

Дәріс 1.1 Кіріспе. Статика.

Дәрістің мақсаты - статиканың негізгі ұғымдарын және күш моменттер теориясының негізгі түсініктемелерін айтып беру, қос күштер жүйесінің негіздерін түсіндіру статиканың негізгі теоремасын дәлелдеу және кез-келген күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттарын құрастыру

Дәрістің жоспары

1. Статиканың негізгі ұғымдары . Байланыстар және олардың реакциялары
2. Центрға және өске қатысты алгебралық күш моменті. Қос күш, оның қасиеттері
3. Күштер жүйесі. Күштер жүйесінің бас векторы мен бас моменті
4. Күштер жүйесін бір центрға келтіру (Пуансо теоремасы)
5. Кез-келген күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттары

Материалдық денелердің жағдайын қабылдаған координат жүйесіне қатысты қарастыратын боламыз, оны қозғалмайтын немесе абсолют деп тағайындаймыз. Материалдық денелердің кейбір идеалды модельдерін енгізейік. Олар: *материалдық нүкте* және *абсолют қатты дене*. Механиканың негізгі ұғымдарының біреуі **күш** ұғымы.

Анықтама. Материалдық денелердің механикалық өзара әсерлесуінің өлшеуіші ретінде алынатын шаманы механикада **күш** деп атайды.

Сонымен, осы уақыт моментінде берілген денеге екінші бір дененің жасайтын механикалық әсері күшпен өлшенеді. Күш – векторлық шама. Күштің өлшемі – 1 Н .

Бұдан былай *еркін қатты дене* ұғымын жиі қолданамыз. *Еркін дене* деп басқа денелермен ешбір байланысы жоқ, ешнәрсемен де бекітілмеген денені атаймыз. Ол дене кеңістіктің кез келген орнында бола алады және кез келген бағытта орын ауыстыра алады.

Қатты денеге бір ғана күш емес бір неше күш әсер етуі мүмкін. Оларды $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ деп белгілейік.

Анықтама. Қандайда болмасын бір қатты денеге әсер ететін күштер жиының *күштер жүйесі* деп атайды.

Анықтама. Егер денеге әсер ететін күштер жүйесін басқа бір күштер жүйесімен алмастырғанда оның күйі өзгермейтін болса, онда бұл екі күштер жүйелері *эквивалентті* деп аталады.

Анықтама. Қандай да болмасын n күштерден құрылған $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$ жүйені тыныштықта тұрған еркін қатты денеге түсіріп және ол оған ешқандай қозғалыс бере алмайтын болса, онда бұл күштер жүйесі *теңдестірілген жүйе* деп немесе *нөлге эквивалентті* деп аталады.

Анықтама. Қатты денеге түсірілген $\{\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n\}$ күштер жүйесі бір күшке эквивалентті болса, онда $\vec{R}$ күшін бұл күштер жүйесінің *тең әсер етушісі* немесе *тең әсерлі күші* деп атайды.

$$\{\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n\} \sim \vec{R}.$$

Механикаға негіз болатын – Галилей-Ньютонның жалпы заңдары. Механиканың бұл жалпы заңдарына динамикада тоқталамыз. Бұл жерде статика негізіне алынатын аксиомаларды баяндаймыз. Статика аксиомалары Галилей-Ньютонның жалпы заңдарынан туады.

1 аксиома. Еркін қатты денеге түсірілген екі күш тепе-теңдікте болу үшін олардың модульдары тең болуы және бір түзуімен қарама-қарсы бағытталуы қажетті және жеткілікті: $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\} \sim 0, \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

2 аксиома. Кез келген күштер жүйесіне нөлге эквивалент күштер жүйесін қосуға немесе одан оны алып тастауға болады, бұдан берілген күштер жүйесінің қатты денеге жасайтын әсері өзгермейді.

3 аксиома (параллелограмм заңы). Қатты дененің бір нүктесіне түсірілген екі күшті бір тең әсер етуші күшпен алмастыруға болады. Тең әсер етуші күш берілген күштерден құрылған параллелограмм диагоналімен анықталады да, сол нүктеге түсіріледі.

4 аксиома (әсер және кері әсер туралы заң). Екі дене біріне-бірі әр уақытта шамалары тең бір түзу бойымен қарама-қарсы бағытталған күштермен әсер етеді: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Кейде осы аксиоманы қысқартып «әсер кері әсер» деп те атайды.

Дене қозғалысының еркіндігін шектейтін шарттарды механикада **байланыстар** деп атайды. Байланыстар туралы ұғым – механикадағы күрделі ұғымдардың бірі. Статикада қарастырылған байланыстар көбінесе қозғалмайтын қатты дене, жіп, сырық, материалдық нүкте түрінде кездеседі.

Байланыс ролін атқаратын дене берілген, қозғалысы зерттелетін денеге бір күшпен әсер етіп, оның қозғалысын шектейді. Бұл күшті *байланыс реакциясы* дейді. Байланыс реакциясы байланысты ойша алып тастаған кездегі мүмкін болатын дене қозғалысының бағытына қарама-қарсы бағытталады.

Байланыс реакциясы әр уақытта берілген денеге түсіріледі. Ал бұл күш денені тепе-теңдік күйінен қозғалысқа келтіре алмайды, сондықтан байланыс реакциясын *пассив күш* деп атайды.

Байланыстар реакцияларының сан шамалары мен бағыттары көп жағдайда алдын ала белгісіз және денеге әсер етуші актив күштерімен дененің қозғалысына тәуелді болады. Оларды берілген күштер мен байланыстар қасиеттеріне сәйкес тәуелділікті табу қажеттілігі туады. Мәселе еркін денеге әсер етуші күштер тепе-теңдігің қарастыруға келіп тіреледі. Оны еркін емес денелерге қолдануда *байланыстар аксиомасына* сүйенеміз.

Байланыстар аксиомасы. Байланыстар әсерлерін реакцияларымен алмастыру арқылы кез келген еркін емес денедегі байланыстарды алып тастауға болады, сондықтан да ол дене өзіндегі актив күштер мен байланыстар реакцияларының әсеріндегі еркін дене ретінде қарастырылады.

Сонымен, бұл аксиома әрбір еркін емес қатты денені еркін дене ретінде қарастыруға мүмкіндік туғызу үшін ол денедегі байланыстарды ойша алып тастап, олардың орынына өздеріне сәйкес келетін реакциялық күштерді алу керек екендігін көрсетеді.

Анықтама. Күштің центрге қатысты моменті деп белгілі таңбамен алынған күштің модулі мен центрге дейінгі күш иінің көбейтіндісін айтады.

$\vec{F}$ күштің O нүктесіне қатысты моментінің скаляр шамасын $m_0(\vec{F})$ деп белгілейік. Онда анықтама бойынша

$$m_0(\vec{F}) = \pm F \cdot h,$$

мұнда h - күш иіні (O нүктеден күштің әсер ету сызығына түсірілген перпендикуляр); «+» не «-» таңбасын аларда «оң бұрғы ережесі» қолданылады. Осы ереже бойынша егер күш денені берілген нүктеден сағат тілі айналысына кері бағытта айналдыруға тырысса, онда күш моменті «+» таңбасымен алынады, ал егер күш денені берілген нүктеден сағат тілі айналысымен бағыттас айналдырса, онда күш моменті теріс болады.

Ескерту. Күштің түсу нүктесін оның әсер ету сызығы бойымен жылжытудан күш моменті өзгермейді.

Анықтама. Күштің өске қатысты моменті деп күштің өске перпендикуляр жазықтықтағы проекциясының өс пен жазықтықтың қиылысу нүктесіне қатысты моментін айтады:

$$m_l(\vec{F}) = m_0(\vec{F}_ж) = |m_0(\vec{F}_ж)| = \pm F_{ж} \cdot h = \pm F_{ж} \cdot h$$
$$m_l(\vec{F}) = \pm F_{ж} \cdot h.$$

«+» не «-» таңбасын аларда «оң бұрғы ережесіне» сүйенеміз.

Анықтама. *Қос күштер* деп модульдері тең, параллель орналасқан қарама-қарсы бағытталған екі күштерден тұратын күштер жүйесін атайды (6.4 - сурет).

Қос күштердің тең әсерлі күші жоқ, бірақ қос күштер теңдестірілген емес. Күштердің әсер сызықтарының ең қысқа ара қашықтығы **қос күштердің иіні** деп аталады. Қос күштер әсер ететін жазықтық **қос күштердің әсер жазықтығы** деп аталады. Денеге әсер ететін бірнеше қос күштер жиынтығы, **қос күштер жүйесі** деп аталады.

Қос күштердің денеге әсері **қос күштердің моментімен** сипатталады, ол $\pm F \cdot d$ - ға тең.

Ескерту. 1) Қос күш денені айналысқа келтіруге тырысады, сондықтан қос күшті бір тең әсер етуші күшке келтіруге болмайды; 2) қос күш орналасқан жазықтықты **қос күш әсерінің жазықтығы** деп аталады; 3) қос күштің әсері оның моментімен анықталады.

Анықтама. **Қос күш моменті** деп модулі күш пен иін көбейтіндісіне тең, ал бағыты қос күш жазықтығына перпендикуляр болып келетін векторды атаймыз:

$$|m(\{\bar{F}_1, \bar{F}_2\})| = F_1 d = F_2 d.$$

Мұнда d – қос күш иіні. Қос күш моменті векторының бағыты анықтауда оң бұрғы ережесі қолданылады. Қос күштердің **қасиеттері**:

- 1) қос күштерді денеге әсерін өзгертпестен оның моментінің модулі мен бағытын сақтап, күштерімен иінін өзгертіп өзінің әсер жазықтығында қайда болса да көшіруге болады;
- 2) қос күштерді күштің модулі мен қос күштердің иінін өзгертіп, бірақ моментінің модулі мен денені айналдыруға тырысатын бағытын сақтап, жазықтықта кез келген орынға және параллель жазықтыққа көшіруге болады;
- 3) қос күштің моментінің векторы – еркін вектор, сондықтан оны дененің кез келген нүктесіне түсіруге болады.

Қос күштерді қосу туралы теорема. Денеге әсер ететін барлық қос күштердің жиынтығы бір қос күштерге эквивалентті болады, оның векторлық моменті барлық қос күштердің векторлық моменттерінің қосындысына тең.

Статиканың есептерін шешкенде кейде **үш күштер теоремасын** қолданған ыңғайлы болады. **Параллель емес бір жазықтықта жататын үш күштер әсер ететін дене тепе-теңдік жағдайында болса, онда осы үш күштердің әсер сызықтары бір нүктеде қиылысады.**

Күштер векторларының кеңістікте орналасуларына қарай күштер жүйесі бірнеше түрге бөлінеді. Жиі кездесетін күштер жүйелері мыналар:

- 1) **параллель күштер жүйесі**, мұнда әсер ету сызықтары біріне-бірі тек қана параллель болып келген күштерден құралады.
- 2) **бір нүктеге жинақталатын күштер жүйесі**, мұнда әсер ету сызықтары **бір нүктені** басып өтетін күштерден тұрады.
- 3) әсер ету сызықтары бір жазықта кез келген бағытта орналасқан күштер жиынын **күштердің кез келген жазық жүйесі** деп атаймыз. Жазық жүйесінің өзі тағы екіге бөлінеді: параллель күштердің жазық жүйесі, бір нүктеге жинақталатын күштердің жазық жүйесі.
- 4) кеңістікте кез келген бағытта орналасқан күштер жиынын **күштердің кез келген кеңістіктік жүйесі** деп атаймыз.
- 5) денеге тек қос күштер әсер етуі мүмкін. Бір денеге түсірілген барлық қос күштер жиынын **қос күштер жүйесі** деп атайды.

Анықтама. Жүйедегі барлық күштер векторларының геометриялық қосындысына тең векторды жүйенің **бас векторы** деп атайды. Бас векторы $\bar{R}^*$ - мен белгілесек, бұл айтылған анықтама бойынша: $\bar{R}^* = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k$ болады.

Анықтама. Күштер жүйесінің O центріне қатысты **бас моменті** деп ондағы бар күштердің осы центрге қатысты моменттерінің геометриялық қосындысына тең болатын векторды айтады.

Жүйенің O центріне қатысты бас моментін әдетте $\bar{M}_0$ векторымен белгілейді. Олай болса:

$$\overline{M}_0 = \sum_{k=1}^n \overline{m}_0(\overline{F}_k) = \sum_{k=1}^n \overline{r}_k \times \overline{F}_k.$$

Лемма. Қатты дененің A нүктесінде берілген $\overline{F}$ күш дененің басқа бір B нүктесіне түсірілген дәл өзіндей $\overline{F}'$ күшке және бір қос күшке эквивалент. Бұл қос күштің моменті A нүктесіндегі $\overline{F}$ күштің B центріне қатысты алынған моментіне тең болады.

Теорема. Кез келген күштер жүйесін осы жүйенің бас векторына және қорытқы қос күшке келтіруге болады. Қорытқы қос күштің моменті жүйенің келтіру центріне қатысты бас моментіне тең, яғни

$$\{\overline{F}_1, \dots, \overline{F}_n\} \sim \{\overline{R}^*, \overline{M}_0\}.$$

Вариньон теоремасы. Егер күштер жүйесінің тең әсер етушісі болса, онда тең әсер ету күштің кез келген бір нүктеге қатысты моменті жүйесіндегі күштердің сол нүктеге қатысты моменттерінің геометриялық қосындысына тең.

Кез келген күштер жүйесі тепе-теңдікте болу үшін оның бас векторы және қандай да болмасын бір нүктеге қатысты алынған бас моменті нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті, яғни

$$\overline{R} = 0, \quad \overline{M}_0 = 0.$$

Кез келген **кеңістік күштер жүйесі** үшін тепе-теңдік шарттардың саны алтыға тең, (аналитикалық түрі):

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= 0, & \sum_i m_{0x}(\overline{F}_i) &= 0, \\ \sum_i F_{iy} &= 0, & \sum_i m_{0y}(\overline{F}_i) &= 0, \\ \sum_i F_{iz} &= 0, & \sum_i m_{0z}(\overline{F}_i) &= 0. \end{aligned}$$

Кез келген **жазықтық күштер жүйесінің** тепе-теңдік шарттары үш түрі бар:

$$\begin{aligned} &\sum F_{kx} = 0, \quad \sum m_A(\overline{F}_k) = 0, \\ 1) \quad &\sum_k F_{ky} = 0, \quad 2) \quad \sum_k m_B(\overline{F}_k) = 0, \quad (A, B, C \text{ нүктелер бір түзудің бойында жатуы мүмкін емес}) \\ &\sum_k m_O(\overline{F}_k) = 0, \quad \sum_k m_C(\overline{F}_k) = 0, \\ &\sum_k m_A(\overline{F}_k) = 0, \\ 3) \quad &\sum_k m_B(\overline{F}_k) = 0, \quad (l \text{ өсі } AB \text{ кесіндіге перпендикуляр емес}) \\ &\sum_k F_{kl} = 0. \end{aligned}$$

ГЛОССАРИЙ

Статика	Статика	Static
Күш	Сила	Force
Күштің әсер ету сызығы	Линия действия силы	Line of action
Күштер жүйесі	Система сил	System of forces
Сыртқы күш	Внешняя сила	External force
Ішкі күш	Внутренняя сила	Internal force
Тең әсер етуші күш	Равнодействующая	Resultant of system of forces
Теңдестірілген күштер жүйесі	Уравновешенная система сил	Balanced system of forces
Нүктеге қатысты күш моменті	Момент силы относительно точки	Moment of force about point
Өске қатысты күш моменті	Момент силы относительно оси	Moment of force about axis

Күш иіні	Плечо силы	Moment arm
Қос күш	Пара сил	Couple
Қос күш иіні	Плечо пары	Arm of couple
Қос күш моменті	Момент пары	Moment of couple
Күштер жүйесінің бас векторы	Главный вектор системы сил	Resultant of system of force
Күштер жүйесінің бас моменті	Главный момент системы сил	Moment of system of force about point
Күштер жүйесін берілген центрге келтіру	Приведение системы сил к заданному центру	Reduction of system of force
Теңдестірілген күштер жүйесі	Уравновешенная система сил	Balanced system of force
Күштер жүйесінің тепе-теңдігі	Равновесие системы сил	Equilibrium of system of force

Өзіндік жұмысқа арналған сұрақтар:

1. Жылтыр беттің және қозғалмалы шарнирдің реакциясының айырмашылығы бар ма?
 2. Цилиндрлік және сфералық шарнирлердің айырмашылығы неде?
 3. Механикада байланыстардан босату принципін қандай мақсатпен енгізеді?
 4. Егер вектордың өске проекциясы: а) оң; б) теріс; в) нөлге тең болса, онда оның өспен жасайтын бұрышы қандай болады?
 5. Қатты денеге $\vec{F}_1$ және $\vec{F}_2$ күштер әсер етеді. Олар үшін $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ шарт орындалады. Бұл күштер әсерінен дене тепе-теңдікте бола ма?
 6. Бір нүктеге қатысты екі әр түрлі күштің моменттері бірдей болуы мүмкін бе?
 7. Егер а) бір центрге қатысты; б) кез келген центрге қатысты екі күштердің моменттері бірдей болса, бұл күштер эквивалентті бола ма?
 8. Қос күштердің вектор-моменті - еркін вектор. Неге?
 9. Әр түрлі екі қос күштер эквивалентті болуы мүмкін ба?
 10. Қатты дененің тепе-теңдік шарттарынан қанша белгісіздерді табуға болады, егер денеге:
а) жазық күштер жүйесі; б) кез келген кеңістік күштер жүйесі; в) жазық қиылысатын күштер жүйесі әсер етсе?
 11. Бір күш бір жағдайда сыртқы, ал екінші жағдайда ішкі күш болала ма?
- Статикалық анықталмайтын есептерді шешу үшін қандай тәсілдерді қолдану керек

Ұсынылатын әдебиеттер

1. Иманбаева Л.Х., Теориялық механика және роботтық техниканың элементтері, Караганды, КарМТУ, 2019. – 308б.
2. Иманбаева Л.Х., Орынтаева Г.Ж., Ганюков А.А., Безкоровайный П.Г. Теориялық механика (курстық өздік жұмыстары және тәжірибелік сабақтар). Караганды, КарТУ, 2016,- 96 б.
3. Иманбаева Л.Х., Орынтаева Г.Ж., Доненбаев Б.С., Куанов И.С. Теориялық механиканың барлық бөлімдеріне қатысты студенттердің алған білімдерін бақылау. Караганды, КарТУ, 2020,- 100 б.

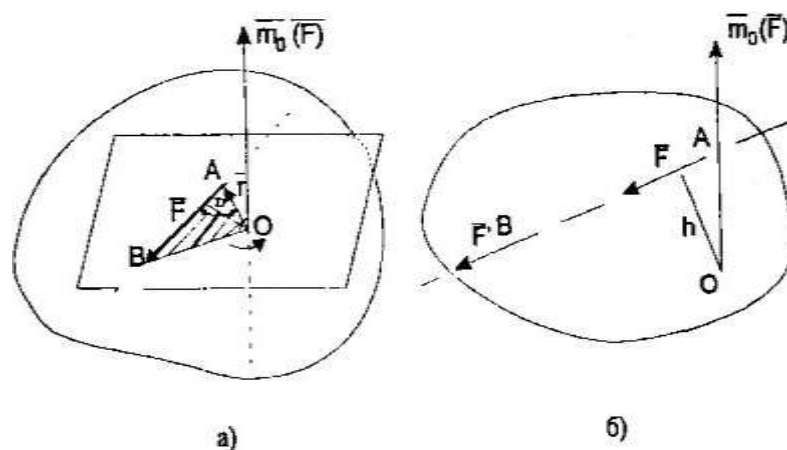
Дәріс 1.2. Күштің нүктеге қатысты моменті

Дәрістің мақсаты - статиканың негізгі ұғымдарын және күш моменттер теориясының негізгі түсініктемелерін айтып беру, қос күштер жүйесінің негіздерін түсіндіру статиканың негізгі теоремасын дәлелдеу және кез-келген күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттарын құрастыру

Дәрістің жоспары

1. Статиканың негізгі ұғымдары . Байланыстар және олардың реакциялары
2. Центрға және өске қатысты алгебралық күш моменті. Қос күш, оның қасиеттері
3. Күштер жүйесі. Күштер жүйесінің бас векторы мен бас моменті
4. Күштер жүйесін бір центрге келтіру (Пуансо теоремасы)
5. Кез-келген күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттары

Статиканың ең маңызды ұғымдарының біріне күштің нүктеге және өске қатысты моменттері жатады. Күштің денені центрден айналдыруға тырысатын әсері – нүктеге қатысты күш моменті арқылы сипатталады.



I.18-сурет

Қатты дененің А нүктесіне түсірілген $\vec{F}$ күшінің О центріне қатысты моменттің векторлық шамасын анықтайық. Нүктеге қатысты күш моментінің векторы күштің түсу нүктесінің радиус-векторы мен күштің векторлық көбейтіндісіне тең:

$$\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (\text{I.2.1})$$

Күш моментінің векторы $\vec{m}_O(\vec{F})$ осы нүктеде орналасып, күш пен нүкте орналасқан жазықтыққа перпендикуляр бағытталады (I. 18, а - сурет). Оның ұшынан қарағанда, күш пен нүкте жатқан жазықтығының О нүктесіне қатысты айналуы сағат тілінің айналуына қарама-қарсы бағытталуы керек. Момент векторының модулі тең:

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = \pm F r \sin \alpha = Fh.$$

Егер денеге әсер ететін күштердің барлығы бір жазықтықта орналасса, онда осы жазықтықта орналасқан нүктеге қатысты алынған күштер моменттерінің векторлары берілген жазықтыққа перпендикуляр болады. Сондықтан күштер моменттерінің бір – бірінен айырмашылығы, олардың модульдері мен бағыттары арқылы көрінеді. Осы жағдайда күштердің нүктеге қатысты алгебралық моменттері қарастырылады.

Күштің нүктеге қатысты алгебралық моменті оң немесе теріс таңбамен алынған күш модулімен сол нүктеге қатысты алынған иінің көбейтіндісіне тең:

$$m_O(\vec{F}) = \pm Fh. \quad (\text{I.2.2})$$

Күш иіні h қарастырылып отырған О нүктесінен $\vec{F}$ күшінің әсер ету сызығына түсірілген перпендикулярдың ұзындығына тең (I.18, а - сурет). Егер күш қатты денені

қарастырылып отырған O нүктесіне қатысты сағат тілінің айналуына қарама-қарсы айналдыруға тырысса, күш моменті оң таңбамен алынады; ал сағат тілімен бағыттас айналдырса, теріс таңбамен алынады.

Күш моментінің Халықаралық бірліктер жүйесіндегі бірлік өлшемі [НМ]. Нүктеге қатысты күш моментінің модулін геометриялық жолмен AOB үшбұрышының ауданы арқылы да жазуға болады (I.18, а - сурет).

$$\bar{m}_O(\bar{F}) = \pm 2S_{\Delta OAB}. \quad (I.2.3)$$

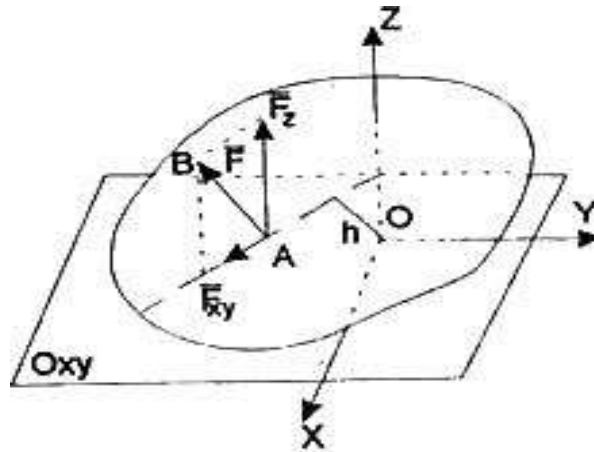
Күш моментінің анықтамасынан келесі қасиеттері туады:

1. Күштің түсу нүктесін оның әсер ету сызығы бойымен жылжытудан күш моменті өзгермейді (I.18, б - сурет).
2. Егер күштің әсер ету сызығы O нүктесі арқылы өтсе, онда күш моменті нөлге тең.
3. Шамалары өзара тең, бір түзудің бойымен қарама-қарсы бағытталған екі күштің O нүктесіне қатысты алынған моменттерінің қосындысы нөлге тең.

Күштің өске қатысты моменті

Кеңістікте орналасқан күштерді зерттеген кезде, нүктеге қатысты күш моментінің векторынан басқа, күштің өске қатысты моменті деген ұғымды кіргізу керек.

Күштің денені өстен айналдыруға тырысатын әсерін өске қатысты күш моменті сипаттайды.



I.19-сурет

Қатты дене A нүктесінде түсірілген $\bar{F}$ күшінің әсерімен Z өсін айнала қозғалады. A нүктесі арқылы O_z өсіне перпендикуляр Oxy жазықтығын жүргіземіз, ол өсті O нүктесінде қиып өтеді. Берілген $\bar{F}$ күшін өске бағыттас $\bar{F}_z$ және оған перпендикуляр бағыттағы $\bar{F}_{xy}$ құраушы күштеріне жіктейміз (I.19- сурет). $\bar{F}_z$ – құраушы күші денені жоғары қозғауға әсер етеді. Сондықтан берілген күштің денені өсіне қатысты айналдыру эффектісі оның $\bar{F}_{xy}$ құраушы күші арқылы болады:

$$m_z(\bar{F}) = \bar{m}_O(\bar{F}) = \pm F_{xy}h, \quad (I.2.4)$$

h - күштің иіні, $\bar{F}_{xy}$ - $\bar{F}$ күшінің O_{xy} жазықтығына түсірілген проекциясы.

Анықтама: Күштің өске қатысты моменті деп осы күштің берілген өске перпендикуляр жазықтықтағы проекциясының өс пен жазықтықтың қиылысу нүктесіне қатысты алынған алгебралық моментін айтады. Егер оң бағыттағы өс ұшынан қарағанда $\bar{F}_{xy}$ күшінің әсерінен дененің айналуы сағат тілінің айналуына қарама – қарсы бағытталса, күштің өске қатысты моменті оң таңбамен алынады; ал керісінше болса, таңбасы теріс болады. Күштің өске қатысты моментін табу үшін:

1. Күштің түсіп тұрған нүктесінен өске перпендикуляр жазықтық жүргізеді.
2. Жазықтыққа күштің проекциясын түсіреміз.

3. Өс пен O_{xy} жазықтығы қиылысқан O нүктесінен $\vec{F}_{xy}$ -тың бағытына перпендикуляр түсіріп, h иінін табу керек.
4. (I.2.4) өрнегі бойынша өске қатысты күш моменті анықталады.
5. Күш моментінің таңбасын анықтаймыз.

Өске қатысты күш моментінің анықтамасынан келесі қасиеттері туады:

- егер күштің әсер ету сызығы өсті қиып өтсе, онда өске қатысты күш моменті нөлге тең. Өйткені, $h=0$, сондықтан $m_z(\vec{F}) = 0$;
- күштің әсер ету сызығы өске параллель орналасса, онда өске қатысты күш моменті нөлге тең:

$$\vec{F}_{xy} = 0, \quad m_z(F_{xy}) = 0.$$

Бұл қасиеттерден, егер күш өспен бір жазықтықта орналасса, онда өске қатысты күш моменті нөлге тең.

Күштің нүктеге және өске қатысты моменттерінің арасындағы байланыс

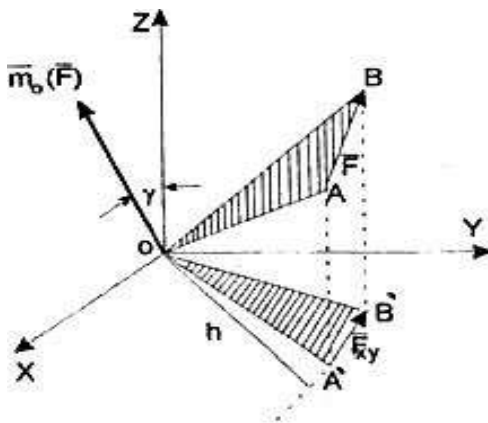
Қатты дененің A нүктесіне $\vec{F}$ күші түсірілген. Күштің нүктеге қатысты моментінің анықтамасы бойынша, момент векторы $\vec{m}_0(\vec{F})$ OAB үшбұрышының жазықтығына перпендикуляр орналасып, шамасы осы үшбұрыштың екі еселенген ауданына тең (I.20-сурет):

$$\vec{m}_0(\vec{F}) = 2S_{\Delta OAB}. \quad (I.2.5)$$

O нүктесі арқылы O_z өсіне перпендикуляр жазықтық жүргізіп $\vec{F}$ күшінің осы жазықтықтағы проекциясын тауып, күштің осы өске қатысты моментін анықтаймыз:

$$m_z(\vec{F}) = \vec{m}_0(\vec{F}) = 2S_{\Delta OAB}. \quad (I.2.6)$$

$OA'B'$ үшбұрышы – OAB үшбұрышының O_{xy} жазықтығына түсірілген проекциясы (I.20-сурет). Геометриядағы теорема бойынша, жазық фигураның проекциясының ауданы проекцияланатын фигураның ауданын екі жазықтықтың арасындағы бұрыштың косинусына көбейткенге тең.



I.20-сурет

Екі үшбұрыштар OAB және $OA'B'$ жазықтықтарының арасындағы бұрыш осы жазықтықтарға түсірілген перпендикулярдың арасындағы бұрышқа тең, яғни γ бұрышы $\vec{m}_0(\vec{F})$ пен O_z өсінің арасындағы бұрыш:

$$S_{\Delta OA'B'} = S_{\Delta OAB} \cos \gamma, \quad (I.2.7)$$

(I.2.5), (I.2.6) және (I.2.7) формулаларын ескере отырып, мынадай формула шығады:

$$m_z(\vec{F}) = n p_z \vec{m}_0(\vec{F}),$$

немесе

$$m_z(\vec{F}) = \vec{m}_0(\vec{F}) \cos \gamma. \quad (I.2.8)$$

(I.2.8) формуласы күштің O_z өсіне және O нүктесіне қатысты алынған моменттерінің арасындағы байланысты өрнектейді. Сонымен, денеге әсер етуші күштің өске қатысты моменті берілген күштің өс бойымен орналасқан кез келген бір нүктесіне қатысты алынған күш моменті векторының осы өстегі проекциясына тең.

(I.2.7) формуласы күштің өске қатысты моментінің екінші анықтамасын өрнектейді.

Күштің координата өстеріне қатысты моменттері

Тікбұрышты O_{xyz} координаталар жүйесін алып, оларға сәйкес $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ бірлік векторлары көрсетіледі (I.21-сурет).

Дененің А нүктесінде түсірілген $\bar{F}$ күшінің координата өстерінің бас нүктесі О-ға қатысты моменті (I.2.1) формуласы анықталады:

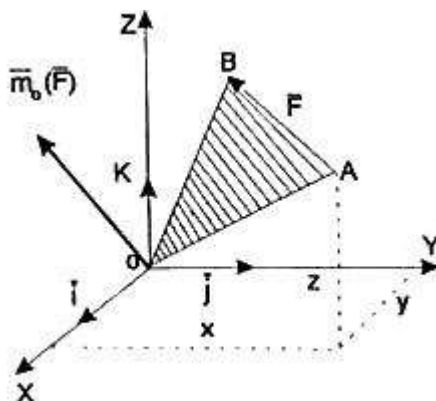
$$\bar{m}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F},$$

мұндағы $\bar{r}$ – күш түсірілген А нүктесінің О нүктеге қатысты радиус-векторы.

Момент векторы $\bar{m}_0(\bar{F})$ -ты координаталар өстеріне проекциялары арқылы да жазуға болады:

$$\bar{m}_0(\bar{F}) = \bar{m}_x(\bar{F})\bar{i} + \bar{m}_y(\bar{F})\bar{j} + \bar{m}_z(\bar{F})\bar{k}, \quad (I.2.9)$$

мұндағы $\bar{m}_x(\bar{F})$, $\bar{m}_y(\bar{F})$, $\bar{m}_z(\bar{F})$ – момент векторы $\bar{m}_0(\bar{F})$ – ның координата өстеріне проекциялары.



I.21-сурет

Векторлық алгебрада $\bar{r} \times \bar{F}$ векторлық көбейтіндіні анықтаушы арқылы жазуға болады:

$$\bar{m}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\bar{i} + (zF_x - xF_z)\bar{j} + (xF_y - F_x)\bar{k}, \quad (I.2.10)$$

мұндағы $x, y, z, \bar{r}$ – радиус –векторының өстерге проекциялары; F_x, F_y, F_z – $\bar{F}$ күшінің проекциялары.

Анықтауышты бірінші жолдың элементтері бойынша жіктеп жазғанда (I.2.10) формуласы шығады. (I.2.9) және (I.2.10) формулаларын салыстырып, бірдей бірлік векторлары бар мүшелерді теңестіріп, күштің координаталық өстеріне қатысты моменттерін анықтаймыз:

$$\begin{aligned} m_x(\bar{F}) &= yF_z - zF_y; \\ m_y(\bar{F}) &= zF_x - xF_z; \\ m_z(\bar{F}) &= xF_y - F_x. \end{aligned} \quad (I.2.11)$$

(I.2.11) – формуласы координаталар өстеріне қатысты моменттерінің аналитикалық түрі деп аталады.

ГЛОССАРИЙ

Статика	Статика	Static
Күш	Сила	Force
Күштің әсер ету сызығы	Линия действия силы	Line of action

Күштер жүйесі	Система сил	System of forces
Сыртқы күш	Внешняя сила	External force
Ішкі күш	Внутренняя сила	Internal force
Тең әсер етуші күш	Равнодействующая	Resultant of system of forces
Тендістірілген күштер жүйесі	Уравновешенная система сил	Balanced system of forces
Нүктеге қатысты күш моменті	Момент силы относительно точки	Moment of force about point
Өске қатысты күш моменті	Момент силы относительно оси	Moment of force about axis
Күш иіні	Плечо силы	Moment arm
Қос күш	Пара сил	Couple
Қос күш иіні	Плечо пары	Arm of couple
Қос күш моменті	Момент пары	Moment of couple
Күштер жүйесінің бас векторы	Главный вектор системы сил	Resultant of system of force
Күштер жүйесінің бас моменті	Главный момент системы сил	Moment of system of force about point
Күштер жүйесін берілген центрге келтіру	Приведение системы сил к заданному центру	Reduction of system of force
Тендістірілген күштер жүйесі	Уравновешенная система сил	Balanced system of force
Күштер жүйесінің тепе-теңдігі	Равновесие системы сил	Equilibrium of system of force

Өзіндік жұмысқа арналған сұрақтар:

1. Жылтыр беттің және қозғалмалы шарнирдің реакциясының айырмашылығы бар ма?
 2. Цилиндрлік және сфералық шарнирлердің айырмашылығы неде?
 3. Механикада байланыстардан босату принципін қандай мақсатпен енгізеді?
 4. Егер вектордың өске проекциясы: а) оң; б) теріс; в) нөлге тең болса, онда оның өспен жасайтын бұрышы қандай болады?
 5. Қатты денеге $\vec{F}_1$ және $\vec{F}_2$ күштер әсер етеді. Олар үшін $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ шарт орындалады. Бұл күштер әсерінен дене тепе-теңдікте бола ма?
 6. Бір нүктеге қатысты екі әр түрлі күштің моменттері бірдей болуы мүмкін бе?
 7. Егер а) бір центрге қатысты; б) кез келген центрге қатысты екі күштердің моменттері бірдей болса, бұл күштер эквивалентті бола ма?
 8. Қос күштердің вектор-моменті - еркін вектор. Неге?
 9. Әр түрлі екі қос күштер эквивалентті болуы мүмкін ба?
 10. Қатты дененің тепе-теңдік шарттарынан қанша белгісіздерді табуға болады, егер денеге:
а) жазық күштер жүйесі; б) кез келген кеңістік күштер жүйесі; в) жазық қиылысатын күштер жүйесі әсер етсе?
 11. Бір күш бір жағдайда сыртқы, ал екінші жағдайда ішкі күш бола ма?
- Статикалық анықталмайтын есептерді шешу үшін қандай тәсілдерді қолдану керек

Ұсынылатын әдебиеттер

1. Иманбаева Л.Х., Теориялық механика және роботтық техниканың элементтері, Караганды, КарМУ, 2019. – 308б.
2. Иманбаева Л.Х., Орынтаева Г.Ж., Ганюков А.А., Безкоровайный П.Г. Теориялық механика (курстық өздік жұмыстары және тәжірибелік сабақтар). Караганды, КарТУ, 2016,- 96 б.
3. Иманбаева Л.Х., Орынтаева Г.Ж., Доненбаев Б.С., Куанов И.С. Теориялық механиканың барлық бөлімдеріне қатысты студенттердің алған білімдерін бақылау. Караганды, КарТУ, 2020,- 100 б.

Дәріс 1.3 Кіріспе. Статика. Бір нүктеге жинақталған күштер жүйесін тең әсер етуші күшке келтірудегі геометриялық әдіс

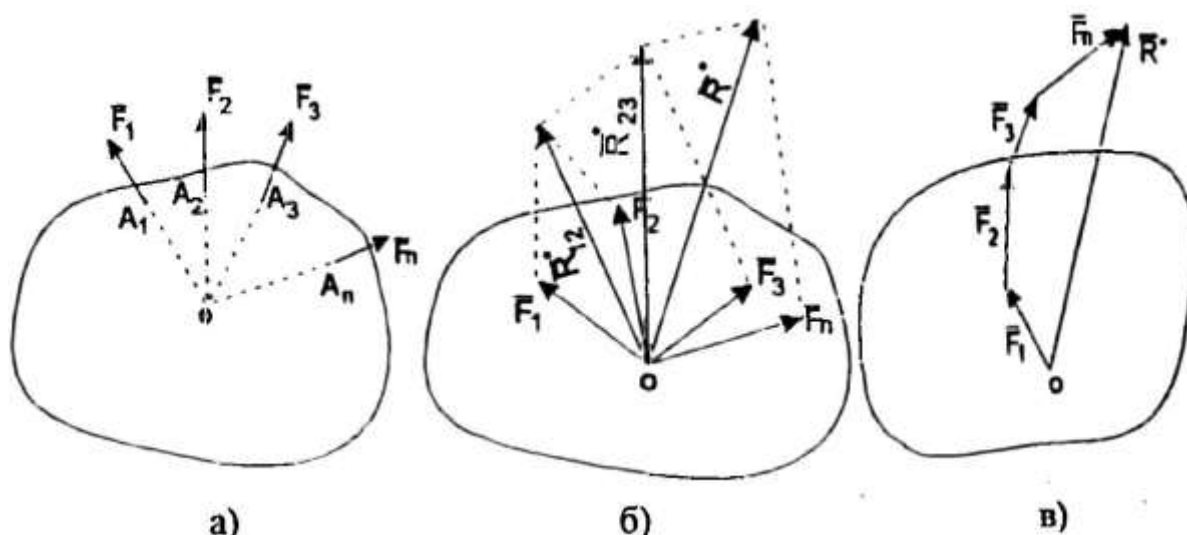
Дәрістің мақсаты - статиканың негізгі ұғымдарын және күш моменттер теориясының негізгі түсініктемелерін айтып беру, қос күштер жүйесінің негіздерін түсіндіру статиканың негізгі теоремасын дәлелдеу және кез-келген күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттарын құрастыру

Дәрістің жоспары

1. Статиканың негізгі ұғымдары . Байланыстар және олардың реакциялары
2. Центрге және өске қатысты алгебралық күш моменті. Қос күш, оның қасиеттері
3. Күштер жүйесі. Күштер жүйесінің бас векторы мен бас моменті
4. Күштер жүйесін бір центрге келтіру (Пуансо теоремасы)
5. Кез-келген күштер жүйесінің тепе-теңдік шарттары

Әсер ету сызықтары бір нүктені басып өтетін күштер жүйесі бір нүктеге жинақталған күштер жүйесі деп аталады.

Қатты дененің $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ нүктелеріне түсірілген, кеңістікте орналасқан, жинақталған күштер жүйесін қарастырайық (I.22, а - сурет).



I.22-сурет

Статика аксиомаларындағы салдарды пайдаланып, жүйенің барлық күштерінің бас нүктелерін әсер ету сызықтарының бойымен сырғыта отырып, $A_1, A_2, \dots, A_n$ нүктелерінен O нүктесіне келтіреміз (I.22, б - сурет). Сонда жинақталған күштер бір нүктеге түсірілген күштерге келтіріледі, оларға біртіндеп параллелограмм аксиомасын қолданамыз. Бұл аксиома бойынша $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ күштерін қосқанда, $\vec{R}_{12}^*$ тең әсерлі күші табылады:

$$\vec{R}_{12}^* = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

$\vec{R}_{12}^*$ күшіне келесі $\vec{F}_3$ күші қосылады:

$$\vec{R}_{123}^* = \vec{R}_{12}^* + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Осы тәсілді біртіндеп жүйенің барлық күштеріне қолданып, оның тең әсерлі күші $\vec{R}^*$ табылады (I.22, б - сурет).

$$\vec{R}^* = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k; \quad (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}^*. \quad (I.3.1)$$

Кеңістікте орналасқан, қатты денеге әсер ететін, бір нүктеде жинақталған күштер жүйесінің тең әсерлі күші, жүйе күштерінен құрылған көпбұрыштың тұйықтаушы қабырғасына тең.

Қабырғалары жүйе күштерінен құрылған көпбұрыш күш көпбұрышы деп аталады. Күштер жүйесінің тең әсерлі күші $\bar{R}^*$, бірінші күштің бас нүктесімен соңғы күштің ұшын қосады (I.22, в - сурет).

Жазықтықта орналасқан жинақталған күштер жүйесін осындай әдіспен қосып, тең әсерлі күшін табады.

Жинақталған күштер жүйесінің тепе-теңдік шартының геометриялық түрі.
Үш күш туралы теорема. Есептер

Бір нүктеде жинақталған күштер жүйесі тепе-теңдікте болуы үшін күштер көпбұрышы тұйық болуы қажетті де жеткілікті. Бұл шартты геометриялық тепе-теңдік шарты деп атайды. Сонымен күштер көпбұрышы тұйық болғандықтан, бірінші $\bar{F}_1$ күштің бастапқы нүктесі мен $\bar{F}_n$ күштің соңғы нүктесі беттесіп кетеді. Яғни күштер жүйесінің тең әсерлі күші $\bar{R}^*$ нөлге тең болады:

$$\bar{R}^* = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0 \quad (I.3.2)$$

Қатты денеге әсер ететін жинақталған күштер жүйесі тепе-теңдікте болуы үшін оның тең әсерлі күші нөлге тең болуы қажетті және жеткілікті.

Үш күш туралы теорема: Егер еркін қатты дене, бір жазықтықта орналасқан параллель емес үш күштің әсерінен тепе-теңдікте болса, онда олардың әсер ету сызықтары бір нүктеде қиылысады.

Қатты дененің A_1, A_2, A_3 нүктелеріне түсірілген $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ күштері берілген (I.23-сурет). Күштер бір жазықтықта орналасқан параллель емес. Сондықтан кем дегенде екі күштің әсер ету сызықтары бір нүктеде қиылысады (мысалы, F_1, F_2 күштері). Осы күштерді олардың әсер ету сызықтары қиылысқан О нүктесіне сырғыппып әкеліп, олардың тең әсер етуші күшін табамыз:

$$\bar{R}_{12}^* = \bar{F}_1 + \bar{F}_2, (\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim \bar{R}_{12}^*,$$

сондықтан

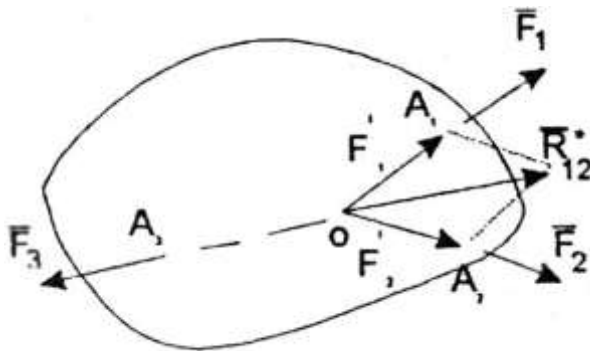
$$\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3 \sim (\bar{R}_{12}^*, \bar{F}_3).$$

Теореманың шарты бойынша:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3) \sim 0$$

олай болса,

$$(\bar{R}_{12}^*, \bar{F}_3) \sim 0.$$



I.23-сурет

Қатты дене $(\bar{R}_{12}^*, \bar{F}_3)$ күшінің әсерінен тепе-теңдікте болуға тиісті, ол үшін статиканың I-аксиомасының барлық шарттары орындалуы керек. Сондықтан, $\bar{F}_3$ күштің әсер ету сызығы да О нүктесі арқылы өтуі керек. Осымен теорема дәлелденді.

Жинақталған күштер жүйесінің тепе-теңдігіне арналған есептерді шығару жоспары:

1. Тепе-теңдігі қарастырылатын денені тағайындау.
2. Берілген күштерді көрсету.

3. Денені байланыстардан босатып, олардың денеге жасайтын әсерін байланыс реакцияларымен алмастыру.
4. Берілген күштер мен байланыс реакциясының әсерінен тепе-теңдікте тұрған қатты денені қарастырып, тұйықталған күштер көпбұрышын құрастыру керек. Ең бірінші берілген күштерден бастап құрастыру қажет.
5. Күштер көпбұрышынан белгісіз шамаларды анықтау.

ГЛОССАРИЙ

Статика	Статика	Static
Күш	Сила	Force
Күштің әсер ету сызығы	Линия действия силы	Line of action
Күштер жүйесі	Система сил	System of forces
Сыртқы күш	Внешняя сила	External force
Ішкі күш	Внутренняя сила	Internal force
Тең әсер етуші күш	Равнодействующая	Resultant of system of forces
Теңдестірілген күштер жүйесі	Уравновешенная система сил	Balanced system of forces
Нүктеге қатысты күш моменті	Момент силы относительно точки	Moment of force about point
Өске қатысты күш моменті	Момент силы относительно оси	Moment of force about axis
Күш иіні	Плечо силы	Moment arm
Қос күш	Пара сил	Couple
Қос күш иіні	Плечо пары	Arm of couple
Қос күш моменті	Момент пары	Moment of couple
Күштер жүйесінің бас векторы	Главный вектор системы сил	Resultant of system of force
Күштер жүйесінің бас моменті	Главный момент системы сил	Moment of system of force about point
Күштер жүйесін берілген центрге келтіру	Приведение системы сил к заданному центру	Reduction of system of force
Теңдестірілген күштер жүйесі	Уравновешенная система сил	Balanced system of force
Күштер жүйесінің тепе-теңдігі	Равновесие системы сил	Equilibrium of system of force

Өзіндік жұмысқа арналған сұрақтар:

1. Жылтыр беттің және қозғалмалы шарнирдің реакциясының айырмашылығы бар ма?
 2. Цилиндрлік және сфералық шарнирлердің айырмашылығы неде?
 3. Механикада байланыстардан босату принципін қандай мақсатпен енгізеді?
 4. Егер вектордың өске проекциясы: а) оң; б) теріс; в) нөлге тең болса, онда оның өспен жасайтын бұрышы қандай болады?
 5. Қатты денеге $\vec{F}_1$ және $\vec{F}_2$ күштер әсер етеді. Олар үшін $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ шарт орындалады. Бұл күштер әсерінен дене тепе-теңдікте бола ма?
 6. Бір нүктеге қатысты екі әр түрлі күштің моменттері бірдей болуы мүмкін бе?
 7. Егер а) бір центрге қатысты; б) кез келген центрге қатысты екі күштердің моменттері бірдей болса, бұл күштер эквивалентті бола ма?
 8. Қос күштердің вектор-моменті - еркін вектор. Неге?
 9. Әр түрлі екі қос күштер эквивалентті болуы мүмкін ба?
 10. Қатты дененің тепе-теңдік шарттарынан қанша белгісіздерді табуға болады, егер денеге:
а) жазық күштер жүйесі; б) кез келген кеңістік күштер жүйесі; в) жазық қиылысатын күштер жүйесі әсер етсе?
 11. Бір күш бір жағдайда сыртқы, ал екінші жағдайда ішкі күш болала ма?
- Статикалық анықталмайтын есептерді шешу үшін қандай тәсілдерді қолдану керек

Ұсынылатын әдебиеттер

1. Иманбаева Л.Х., Теориялық механика және роботтық техниканың элементтері, Караганды, КарМТУ, 2019. – 308б.

2. Иманбаева Л.Х., Орынтаева Г.Ж., Ганюков А.А., Безкоровайный П.Г. Теориялық механика (курстық өздік жұмыстары және тәжірибелік сабақтар). Караганды, КарТУ, 2016,- 96 б.

3. Иманбаева Л.Х., Орынтаева Г.Ж., Доненбаев Б.С., Куанов И.С. Теориялық механиканың барлық бөлімдеріне қатысты студенттердің алған білімдерін бақылау. Караганды, КарТУ, 2020,- 100 б.