

Дәріс 2.1 Нүкте кинематикасы.

Дәрістің мақсаты – теориялық механиканың оқу процесінде орнын көрсету және нүкте, қатты дене кинематикасының негіздерін айтып беру

Дәрістің жоспары

1. Теориялық механикаға кіріспе. Кинематиканың негігі мәселесі
2. Нүкте қозғалысын анықтаудың әдістері
3. Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы
4. Қатты дененің айналмалы қозғалысы.
5. Кинематиканың негізгі теоремасы

Теориялық механика (Галилей–Ньютон классикалық механикасы) механикалық қозғалыс пен материалық денелердің өзара - әсерлесулерінің жалпы заңдылықтары туралы ғылым. Физиканың бір бөлімі бола тұра теориялық механика өзінің табиғат тану мен техникадағы көлемді және маңызды қолдануларының, техниканың негіздерінің бірі болуының арқасында кеңінен дамып дербес пән ретінде қалыптасты.

Бастауын техникадан алып, онымен бірге дамыған теориялық механика техникалық ғылымдармен әсіресе тығыз байланысты, механиканың заңдары мен әдістерін олардың бастапқы негіздерін дәлелдеуге кең қолданумен қатар көптеген нақты инженерлік есептеулерді жүргізуде кеңінен қолданады.

Материалық нүктенің, механикалық жүйенің және абсолют қатты дененің механикалық қозғалысын оларға әсер етуші күштерден тәуелсіз зерттейтін теориялық механиканың бөлімін **кинематика** деп атайды.

Кинематиканың негізгі мәселесі - қозғалушы геометриялық бейненің (нүкте, дене, жүйе) кез келген уақыт кезеңіндегі кеңістіктегі орнын көрсету және оның қозғалысының кинематикалық сипаттамаларын анықтау.

Механикалық қозғалыс, яғни кеңістіктегі материалық дененің орын ауыстыруы, қандай да болмасын денеге қатысты анықталады. Бұл дене санақ дене деп аталады. Санақ денемен координаттар жүйесін байланыстырып, оған қатысты материалық дененің немесе денелер жүйесінің уақыт өтуімен қозғалысын қарастырады. Уақыттың санау басы еркінше таңдалады. Денемен байланыстырған таңдап алған координат санақ жүйесі ондағы қабылдаған уақыттың санауымен бірге санақ жүйесін құрайды.

Кинематикада механикалық қозғалысты зерттеу материалық денелердің қозғалыстары берілген жағдайда мүмкін. Материалық дененің қозғалысын беруі дегеніміз кез келген уақыттың сәтінде таңдалған санақ жүйедегі қарастырылатын материалық дененің орнын бір мәнді анықтауының әдісін немесе алгоритмді көрсету.

Материалық нүкте – материалық дененің өлшемдері қарастырылатын есепте ескермеуге болатын жағдайдағы қарапайым моделі (үлгісі); материалық нүкте түсініктемесі кинематикада геометриялық (массасыз) нүктемен теңбе – тең.

Абсолют қатты дене - материалық дененің кез келген екі нүктесінің арақашықтығын өзгертпей сақтайтын дене (материалық нүктелер жүйесі түріндегі моделі).

Қозғалыстың берілу әдістеріне байланысты нүктенің қозғалыс теңдеулерінің түрі, саны әр түрлі болады. Олар векторлық және скалярлық теңдеулер болуы мүмкін. Кинематикада нүкте қозғалысы үш түрлі: векторлық, натуралдық (табиғи) және координаттық әдістерімен берілуі мүмкін. Векторлық әдіс көбіне теориялық мәселелерді зерттеуде, ал соңғы екеуі есептерді шешуге жиі қолданылады.

Қозғалыс кезінде радиус-вектордың бағыты да, шамасы да өзгеріп отырады, ал әрбір уақыт кезеңіндегі оның белгілі бір бағыты мен шамасы болады. Яғни радиус-вектор t уақытқа тәуелді функция болады

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Бұл теңдеу нүкте қозғалысының векторлық теңдеуі деп аталады. Егер радиус-вектор тұрақты ($\vec{r} = const$) болса, онда нүкте тыныштықта тұрады. Бұл теңдеумен нүкте қозғалысының барлық кинематикалық сипаттамаларын табуға, яғни қозғалысты толық зерттеуге болады.

Анықтама. Уақыт өткен сайын қозғалушы M нүктесінен біртіндеп дәл келіп отыратын кеңістік нүктелерінің геометриялық орнын (қисығын) сол нүктенің **траекториясы (ізі)** деп аталады.

Нүктенің кез келген уақыт кезеңіндегі (лездік) **жылдамдығы** оның радиус-векторынан уақыт бойынша алынған бірінші туындыға тең болады.

$\bar{v}$ жылдамдығы сол нүктеде траекторияға жүргізілген жанаманың бойымен қозғалыстың бағытына қарай бағытталады.

Нүктенің кез келген уақыт кезеңіндегі үдеуі оның жылдамдығынан уақыт бойынша алынған бірінші туындысына, не болмаса нүкте радиус-векторының уақыт бойынша алынған екінші туындысына тең.

Материалық нүктенің кеңістіктегі орны белгілеп алынған декарттық координаттар жүйесіндегі X, Y, Z координаттары арқылы анықталады :

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t).$$

Бұл теңдеулер - нүкте қозғалысының теңдеулері. Траекторияның теңдеуін координаттық түрде алу үшін осы теңдеулерден t уақытты жою керек.

Жылдамдық векторы мына өрнекпен анықталады:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}.$$

Жылдамдық векторының модулі:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Нүктенің үдеуі: $\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}$. Үдеу векторының модулі:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Нүктенің траекториясы беріліп, нүктенің берілген траектория бойымен **қозғалысының заңы** деп аталатын $S = S(t)$ функциясы белгілі болса, нүктенің қозғалысы табиғи әдіспен берілген дейміз. Жылдамдық мынаған тең болады: $v_\tau = |\dot{S}|$. Үдеудің жанама және бас нормаль бағыттарына екі құрушыға жіктеледі. Олай болса, үдеудің табиғи үшжақтықтың өстеріне проекциялары мына түрге келеді:

$$\left. \begin{aligned} a_\tau &= \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}; \\ a_n &= \frac{v_\tau^2}{\rho} = \frac{s^2}{dt^2}; \\ a_b &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Мұнда $\bar{a}_\tau$ - нүктенің жанама үдеуі; $\bar{a}_n$ - нормаль үдеуі. Үдеудің модулі:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\ddot{s}^2 + \frac{\dot{s}^4}{\rho^2}}.$$

Ескерту. Жанама үдеу жылдамдықтың шамасының өзгеруін, ал нормаль үдеу жылдамдық бағытының өзгеруін сипаттайды.

Қатты дене қозғалысының қарапайым екі түрі бар. Олар ілгерілемелі және айналмалы қозғалыстар. Қатты дененің қандай да болмасын жеке алынған басқа қозғалысы осы екі қозғалыстың өз-өздерімен немесе бір-бірімен қосындысы болып табылады.

Анықтама. Қозғалушы денемен өзгерместей бекітілген кез келген кесінді өзіне-өзі параллель қала берсе қатты дене қозғалысын **ілгерілемелі қозғалыс** деп атайды.

Ілгерілемелі қозғалыстағы қатты дененің барлық нүктелерінің кез келген уақыт кезеңіндегі кинематикалық сипаттамалары (траекториялары, жылдамдықтары және үдеулері) бірдей. Ілгерілемелі қозғалыстағы дене нүктелерінің траекториялары әр түрлі болуы мүмкін: түзу сызықты және қисық сызықты.

Анықтама. Егер қозғалыстағы дененің кемінде екі нүктесі тыныштық қалпын сақтайтын болса, онда осы дене қозғалмайтын өске қатысты **айналмалы қозғалыс** жасайды. Осы екі нүкте арқылы жүргізілген түзуді дененің **айналу өсі** деп атайды.

Уақыттың функциясы ретінде берілген айналу бұрышы

$$\varphi = \varphi(t)$$

қатты дененің айналу заңы немесе айналу теңдеуі деп аталады. Бұл айналу тұтас қатты дененің негізгі кинематикалық сипаттамасы болып табылады. Дененің бұрыштық жылдамдығы

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \text{ бұрыштық үдеуі } \varepsilon = \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \dot{\tilde{\omega}} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \ddot{\varphi}. \text{ Бұл шамалар тұтас қатты денеге тең.}$$

Айналу кезінде қатты дененің барлық нүктелерінің жазықтықтары айналу өсіне перпендикуляр, және центрлері айналу өсінде жататын шеңберлерді сызады.

Айналмалы қозғалыстағы қатты дененің кез келген нүктесінің алгебралық жылдамдығы мынадай болады:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{S}} = h\dot{\varphi} = h\omega$$

яғни дененің бұрыштық жылдамдығы мен нүктенің айналу өсінен қашықтығының көбейтіндісіне тең. Сонымен, кез келген уақыт кезіндегі дене нүктелерінің жылдамдықтары олардың айналу радиустарына тура пропорционал.

Жоғарыда нүкте жылдамдығының шамасы және бағыты туралы айтылғандарды ескерсек,

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{r}}$$

екенін көру қиын емес. Бұл формула *Эйлер формуласы* деп аталады. Дене нүктелерінің үдеулері $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}_{\tau} + \bar{\mathbf{a}}_n$. Олардың шамалары $a_{\tau} = \varepsilon \cdot h, a_n = \omega^2 h$.

Нүктенің толық үдеудің модулі

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{\varepsilon^2 h^2 + \omega^4 h^2} = \sqrt{h^2 (\varepsilon^2 + \omega^4)} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Көп жағдайларда түрлі машиналардың минуттық айналу саны n беріледі. Одан бұрыштық жылдамдыққа көшу үшін

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ (рад/с)}$$

өрнегі пайдаланады, ал айналу бұрышы дененің айналу саны N арқылы былай анықталады

$$\varphi = 2\pi N.$$

ГЛОССАРИЙ

Теориялық механика	Теоретическая механика	Classical mechanics
Механикалық қозғалыс	Механическое движение	Mechanical motion
Материалық нүкте	Материальная точка	Particle
Санақ жүйе	Система отсчета	Frame of reference
Кинематика	Кинематика	Kinematics
Нүктенің траекториясы	Траектория точки	Trajectory of particle
Жылдамдық	Скорость	Velocity
Үдеу	Ускорение	Acceleration
Табиғи үшжақтық өстері	Оси естественного трехгранника	Axes of a natural trihedral
Жанама үдеу	Касательное ускорение	Tangential acceleration

Нормаль үдеу	Нормальное ускорение	Normal acceleration
Абсолют қатты дене	Абсолютно твердое тело	Rigid body
Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы	Поступательное движение твердого тела	Translator motion of rigid body
Тұрақты өске қатысты қатты дененің айналмалы қозғалысы	Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси	Motion of rigid body about fixed axis
Дененің айналу бұрышы	Угол поворота тела	Angle of rotation
Бұрыштық жылдамдық	Угловая скорость	Angular velocity
Бұрыштық үдеу	Угловое ускорение	Angular acceleration

Өзіндік жұмысқа арналған сұрақтар:

1. Нүктенің қисық сызықты s координаттың және оның жүрген жолының айырмашылығы қандай?
2. Жанама және нормаль үдеулер жылдамдықтың өзгеруін қалай сипаттайды?
3. Бірқалыпты қозғалатын нүктенің үдеуі бола ма?
4. «Үдеумен болатын нүктенің қозғалысы» және «Нүктенің үдемелі қозғалысы» деген ұғымдар бірдей ме?
5. Нүктенің қозғалысы үдемелі немесе кемімелі екенін қалай анықтауға болады?
6. Қозғалыстағы қатты дененің екі нүктесінің жылдамдықтары және үдеулері бірдей. Бұл дененің қозғалысы ілгерілемелі деп айтуға бола ма?
7. Дене нүктелерінің траекториялары - шеңберлер. Дене айналмалы қозғалыс (немесе ілгерілемелі қозғалыс) жасайды деп айтуға бола ма?
8. Қозғалмайтын өске қатысты айналып тұрған дененің кез келген нүктесінің жылдамдық және үдеу векторлары өзара перпендикуляр болуы мүмкін ба? Бір түзуімен бағытталған мүмкін ба?

Ұсынылатын әдебиеттер

1. Иманбаева Л.Х., Теориялық механика және роботтық техниканың элементтері, Караганды, КарМТУ, 2019. – 308б.
2. Иманбаева Л.Х., Орынтаева Г.Ж., Ганюков А.А., Безкоровайный П.Г. Теориялық механика (курстық өздік жұмыстары және тәжірибелік сабақтар). Караганды, КарТУ, 2016,- 96 б.
3. Иманбаева Л.Х., Орынтаева Г.Ж., Доненбаев Б.С., Куанов И.С. Теориялық механиканың барлық бөлімдеріне қатысты студенттердің алған білімдерін бақылау. Караганды, КарТУ, 2020,- 100 б.

Дәріс 2.2 Нүкте кинематикасы. Нүкте қозғалысының координаталық және табиғи тәсілдерінің арасындағы байланыстар

Дәрістің мақсаты – теориялық механиканың оқу процесінде орнын көрсету және нүкте, қатты дене кинематикасының негіздерін айтып беру

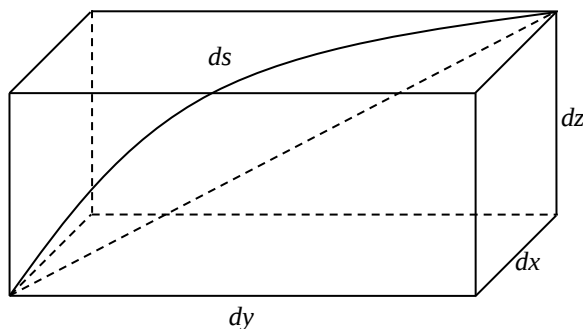
Дәрістің жоспары

1. Теориялық механикаға кіріспе. Кинематиканың негігі мәселесі
2. Нүкте қозғалысын анықтаудың әдістері
3. Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы
Қатты дененің айналмалы қозғалысы.
4. Кинематиканың негізгі теоремасы

Нүкте қозғалысының теңдеуі координаталық тәсілмен берілген

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Нүктенің доғалық координатасын, жанама, нормаль үдеулерін және қисықтық радиусын анықтау керек. Ең алдымен (II.1.7), (II.1.9) формулаларды пайдаланып, нүктенің жылдамдығы мен үдеуін анықтаймыз. Нүктенің траекториясын берілген теңдеулерден уақытты шығарып тастау арқылы табамыз. Доғалық координатаны табу үшін, траекторияның dS – доғалық элементін қарастырамыз. Ол, нүктенің элементарлы координаттарынан құрылған параллелепипедтің диагоналіне жақын орналасқан.



5.

6. II.9-сурет

Суреттен кесінділердің арасындағы геометриялық қатынасты құрастырамыз:

$$dS = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

(II.1.7)-ші теңдіктен:

$$dx = v_x dt = \frac{dx}{dt} \cdot dt, \quad dy = v_y dt = \frac{dy}{dt} \cdot dt, \quad dz = v_z dt = \frac{dz}{dt} \cdot dt.$$

Осыларды (а)-ға қойып табамыз.

$$7. \quad S = \pm \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt + S_0. \quad (\text{II.1.16'})$$

(II.1.16)-шы формула нүктенің доғалық координатасын анықтайды.

Нүктенің жанама үдеуін анықтаймыз:

$$8. \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{a_x v_x + a_y v_y + a_z v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}.$$

Нормаль үдеуі тең болады:

$$9. \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2},$$

немесе

$$a_n = \sqrt{\frac{(v_x a_y - v_y a_x)^2 + (v_y a_z - v_z a_y)^2 + (v_z a_x - v_x a_z)^2}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}.$$

Траекторияның берілген нүктедегі қисықтық радиусы тең болады:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}.$$

Нүкте қозғалысының дербес түрлері

Нүкте қозғалысының түрлерін оның жанама және нормаль үдеулеріне қатысты анықтаймыз.

1. $a_\tau = 0$; $a_n = 0$ қозғалыс кезінде нүкте жылдамдығының шамасы да, бағыты да өзгермейді. Нүкте бірқалыпты түзу сызықты қозғалыс жасайды:

$$v = v_0 = \text{const}, \quad x = x_0 + v_0 t.$$

2. $a_\tau \neq 0$; $a_n = 0$ нүкте жылдамдығының шамасы өзгереді де, ал бағыты тұрақты, қозғалыс айнымалы түзу сызықты болады:

$$a_\tau = a_{\tau_0}, \quad v = v_0 \pm a_{\tau_0} t, \quad x = x_0 + v_0 t \pm \frac{a_{\tau_0} t^2}{2}.$$

Егер жылдамдық және үдеу векторларының бағыты бірдей болса, нүктенің қозғалысы үдемелі болады, ал олардың бағыттары қарама-қарсы болса кемімелі болады.

3. $a_\tau = 0$; $a_n \neq 0$. Нүкте жылдамдығының шамасы өзгермейді, ал бағыты өзгеріп отырады. Нүкте бірқалыпты қисық сызықты қозғалыс жасайды.

$$v = v_0 = \text{const}, \quad s = s_0 + v_0 t.$$

4. $a_\tau \neq 0$; $a_n \neq 0$. Нүкте жылдамдығының шамасы мен бағыты өзгереді, қозғалыс айнымалы қисық сызықты болады.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad v = v_0 \pm a_\tau t,$$

$$s = s_0 + v_0 t \pm \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

Қарастырылған нүкте қозғалысының дербес түрлерінен мынадай қорытынды шығаруға болады: нүктенің жанама үдеуі жылдамдықтың шамасының өзгеруін сипаттайды, ал нормаль үдеуі бағытының өзгеруін көрсетеді.

ГЛОССАРИЙ

Теориялық механика	Теоретическая механика	Classical mechanics
Механикалық қозғалыс	Механическое движение	Mechanical motion
Материалық нүкте	Материальная точка	Particle
Санақ жүйе	Система отсчета	Frame of reference
Кинематика	Кинематика	Kinematics
Нүктенің траекториясы	Траектория точки	Trajectory of particle
Жылдамдық	Скорость	Velocity
Үдеу	Ускорение	Acceleration
Табиғи үшжақтық өстері	Оси естественного трехгранника	Axes of a natural trihedral
Жанама үдеу	Касательное ускорение	Tangential acceleration

Нормаль үдеу	Нормальное ускорение	Normal acceleration
Абсолют қатты дене	Абсолютно твердое тело	Rigid body
Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы	Поступательное движение твердого тела	Translator motion of rigid body
Тұрақты өске қатысты қатты дененің айналмалы қозғалысы	Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси	Motion of rigid body about fixed axis
Дененің айналу бұрышы	Угол поворота тела	Angle of rotation
Бұрыштық жылдамдық	Угловая скорость	Angular velocity
Бұрыштық үдеу	Угловое ускорение	Angular acceleration

Өзіндік жұмысқа арналған сұрақтар:

1. Нүктенің қисық сызықты s координаттың және оның жүрген жолының айырмашылығы қандай?
2. Жанама және нормаль үдеулер жылдамдықтың өзгеруін қалай сипаттайды?
3. Бірқалыпты қозғалатын нүктенің үдеуі бола ма?
4. «Үдеумен болатын нүктенің қозғалысы» және «Нүктенің үдемелі қозғалысы» деген ұғымдар бірдей ме?
5. Нүктенің қозғалысы үдемелі немесе кемімелі екенін қалай анықтауға болады?
6. Қозғалыстағы қатты дененің екі нүктесінің жылдамдықтары және үдеулері бірдей. Бұл дененің қозғалысы ілгерілемелі деп айтуға бола ма?
7. Дене нүктелерінің траекториялары - шеңберлер. Дене айналмалы қозғалыс (немесе ілгерілемелі қозғалыс) жасайды деп айтуға бола ма?
8. Қозғалмайтын өске қатысты айналып тұрған дененің кез келген нүктесінің жылдамдық және үдеу векторлары өзара перпендикуляр болуы мүмкін ба? Бір түзуімен бағытталған мүмкін ба?

Ұсынылатын әдебиеттер

1. Иманбаева Л.Х., Теориялық механика және роботтық техниканың элементтері, Караганды, КарМТУ, 2019. – 308б.
2. Иманбаева Л.Х., Орынтаева Г.Ж., Ганюков А.А., Безкоровайный П.Г. Теориялық механика (курстық өздік жұмыстары және тәжірибелік сабақтар). Караганды, КарТУ, 2016,- 96 б.
3. Иманбаева Л.Х., Орынтаева Г.Ж., Доненбаев Б.С., Куанов И.С. Теориялық механиканың барлық бөлімдеріне қатысты студенттердің алған білімдерін бақылау. Караганды, КарТУ, 2020,- 100 б.

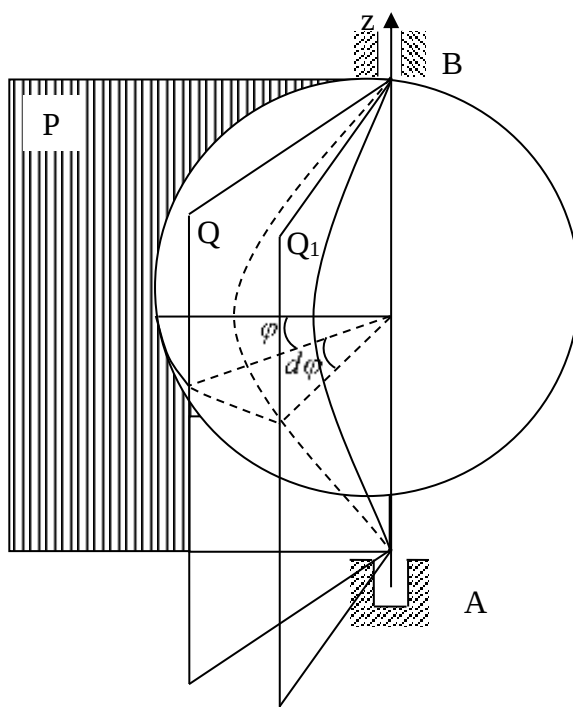
Дәріс 2.3 Нүкте кинематикасы. Қатты дененің айналмалы қозғалысы. Айналмалы қозғалыстың кинематикалық сипаттамалары

Дәрістің мақсаты – теориялық механиканың оқу процесінде орнын көрсету және нүкте, қатты дене кинематикасының негіздерін айтып беру

Дәрістің жоспары

1. Теориялық механикаға кіріспе. Кинематиканың негігі мәселесі
2. Нүкте қозғалысын анықтаудың әдістері
3. Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы
- Қатты дененің айналмалы қозғалысы.
4. Кинематиканың негізгі теоремасы

Ең кем дегенде екі бекітулі нүктесі бар қатты дененің қозғалысын айналмалы қозғалыс деп атайды. Екі бекітілген нүкте арқылы өтетін түзуді дененің айналу өсі деп аталынады. Дененің өстің бойында жатпайтын әрбір нүктесі шеңбер сызады, оның жазықтығы айналу өсіне перпендикуляр орналасып, центрі айналу өсінде жатады. Айналу өсін Z – пен белгілейміз.



П.23-сурет

Z – өсі арқылы екі жазықтықтар: қозғалмайтын P жазықтығын және денемен бекітілген, бірге қозғалатын Q жазықтығын жүргіземіз. Дене қозғалған кезде P және Q жазықтарының арасында екі жақты бұрыш φ пайда болады, оны қатты дененің айналу бұрышы деп атайды.

φ бұрышы берілген қатты дененің кез келген уақыт мезгіліндегі орнын бір мәнді анықтайды, яғни ол уақыттың бір мәнді, үздіксіз функциясы болып табылады

$$\varphi = \varphi(t).$$

Осы теңдеу қатты дененің айналмалы қозғалысының айналу заңы деп аталады. Айналу бұрышының сан мәні радианмен өлшенеді:

$$1 \text{ радиан} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 17' 44,8''.$$

Кейбір жағдайларда дененің өсті айналу саны N беріледі, онда айналу бұрышы тең болады:

$$\varphi = 2\pi N.$$

Дененің бұрыштық жылдамдығы

Уақытқа байланысты айналу бұрышының өзгеру шапшаңдығын орташа бұрыштық жылдамдық көрсетеді. Дененің t уақытына сәйкес орыны φ бұрышымен, ал уақыттың $t_1 = t + \Delta t$ мезгіліндегі орыны $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$ мен анықталынады. Орташа бұрыштық жылдамдық тең болады:

$$\omega_{opt} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_1 - \varphi}{t_1 - t}, \quad (1)$$

мұндағы $\Delta\varphi$ - айналу бұрышының өсімшесі, суреттегі Q және Q_1 жазықтықтарының арасындағы бұрыш.

Дененің нақтылы бұрыштық жылдамдығы, орташа бұрыштық жылдамдықтың шегіне тең:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2)$$

Қатты дененің айналмалы қозғалысының бұрыштық жылдамдығы айналу бұрышының уақыт бойынша бірінші туындысына тең.

Дененің бұрыштық үдеуі

Дәл осылай ойлап дененің айналмалы қозғалысының орташа бұрыштық үдеуді анықтаймыз:

$$\varepsilon_{opt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_1 - \omega}{t_1 - t}, \quad (3)$$

мұндағы $\Delta\omega$ - бұрыштық жылдамдықтың өсімшесі. Орташа бұрыштық үдеудің $\Delta t \rightarrow 0$ ұмтылғандағы шегі дененің нақтылы бұрыштық үдеуін береді.

Қатты дененің айналмалы қозғалысының бұрыштық үдеуі, бұрыштық жылдамдықтың уақыт бойынша бірінші туындысына немесе айналу бұрышының уақыт бойынша екінші туындысына тең:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (4)$$

Бұрыштық жылдамдық пен бұрыштық үдеудің бірлік өлшемдері:

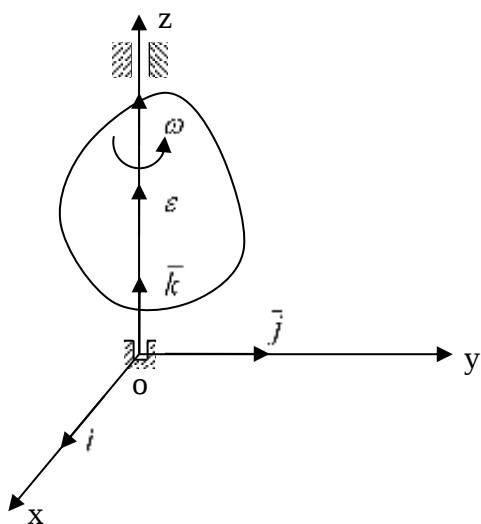
$$\omega \left\{ \frac{rad}{c} \right\}, \quad \varepsilon \left\{ \frac{rad}{c^2} \right\}.$$

Қатты дененің айналмалы қозғалысының кинематикалық сипаттамаларына: φ – айналу бұрышы; ω – бұрыштық жылдамдық; ε – бұрыштық үдеу жатады.

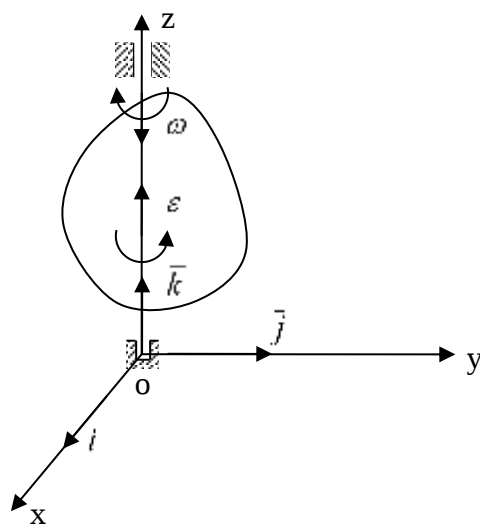
Бұрыштық жылдамдық пен бұрыштық үдеудің векторлары

Бұрыштық жылдамдық векторын дененің айналу өсінің бойына, оның ұшынан вектордың бас нүктесіне қарағанда дененің айналуы сағат тілінің айналуына қарама-қарсы бағытта көрінетіндей етіп орналастырамыз (оң винт ережесі). Вектордың түсу нүктесі айналу өсінің кез келген нүктесінде жатады, яғни дененің бұрыштық жылдамдығының векторы сырғымалы вектор. Егер осы вектор берілсе, онда белгілі болады:

- 1) дененің айналу өсінің орны;
- 2) дененің өсті айналу бағыты;
- 3) мәні вектордың модуліне тең бұрыштық жылдамдықтың абсолют шамасы.



а)



б)

II.24-сурет

Бұрыштық жылдамдық векторы тең болады :

$$\bar{\omega} = \omega_k \bar{k}, \quad (5)$$

мұндағы $\bar{k}$ - z өсінің бірлік векторы.

Бұрыштық үдеуінің векторын анықтау үшін, бұрыштық жылдамдықтан (5) туынды аламыз:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt} \bar{k} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \bar{k}. \quad (6)$$

Дененің айналу өсі қозғалмайтындықтан, $\bar{k} = \text{const}$, сондықтан $\frac{d\bar{k}}{dt} = 0$.

Егер бұрыштық жылдамдық пен бұрыштық үдеу векторлары бір бағытта болса, (сурет (а)) онда дене үдемелі қозғалыс, ал қарама-қарсы бағытта – кемімелі қозғалыс жасайды (сурет (б)).

Айналмалы қозғалыстың жеке түрлері

а) Егер қозғалыс кезінде бұрыштық үдеу $\varepsilon = 0$ болса, онда қатты дене тұрақты бұрыштық жылдамдықпен қозғалады. Дененің мұндай қозғалысын бірқалыпты айналмалы қозғалыс деп атайды.

(2) формуласынан:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0.$$

Осы теңдікті интегралдап, дененің бірқалыпты айналмалы қозғалысының қозғалыс теңдеуін анықтаймыз.

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t. \quad (7)$$

Кейбір жағдайларда бұрыштық жылдамдық бір минуттағы айналу саны n –мен өлшенеді. Бір айналым - 2π радиан, сондықтан

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (8)$$

б) Дененің қозғалысы кезінде оның бұрыштық үдеуі $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$ тұрақты болса, мұндай айналмалы қозғалысты, бірқалыпты айнымалы айналмалы қозғалыс деп атайды.

(7) формуласын бір рет интегралдап, дененің бұрыштық жылдамдығын табамыз:

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon_0 t. \quad (9)$$

Екінші рет (9)-ді интегралдап, қатты дененің қозғалмайтын өске қатысты бірқалыпты айнымалы айналмалы қозғалысының қозғалыс заңын анықтаймыз:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon_0 t^2}{2}. \quad (10)$$

(9), (10) - формуларындағы $\varepsilon_0 > 0$ болса, айналмалы қозғалыс үдемелі, ал $\varepsilon_0 < 0$ болса кемімелі болады.

ГЛОССАРИЙ

Теориялық механика	Теоретическая механика	Classical mechanics
Механикалық қозғалыс	Механическое движение	Mechanical motion
Материалық нүкте	Материальная точка	Particle
Санақ жүйе	Система отсчета	Frame of reference
Кинематика	Кинематика	Kinematics
Нүктенің траекториясы	Траектория точки	Trajectory of particle
Жылдамдық	Скорость	Velocity
Үдеу	Ускорение	Acceleration
Табиғи үшжақтық өстері	Оси естественного трехгранника	Axes of a natural trihedral
Жанама үдеу	Касательное ускорение	Tangential acceleration
Нормаль үдеу	Нормальное ускорение	Normal acceleration
Абсолют қатты дене	Абсолютно твердое тело	Rigid body
Қатты дененің ілгерілемелі қозғалысы	Поступательное движение твердого тела	Translator motion of rigid body
Тұрақты өске қатысты қатты дененің айналмалы қозғалысы	Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси	Motion of rigid body about fixed axis
Дененің айналу бұрышы	Угол поворота тела	Angle of rotation
Бұрыштық жылдамдық	Угловая скорость	Angular velocity
Бұрыштық үдеу	Угловое ускорение	Angular acceleration

Өзіндік жұмысқа арналған сұрақтар:

1. Нүктенің қисық сызықты s координаттың және оның жүрген жолының айырмашылығы қандай?
2. Жанама және нормаль үдеулер жылдамдықтың өзгеруін қалай сипаттайды?
3. Бірқалыпты қозғалатын нүктенің үдеуі бола ма?
4. «Үдеумен болатын нүктенің қозғалысы» және «Нүктенің үдемелі қозғалысы» деген ұғымдар бірдей ме?
5. Нүктенің қозғалысы үдемелі немесе кемімелі екенін қалай анықтауға болады?
6. Қозғалыстағы қатты дененің екі нүктесінің жылдамдықтары және үдеулері бірдей. Бұл дененің қозғалысы ілгерілемелі деп айтуға бола ма?
7. Дене нүктелерінің траекториялары - шеңберлер. Дене айналмалы қозғалыс (немесе ілгерілемелі қозғалыс) жасайды деп айтуға бола ма?
8. Қозғалмайтын өске қатысты айналып тұрған дененің кез келген нүктесінің жылдамдық және үдеу векторлары өзара перпендикуляр болуы мүмкін ба? Бір түзуімен бағытталған мүмкін ба?

Ұсынылатын әдебиеттер

1. Иманбаева Л.Х., Теориялық механика және роботтық техниканың элементтері, Караганды, КарМТУ, 2019. – 308б.
2. Иманбаева Л.Х., Орынтаева Г.Ж., Ганюков А.А., Безкоровайный П.Г. Теориялық механика (курстық өздік жұмыстары және тәжірибелік сабақтар). Караганды, КарТУ, 2016,- 96 б.

З.Иманбаева Л.Х., Орынтаева Г.Ж., Доненбаев Б.С., Куанов И.С. Теориялық механиканың барлық бөлімдеріне қатысты студенттердің алған білімдерін бақылау. Караганды, КарТУ, 2020,- 100 б.