывает, что при размыкании цепей, содержащих индуктивные элементы, могут возникать большие перенапряжения, которые без принятия специальных мер могут вывести аппаратуру из строя. Действительно, при $n = R/R_k \gg 1$ модуль напряжения на катушке индуктивности в момент коммутации будет во много раз превышать напряжение источника: $u_k(0) = nU_0$.

При отсутствии гасящего резистора R указанное напряжение прикладывается к размыкающимся контактам ключа, в результате чего между ними возникает дуга.

Заряд и разряд конденсатора. При переводе ключа в положение 1 (см. рисунок 1.11) начинается процесс заряда конденсатора: $u_C(t) = u_{C_{np}} + u_{C_{св}}$.

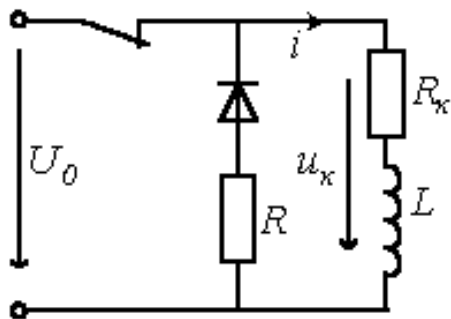


Рисунок 1.10 – Схема для анализа

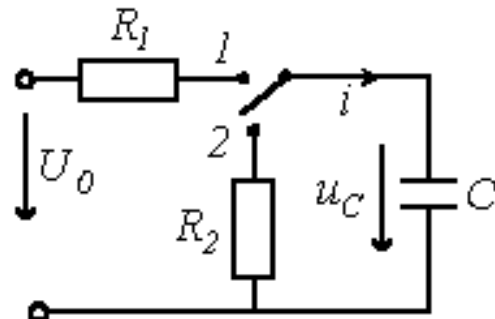


Рисунок 1.11 – Заряд и разряд конденсатора

Принужденная составляющая напряжения на конденсаторе $U_{\text{спр}} = U_0$.

Из характеристического уравнения: $R_1 + \frac{1}{Cp} = 0$

определяется корень $p = -1/(R_1 C)$

Отсюда постоянная времени: $\tau_{C1} = R_1 C$

Таким образом $u_C = U_0 + Ae^{-\frac{t}{\tau_{C1}}}$

При $t = 0$ напряжение на конденсаторе равно $U_C(0)$, (в общем случае к моменту коммутации конденсатор может быть заряженным, т.е. $U_C(0) \neq 0$). Тогда

$$A = u_C(0) - U_0 \quad u_C(t) = U_0 + (u_C(0) - U_0)e^{-\frac{t}{\tau_{C1}}}$$

Соответственно для зарядного тока можно записать: $i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0 - u_C(0)}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau_C}}$

В зависимости от величины $U_C(0)$; 1 - $U_C(0) = 0$; 2 - $0 < U_C(0) < U_0$; 3 - $U_C(0) < 0$; $U_C(0) > U_0$. Возможны четыре вида кривых переходного процесса, которые иллюстрирует рисунок 1.12.

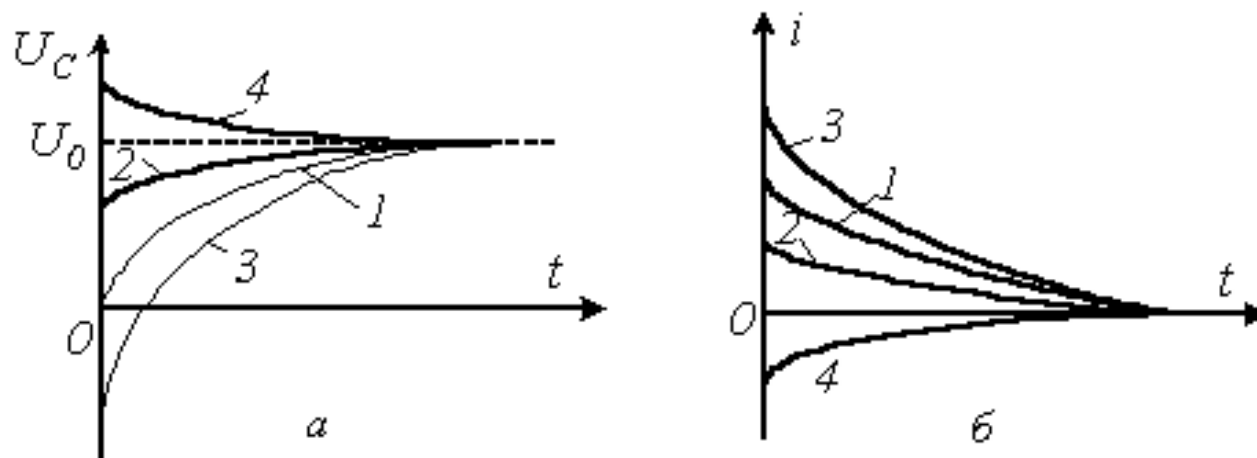


Рисунок 1.12 - Переходной процесс

При разряде конденсатора на резистор R_2 (ключ на рисунке 1.11 переводится в положение 2, $U_{Cпр} = 0$. Постоянная времени $\tau_{C2} = R_2 C$.

Тогда, принимая, что к моменту коммутации конденсатор был заряжен до напряжения $U_{C1}(0)$, для напряжения на нем в переходном режиме можно записать:

$$u_C(t) = u_{CI}(0) e^{-\frac{t}{\tau_{C2}}}$$

Соответственно разрядный ток:

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{u_{CI}(0)}{R_2} e^{-\frac{t}{\tau_{C2}}}$$

во избежание значительных бросков разрядного тока величина R_2 должна быть достаточно большой.

В заключение отметим, что процессы заряда и разряда конденсатора используются в генераторах пилообразного напряжения, широко применяемых в автоматике. Для этого ключ в схеме на рисунке 1.11 заменяется на электронный.

План лекции:

1.1 Переходные процессы в цепи с одним накопителем энергии и произвольным числом резисторов;

1.2 Переходные процессы при подключении последовательной R-L-C-цепи к источнику напряжения.

1.1 Переходные процессы в цепи с одним накопителем энергии и произвольным числом резисторов

Как отмечалось в предыдущей лекции, линейная цепь охвачена единым переходным процессом. Поэтому в рассматриваемых цепях с одним накопителем энергии (катушкой индуктивности или конденсатором) – цепях первого порядка – постоянная времени будет одной и той же для всех свободных составляющих напряжений и токов ветвей схемы, параметры которых входят в характеристическое уравнение.

Общий подход к расчету переходных процессов в таких цепях основан на применении теоремы об активном двухполюснике: ветвь, содержащую накопитель, выделяют из цепи, а оставшуюся часть схемы рассматривают как активный двухполюсник **A** (эквивалентный генератор) (см. рисунок 1.13, а) со схемой замещения на рисунке 1.13, б.

Совершенно очевидно, что постоянная времени здесь для цепей с индуктивным элементом определяется, как:

$$\tau_L = \frac{L}{R_{ex} + R}$$

и с емкостным, как: $\tau_C = C(R_{ex} + R)$

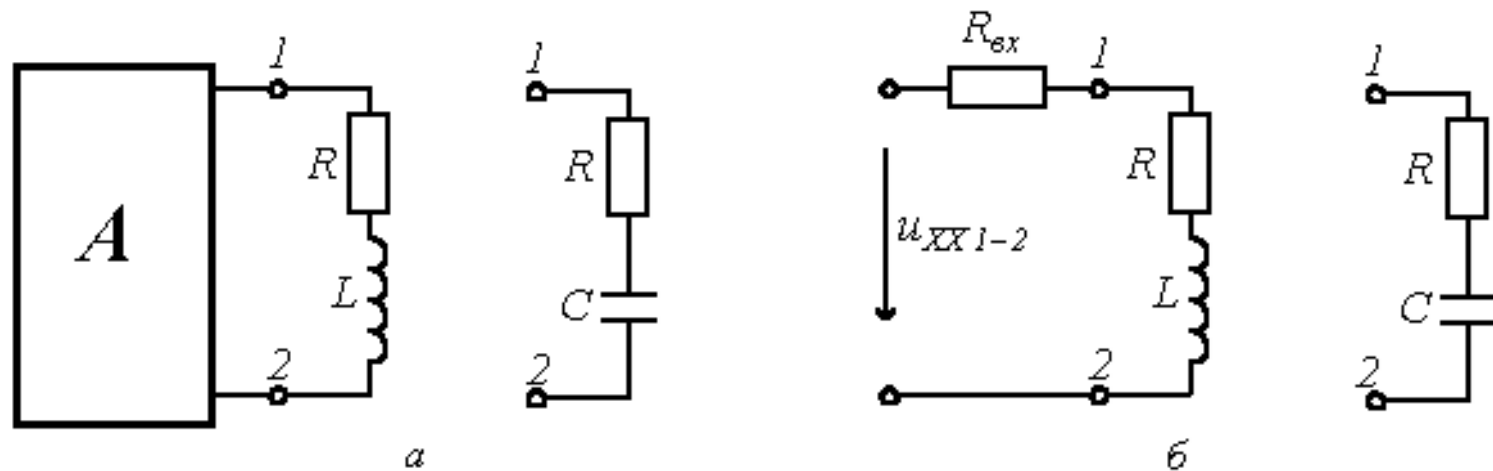


Рисунок 1.13 – эквивалентный генератор, и его схема замещения

где $R_{\text{вх}}$ - входное сопротивление цепи по отношению к зажимам 1-2 подключения ветви, содержащей накопитель энергии.

Например, для напряжения на конденсаторе в цепи на рисунке 1.14 можно записать:

$$u_C(t) = u_{c \text{ нр}}(t) + (u_C(0) - u_{c \text{ нр}}(0)) e^{-\frac{t}{\tau_C}}$$

где в соответствии с вышесказанным:

$$\tau_C = C \left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

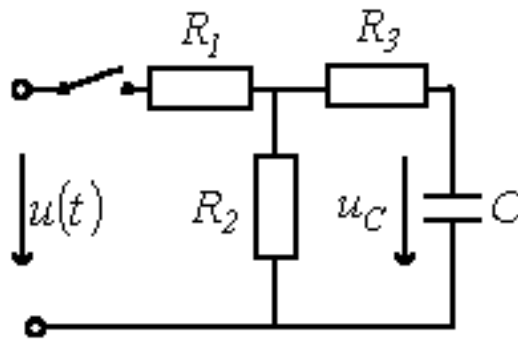


Рисунок 1.14 – Схема для анализа

1.2 Переходные процессы при подключении последовательной R-L-C-цепи к источнику напряжения

Рассмотрим два случая:

1. $u(t) = U_0$;
2. $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_U)$.

Согласно изложенной в предыдущей лекции методике расчета переходных процессов классическим методом для напряжения на конденсаторе в цепи на рисунке 1.15 можно записать:

$$u_C(t) = u_{C\text{ пр}} + u_{C\text{ св}}$$

Тогда для первого случая принужденная составляющая этого напряжения:

$$u_{C\text{ пр}} = U_0$$

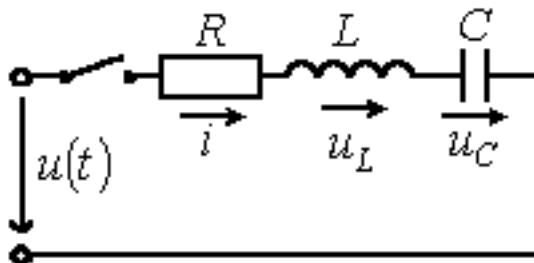


Рисунок 1.15 - Схема последовательной R-L-C-цепи

Характеристическое уравнение цепи: $LCp^2 + RCp + 1 = 0$
 решая которое, получаем:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

В зависимости от соотношения параметров цепи возможны три типа корней и соответственно три варианта выражения для свободной составляющей:

$$1. \quad \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{или} \quad R > R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

где $R_{кр}$ - **критическое сопротивление** контура, меньше которого свободный процесс носит колебательный характер.

В этом случае:

$$u_{C\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

2. $R = R_{кр}$ - предельный случай апериодического режима.

В этом случае $p_1 = p_2 = p = -R/(2L)$

$$u_{C\text{св}} = (A_1 + A_2 t)e^{pt}$$

3. $R < R_{кр}$ - периодический (колебательный) характер переходного процесса.

В этом случае $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$

$$u_{C\text{св}} = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

где $\delta = R/(2L)$ - коэффициент затухания:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \frac{2\pi}{T_0} \quad \text{- **угловая частота собственных колебаний**};$$

T_0 - период собственных колебаний.

Для нахождения постоянных интегрирования, учитывая, что в общем случае $U_C(0) \neq 0$ и в соответствии с первым законом коммутации:

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_0 = \frac{i(0)}{C} = 0$$

запишем для $t = 0$ два уравнения: $u_C(0) - U_0 = A_1 + A_2;$

$$0 = p_1 A_1 + p_2 A_2,$$

решая которые, получим: $A_1 = (U_0 - u_C(0)) \frac{p_2}{p_1 - p_2}$ $A_2 = (U_0 - u_C(0)) \frac{p_1}{p_2 - p_1}$

Таким образом: $u_C(t) = U_0 + (U_0 - u_C(0)) \left(\frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{p_2 t} \right)$

Тогда ток в цепи $i(t) = C \frac{du_C}{dt} = C(U_0 - u_C(0)) \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = (U_0 - u_C(0)) \frac{e^{p_1 t} - e^{p_2 t}}{L(p_1 - p_2)}$

и напряжение на катушке индуктивности:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = (U_0 - u_C(0)) \frac{p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}}{p_1 - p_2}$$

На рисунке 1.16 представлены качественные кривые $u_C(t)$, $i(t)$, и $u_L(t)$, соответствующие апериодическому переходному процессу при $u_C(0) = 0$.

Для критического режима записать:

$$u_C(t) = U_0 + (A_1 + A_2 t) e^{pt}$$

При $t = 0$

$$u_C(0) - U_0 = A_1;$$

$$pA_1 + A_2 = 0.$$

Таким образом: $u_C(t) = U_0 + (U_0 - u_C(0)) \left(1 + \frac{R}{2L} t \right) e^{pt}$

$$\text{и } i(t) = C \frac{du_C}{dt} = (A_2 e^{pt} + pA_1 e^{pt} + pA_2 t e^{pt}) = CpA_2 t e^{pt} = \frac{U_0 - u_C(0)}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t}$$

Для колебательного переходного процесса: $u_C(t) = U_0 + A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Для нахождения постоянных интегрирования запишем ($t = 0$):

$$u_C(0) - U_0 = A \sin \varphi;$$

$$0 = -\delta A \sin \varphi + A \omega_0 \cos \varphi,$$

откуда $A = (u_C(0) - U_0) / \sin \varphi$ $\operatorname{tg} \varphi = \omega_0 / \delta$

Тогда:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U_0 + \frac{u_C(0) - U_0}{\sin \varphi} e^{-\delta t} (\sin \omega_0 t \cos \varphi + \cos \omega_0 t \sin \varphi) = U_0 + (u_C(0) - U_0) e^{-\delta t} \times \\ &\times \left(\frac{\delta}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t \right) = U_0 + \frac{u_C(0) - U_0}{\omega_0} e^{-\delta t} \sqrt{\omega_0^2 + \delta^2} \sin \left(\omega_0 t + \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\delta} \right) = \\ &= U_0 + \frac{u_C(0) - U_0}{\sqrt{LC} \omega_0} e^{-\delta t} \sin \left(\omega_0 t + \operatorname{arctg} \frac{\omega_0}{\delta} \right); \end{aligned}$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = C(U_0 - u_C(0)) \frac{\omega_0^2 + \delta^2}{\omega_0} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t = \frac{U_0 - u_C(0)}{L \omega_0} e^{-\delta t} \sin \omega_0 t$$

На рисунке 1.16 представлены качественные кривые $u_C(t)$ и $i(t)$, соответствующие колебательному переходному процессу при $u_C(0) = 0$.

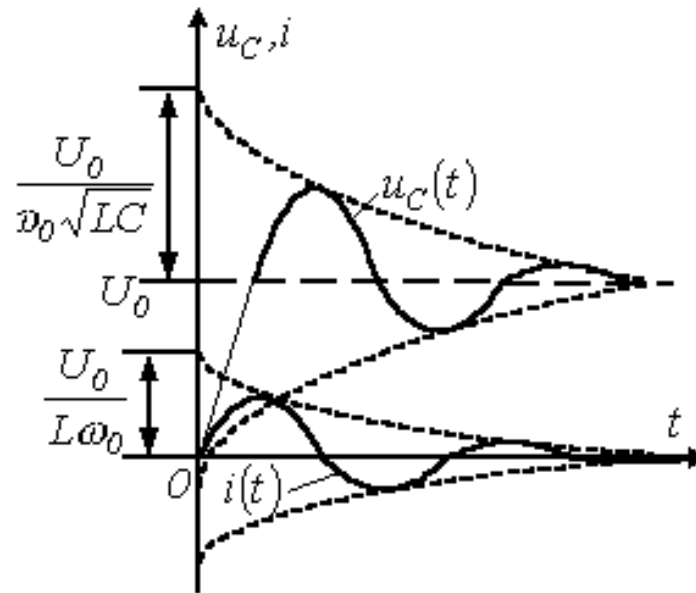


Рисунок 1.16 - Качественные кривые $u_C(t)$, $i(t)$, и $u_L(t)$,

При подключении R-L-C-цепи к источнику синусоидального напряжения для нахождения принужденных составляющих тока в цепи и напряжения на конденсаторе следует воспользоваться символическим методом расчета, в соответствии с которым:

$$\dot{I}_{npm} = \frac{\dot{U}_m}{Z} = \frac{U_m e^{j\varphi_U}}{R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} = I_m e^{j(\varphi_U - \varphi)}$$

$$\dot{U}_{Cnpm} = -j\frac{1}{\omega C} \dot{I}_{npm} = \frac{I_m}{\omega C} e^{j\left(\varphi_U - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)} = U_{Cm} e^{j\left(\varphi_U - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)}$$

где $I_m = U_m / \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$ $\varphi = \arctg(\omega L - 1/\omega C)/R$ $U_{Cm} = I_m / (\omega C)$

Таким образом:

$$i_{np}(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_U - \varphi)$$

$$u_{Cnp}(t) = U_{Cm} \sin\left(\omega t + \varphi_U - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Здесь также возможны три режима:

1. $R > R_{кр};$

2. $R = R_{кр};$

3. $R < R_{кр};$

$p_1 \neq p_2$

$p_1 = p_2 = -\delta$

$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_0$

Наибольший интерес представляет третий режим, связанный с появлением во время переходного процесса собственных колебаний с частотой ω_0 . При этом возможны, в зависимости от соотношения частот собственных колебаний и напряжения источника, три характерные варианта: 1 – $\omega \gg \omega_0$; 2 – $\omega \ll \omega_0$; 3 – $\omega = \omega_0$, – которые представлены на рисунке 1.17,а...1.17,в соответственно.

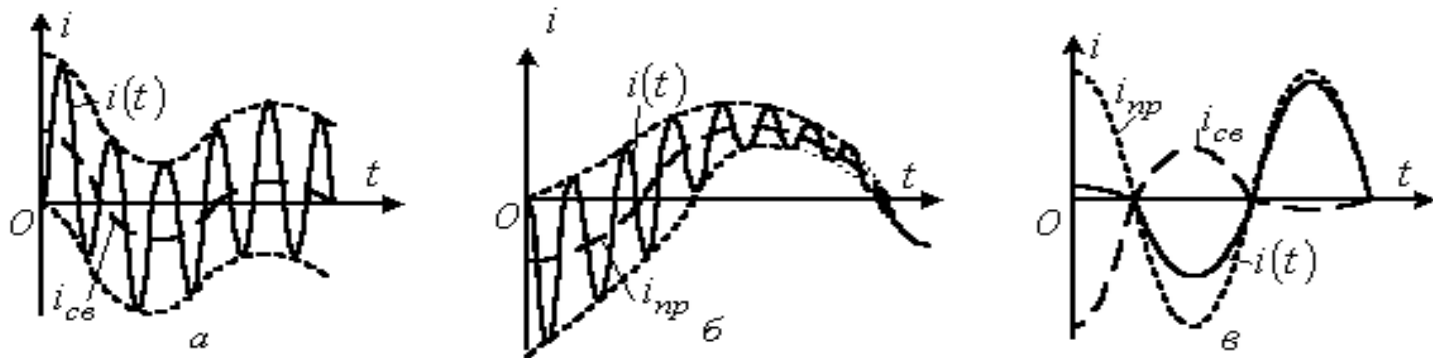


Рисунок 1.17 - Переходной процесс собственных колебаний

План лекции:

- 1.1 Операторный метод расчета переходных процессов;
- 1.2 Изображения производной и интеграла;
- 1.3 Закон Ома в операторной форме;
- 1.4 Законы Кирхгофа в операторной форме;
- 1.5 Переход от изображений к оригиналам.

1.1 Операторный метод расчета переходных процессов

Сущность операторного метода заключается в том, что функции $f(t)$ вещественной переменной t , которую называют **оригиналом**, ставится в соответствие функция $F(p)$ комплексной переменной $p = s + j\omega$, которую называют **изображением**. В результате этого производные и интегралы от оригиналов заменяются алгебраическими функциями от соответствующих изображений (дифференцирование заменяется умножением на оператор p , а интегрирование – делением на него), что в свою очередь определяет переход от системы интегро-дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных. При решении этих уравнений находятся изображения и далее путем обратного перехода – оригиналы. Важнейшим моментом при этом в практическом плане является необходимость определения только независимых начальных условий, что существенно облегчает расчет переходных процессов в цепях высокого порядка по сравнению с классическим методом.

Изображение $F(p)$ заданной функции $f(t)$ определяется в соответствии с прямым преобразованием Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

В сокращенной записи соответствие между изображением и оригиналом обозначается, как: $F(p) \doteq f(t)$ или $F(p) = L\{f(t)\}$.

Следует отметить, что если оригинал $f(t)$ увеличивается с ростом t , то для сходимости интеграла необходимо более быстрое убывание модуля e^{-st} . Функции, с которыми встречаются на практике при расчете переходных процессов, этому условию удовлетворяют.

В качестве примера в таблице 1.3 приведены изображения некоторых характерных функций, часто встречающихся при анализе нестационарных режимов.

Таблица 1.3 - Изображения типовых функций

Оригинал $f(t)$	A	$e^{\alpha t}$	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$\operatorname{sh} \alpha t$	$\operatorname{ch} \alpha t$
Изображение $F(p)$	$\frac{A}{p}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$

Некоторые свойства изображений:

1. Изображение суммы функций равно сумме изображений слагаемых:

$$\sum_{k=1}^n f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^n F_k(p)$$

2. При умножении оригинала на коэффициент на тот же коэффициент умножается изображение:

$$Af(t) \stackrel{\bullet}{=} AF(p)$$

С использованием этих свойств и данных таблицы 1.3, можно показать, например, что:

$$U_0(1 - e^{-\alpha t}) \stackrel{\bullet}{=} \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p + \alpha}$$

1.2 Изображения производной и интеграла

В курсе математики доказывается, что если $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$, то $df/dt \stackrel{\bullet}{=} pF(p) - f(0)$, где $f(0)$ - начальное значение функции $f(t)$.

Таким образом, для напряжения на индуктивном элементе можно записать:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \stackrel{\bullet}{=} LpI(p) - Li(0)$$

или при нулевых начальных условиях:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \stackrel{\bullet}{=} LpI(p)$$

Отсюда **операторное сопротивление катушки индуктивности:** $Z(p) = Lp$

Аналогично для интеграла: если $f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p)$, то $\int_0^t f(t)dt \stackrel{\bullet}{=} \frac{F(p)}{p}$

С учетом ненулевых начальных условий для напряжения на конденсаторе можно записать:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0)$$

Тогда

$$u_C(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{I(p)}{Cp} + \frac{u_C(0)}{p}$$

или при нулевых начальных условиях $u_C(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{Cp} I(p)$

откуда **операторное сопротивление конденсатора:** $Z(p) = \frac{1}{Cp}$

1.3 Закон Ома в операторной форме

Пусть имеем некоторую ветвь m - n (см. рисунок 1.18), выделенную из некоторой сложной цепи. Замыкание ключа во внешней цепи приводит к переходному процессу, при этом начальные условия для тока в ветви и напряжения на конденсаторе в общем случае ненулевые.

Для мгновенных значений переменных можно записать:

$$u_{mn}(t) = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) - e(t)$$

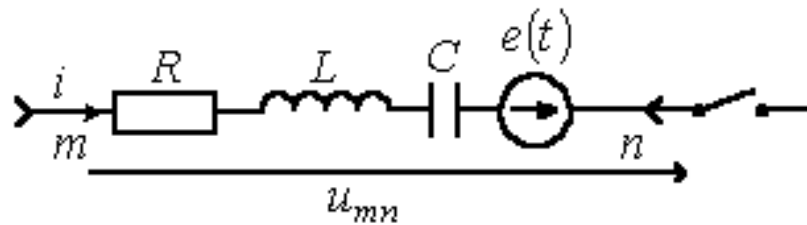


Рисунок 1.18 – Схема для анализа

Тогда на основании приведенных выше соотношений получим:

$$U_{mn}(p) = I(p) \left(R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) - Li(0) + \frac{u_C(0)}{p} - E(p)$$

Отсюда:

$$I(p) = \frac{U_{mn}(p) + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p} + E(p)}{Z(p)}$$

где $Z(p) = R + Lp + \frac{1}{Cp}$ - операторное сопротивление рассматриваемого участка цепи.

Следует обратить внимание, что операторное сопротивление $Z(p)$ соответствует комплексному сопротивлению $\underline{Z}(j\omega)$ ветви в цепи синусоидального тока при замене оператора p на $j\omega$.

Это математическая запись закона Ома для участка цепи с источником ЭДС в операторной форме. В соответствии с ним для ветви на рисунке 1.18 можно нарисовать операторную схему замещения, представленную на рисунке 1.19.

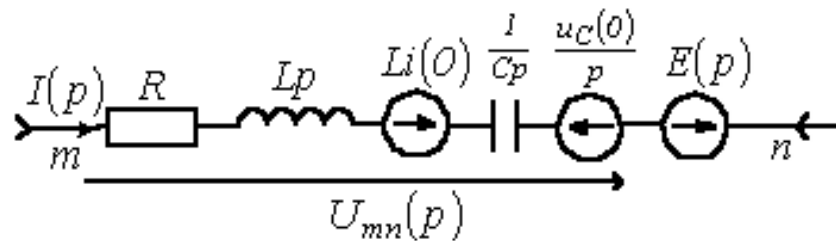


Рисунок 1.19 - Операторная схема замещения

1.4 Законы Кирхгофа в операторной форме

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма изображений токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k(p) = 0$$

Второй закон Кирхгофа: Алгебраическая сумма изображений ЭДС, действующих в контуре, равна алгебраической сумме изображений напряжений на пассивных элементах этого контура:

$$\sum_{k=1}^m E_k(p) = \sum_{k=1}^m U_k(p)$$

При записи уравнений по второму закону Кирхгофа следует помнить о необходимости учета ненулевых начальных условий (если они имеют место). С их учетом последнее соотношение может быть переписано в развернутом виде:

$$\sum_{k=1}^m \left(E_k(p) + L_k i_k(0) - \frac{u_{Ck}(0)}{p} \right) = \sum_{k=1}^m \left(R + Lp + \frac{1}{Cp} \right) I_k(p)$$

В качестве примера запишем выражение для изображений токов в цепи на рисунке 1.20 для двух случаев:

1. $u_C(0) = 0$; 2. $u_C(0) \neq 0$.

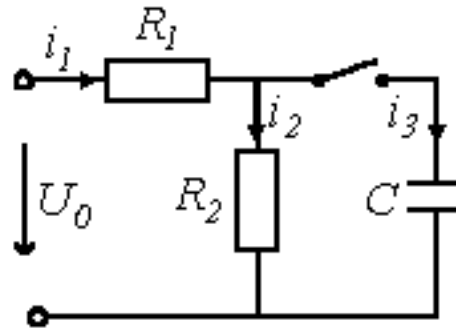


Рисунок 1.20 – Схема для анализа

В первом случае в соответствии с законом Ома:

$$I_1(p) = \frac{U_0(p)}{R_1 + \frac{R_2 \frac{1}{Cp}}{R_2 + \frac{1}{Cp}}} = \frac{U_0(1 + R_2 Cp)}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)}$$

Тогда
$$I_2(p) = I_1(p) \frac{1}{R_2 Cp + 1} = \frac{U_0}{p(R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2)}$$

$$\text{и } I_3(p) = I_1(p) \frac{R_2 Cp}{R_2 Cp + 1} = \frac{U_0 R_2 C}{R_1 R_2 Cp + R_1 + R_2}$$

Во втором случае, т.е. при $u_C(0) \neq 0$, для цепи на рисунке 1.20 следует составить операторную схему замещения, которая приведена на рисунке 1.21. Изображения токов в ней могут быть определены любым методом расчета линейных цепей, например, методом контурных токов:

$$\begin{aligned} I_{11}(p)(R_1 + R_2) - I_{22}(p)R_2 &= \frac{U_0}{p}; \\ -I_{11}(p)R_2 + I_{22}\left(R_2 + \frac{1}{Cp}\right) &= -\frac{u_C(0)}{p}, \end{aligned}$$

откуда $I_1(p) = I_{11}(p)$, $I_2(p) = I_{11}(p) - I_{22}(p)$ и $I_3(p) = I_{22}(p)$.

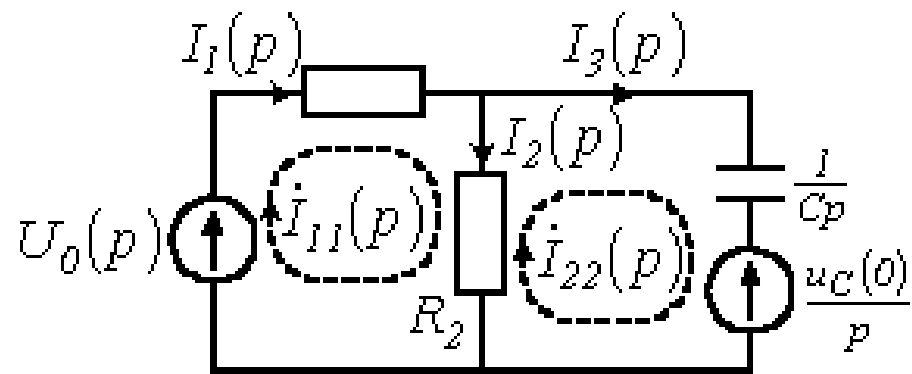


Рисунок 1.21 – Операторная схема замещения

1.5 Переход от изображений к оригиналам

Переход от изображения искомой величины к оригиналу может быть осуществлен следующими способами:

1. Посредством обратного преобразования Лапласа:
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p) e^{pt} dp$$

Которое представляет собой решение интегрального уравнения и сокращенно записывается, как: $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$.

На практике этот способ применяется редко.

2. По таблицам соответствия между оригиналами и изображениями.

В специальной литературе имеется достаточно большое число формул соответствия, охватывающих практически все задачи электротехники. Согласно данному способу необходимо получить изображение искомой величины в виде, соответствующем табличному, после чего выписать из таблицы выражение оригинала.

Например, для изображения тока в цепи на рисунке 1.22 можно записать:

$$I(p) = \frac{U_0(p)}{Z(p)} = \frac{U_0}{p(R + pL)} = \frac{U_0}{R} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \right)$$

Тогда в соответствии с данными таблицы 1.3:

$$i(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

что соответствует известному результату.

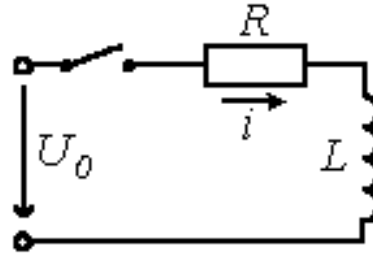


Рисунок 1.22 – Схема для анализа

3. С использованием формулы разложения.

Пусть изображение $F(p)$ искомой переменной определяется отношением двух полиномов:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots a_1 p + a_0}$$

где $m < n$.

Это выражение может быть представлено в виде суммы простых дробей:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p - p_k}$$

Таким образом:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{F_1'(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}$$

В заключение лекции отметим, что для нахождения начального $f(0)$ и конечного $f(\infty)$ значений оригинала можно использовать **предельные соотношения**.

Контрольные вопросы

1. Чем обусловлены переходные процессы?
2. Как определяется порядок дифференциального уравнения, описывающего переходный процесс?
3. Для каких цепей применим классический метод расчета переходных процессов?
4. Для каких цепей применим классический метод расчета переходных процессов?
5. Доказать законы коммутации: $i_L(0+) = i_L(0-)$ и $u_C(0+) = u_C(0-)$ с энергетических позиций;
6. Как можно определить постоянную времени в цепи с одним накопителем энергии по осциллограмме тока или напряжения в какой-либо ветви?
7. Влияет ли на постоянную времени цепи тип питающего устройства: источник напряжения или источник тока?
8. Как влияет на характер переходного процесса в R-L-C-контуре величина сопротивления R и почему?
9. Может ли в одной части линейной цепи протекать колебательный переходный процесс, а в другой – апериодический?
10. Почему можно разрывать ветвь с конденсатором и нельзя – ветвь с индуктивным элементом?
11. Почему корни характеристического уравнения не зависят от того, относительно какой переменной было записано дифференциальное уравнение?

Список литературы

1. Теоретические основы электротехники: учебник для студентов вузов энергетических и электротехнических специальностей / А. Н. Горбунов [и др.]; под ред. А. В. Кравцова, 2022. - 412 с.

2. Электротехника и электроника: учебник для студентов вузов энергетических и электротехнических специальностей / А. Н. Горбунов [и др.]; под ред. А. В. Кравцова, 2022. - 614 с.

3. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи [Текст]: учебник для студентов вузов, аспирантов, обучающихся по направлению подготовки "Электротехника, электромеханика и электротехнологии", "Электроэнергетика" / Л. А. Бессонов, 2023. - 701 с.

4. Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле: Учебник для студентов вузов, обучающихся по направлениям "Электротехника" / Л.А. Бессонов, 2023. - 316 с.

5. Теоретические основы электротехники: учебник / А.Д. Мехтиев [и др.]; Кафедра "Энергетические системы". - Караганда: КарГТУ, 2017.

6. Johnson, Don. Fundamentals of Electrical Engineering I [Электронный ресурс] / Don Johnson, 2017. - 334/1 с.

7. Basics of Electronics: tutorial / A.V. Taranov [et al.]; Karaganda state technical university. - Karaganda: KSTU Publishing House, 2020. - 148 p.

Спасибо за внимание!

Желаю успехов в изучении данного онлайн-курса!