ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

ҚАРАҒАНДЫ МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Аринова С.К.

Лекция

«Эксперимент нәтижелерін жоспарлау және өңдеу»

Қарағанды 2023ж

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

ҚАРАҒАНДЫ МЕМЛЕКЕТТІК ТЕХНИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Нанотехнологии және металлургия кафедрасы

Аринова С.К.

Лекция

PiORE 5107 «Эксперимент нәтижелерін жоспарлау және өңдеу» пәні

TET 02 «Технология және эксперимент» модулі

7M07102–«М|атериалтану және жаңа материалдар технологиясы» мамандығы

Қарағанды 2023

№ 9 Дәріс. Екінші ретті жоспарлар бойынша шешім қабылдау (2 сағат)

Оптимум облысын сипаттайтын модельді алған соң ,шешімді адекваттылық немесе адекваттылық емес сызықсыз модельдер белгісі бойынша қабылдайды.

Екінші ретті модельдер коэффицент маңыздылығы сызықтық модель кезіне қарағанда, тәжірибеде аз рөль атқарады. Ол модельдерді алудың мақсаттарының әр түрлілігімен байланысты: сызықты модель оптимум облысын іздеуге қажет, сызықты емес модель- оптимум облысын сипаттауға қажет.

Адекватсыздық сызықты емес модельде үшінші ретті жоспарлау қолданады, жоспарға алдын ала таңдалғаннан жаңа факторлар енгізеді, өзгерту интервалдарын қысқартып немесе негізгі фактор деңгейлерін өзгертіп барлық тәжірибелерді қайталайды.

Адекватты модельде ары қарай зерттеу қарастырылған мақсатқа байланысты.

Егер мақсат интерполяционды модельді алу болса, онда осында зерттеу аяқталады.Берілген модельде оптимум координатын экстремальды іздеу тәжірибе мақсат қойылады.

Екінші ретті модель жоспарын орындау нәтижесінде, оптимум облысын адекватты сипаттаушы теңдеу түрінде алады, қорытындалау өте қиын , сондықтан түрлену оны каноникалық түрге әкледі. Екінші ретті каноникалық түрлену теңсіздігі жаңа координат жүйесін таңдауда бекітіледі, онда ол қарапайым түрге енеді. Координаттардың жаңа жүйесі паралельді ауысумен ескі жүйені жаңа бастамаға және осы бастамаға қатысты координаттардың өсьтерді ауысуы.

Каноникалық түрлену теңсіздігі нәтижесінде каноникалық теңсіздік стандарттарына әкеледі:

$$y - y_s = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \cdots + b_{kk}x_k^2$$

мұнда $y -$ ОП мәні;

y_s- жаңа координат басындағы ОП;

x_1,x_2,… x_k– координаттарының жаңа өстері, факторлық ескі координат жүйесінің салыстырмалы (x_1,x_2,… x_k) кейбір бұрышына бұралған, немесе каноникалық айнымалылары факторлардың сызықты функциялары: $b_1, b_2, \dots b_{kk}$- регрессия теңдеулерінің коэффиценттері каноникалық түрде.

Координатын басын тасымалдау үшін бастапқы теңдеуді әрбір тәуелсіз айнымалары бойынша туындысын алады және жеке туындыларын нөлге теңестіреді. Алынған теңдеулер жүйесін шешсек жаңа координаттарын басын анықтаймыз ескі координат өстерінде $(x_{13}, x_{23}, \dots x_{k3})$. Жаңа координаттарының бастапқы теңдеуге қойсақ орталықтағы ОП (у$_3$) анықтаймыз.

Екінші ретті беттер орталық және орталық емес болады.Екінші жағдайда бас анықтауыш нөлге тең (қарастырылған теңдеу жүйесінде). Бұл жағдайда жаңа орталық ескі координат басына орналастырады немесе жақсы ОП мәні бар нүктеге.

Канорикалық түрленудің бірінші кезеңі координат басын ерекше нүктеге ауыстыру –отклик бетінің орталығы болып табылады. Осы нүктенің координаттарын анықтау үшін әрбір тәуелсіз ауыспалынынан бастапқы теңдеуді дифференциалдайды. Туындыларды нөлге теңестіріп К сызықты теңдеу жүйесін алады:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0; \frac{\partial y}{\partial x_2} = 0; \dots \dots \frac{\partial y}{\partial x_k} = 0.$$

Егер осы жүйенің анықтауышы нөлге тең болса, онда оклик беті орталығы болмайды. Теңдеу жүйесін шеше келе ескі координат жүйесінде Sбеті координаттар орталығын табады. S бетті координат орталығынан паралельді тасымалдаудан кейін бастапқы теңдеуде сызықтық әсері бар мүшелері жоғалады және ерікті мүшелерін өзгертеді.

Паралельді тасымалдаудан кейін координат басын жаңа орталыққа бастапқы теңдеу келесі түрге келеді:

$$y = y_s + \sum_{1 \le i \le j \le k} b_{ij} x_j + \sum_{1 \le i \le k} b_{ii} x_i^2,$$

немесе $\sum_{1 \le i \le k} b_i x_i$мүшелері жойылады.

Мысалы, координат басын жаңа орталыққа тасымалдау керек, екінші ретті жоспарлаудан кейінгі регрессия теңдеуін.

$$y = 262{,}3 - 117{,}6x_1 - 155{,}7x_2 + 6{,}0x_1x_2 + 41{,}76x_1^2 \qquad (1)$$

Теңдеуді тәуелсіз айнымалары бойынша теңдеуін алайық және жеке туындыларын нөлге теңестіріп және алынған теңдеу жүйесін анықтауыш арқылы жаңа орталығын координаттарын табымыз:

X_{1S}=1,30 , X_{2S}=1,44

Осы мәндерді (1) теңдеуге қойсақ бетін жаңа орталықтарында ОП мәнін анықтаймыз (Y_S):Y_S=262,3-117,6*1,30-
153,7*1,44+6,0*1,30*1,44+41,76*1,30^2+51,35
1,44^2=76,19

Сонымен координат басын жаңа орталыққа тасымалдағаннан кейін (1) теңдеу түрге келеді

$y= 76,49+6*x_1x_2+41,76x_1^2+51,35x_2^2$

Келесі үшінші реті жоспарлауға

$y=49,2+12,62x_1+15,34x_2+22,20x_3+1,57x_1x_2+4,64x_1x_3+3,77x_2x_3-0,61x_1^2-2,91x^2{}_2-3,42x^3{}_3$
$x_{1S}=-8,97$; $x_{2S}=-3,12$; $x_{3S}=-4,22$.

Осы мəндерді жоғары теңдеуге қойсақ келесі түрге келеді:
$y= -74,63+1,57x_1x_2+4,64\ x_1x_3+3,77x_2x_3-0,61x^2{}_1-0,91x_2^2-3,42x^2{}_3$

Жаңа орталыққа аударғансоң, координат өсінен бұрайды, бастапқы теңдеуде
$\sum_{1\le i\le j\le k} b_{ij}x_ix_j$мүшелері болмау үшін,немесе b_{ii}коэффицентерін анықтайды.
Осы мақсатпен характеристкалық теңдеуді шешеді:

$$f(B)=\begin{vmatrix} (b_{11}-B) & \frac{1}{2}b_{12} & \frac{1}{2}b_{1k} \\ \frac{1}{2}b_{21} & (b_{22}-B) & \frac{1}{2}b_{2k} \\ \frac{1}{2}b_{k1} & \frac{1}{2}b_{k2} & (b_{kk}-B) \end{vmatrix}$$

Мысалы, екі факторлі есептің квадрат теңдеуін соңғы каноникалық түрге келтіру үшін

$$f(B)=\begin{vmatrix} (41,76-B) & \frac{1}{2}\cdot 6,0 \\ \frac{1}{2}\cdot 6,0 & (31,35-B) \end{vmatrix}=B^2 -93,11\ B +2135,4=0$$

Осы квадрат теңдеуінің шешімі келесі:
$B_{11}=52,22$; $B_{22}=40,89$.
Есептеудің дұрыстығын коэффицент қосындысы арқылы тексереді квадратты мүшелерінде бастапқы жəне каноникалық теңдеулерінде:

$$\sum_{1\le i\le k} b_{ii\approx}\sum_{1\le i\le k} b_{ii}$$

Қарастырған жағдайда

$$\sum_{i=1}^{2} b_{ii}=41,76+51,35=93,11;$$

$$\sum_{i=1}^{2} b_{ii} = 52{,}22 + 40{,}89 = 93{,}11\,;$$

Теңдеудің соңғы каноникалық түрі
у-76,19=52,22x_1^2+40,89x_2^2
Дәл осылай коэффиценттерін анықтау үшін үш факторлы есептін характеристикалық теңдеуі шешіледі:
Анықтайтын коэффициент мәндері: B_{11}, B_{22}, B_{33} кубтік теңдеуді шешкеннен шығады.
Берілген жағдайда
B^3+6,94B^2+4,24B-20,74=0. Осы теңдеуді шешу үшін Кардано әдісін қолданады
B_{11}=1,19, B_{22}=-2,44, B_{33}=-5,68.

Есептеу дұрыстығын тексерейік

$$\sum_{i=1}^{3} b_{ii} = -0{,}61 - 2{,}91 - 3{,}42 = -6{,}94;$$
$$\sum_{i=1}^{3} B_{ii} = -1{,}19 - 2{,}44 - 5{,}68 = -6{,}94.$$

Сонында каноникалқ теңдеу келесі түрге келеді

$$Y + 74{,}63 = 1{,}19x_1^2 - 2{,}44x_2^2 - 5{,}68x_3^2.$$

B_{ii} коэффициентері арқылы бағытауыш косинустарын анықтауға болады және жаңа координаттарын өрнектейтін теңдеу жүйесін алуға болады. Екі фактор жағдайына

$$X_1 = cos\alpha_1(x_1 - x_{1s}) + cos\beta_1(x_2 - x_{2s});$$
$$X_2 = cos\alpha_2(x_1 - x_{1s}) + cos\beta_2(x_2 - x_{2s}).$$

Үш факторлі жағдайда

$$X_1 = cos\alpha_1(x_1 - x_{1s}) + cos\beta_1(x_2 - x_{2s}) + cos\gamma_1(x_3 - x_{3s});$$
$$X_2 = cos\alpha_2(x_1 - x_{1s}) + cos\beta_2(x_2 - x_{2s}) + cos\gamma_2(x_3 - x_{3s});$$
$$X_3 = cos\alpha_3(x_1 - x_{1s}) + cos\beta_3(x_2 - x_{2s}) + cos\gamma_3(x_3 - x_{3s}).$$

Кері өту, мысалы, үш факторлы жағдайында келесі теңдеу арқылы жасайды

$$x_i = cos\alpha_k X_p + cos\beta_k X_p + cos\gamma_k X_p + x_{js}$$

i=1,2,3
k=1,2,3
p=1,2,3
j=1,2,3

Косинус бағытауышы теңдеу жүйесін шешіп анықталынады: екі факторға

$$(b_{11}-B_{11})cos\alpha_x+\tfrac{1}{2}b_n cosB_y=0;$$
$$\frac{1}{2}b_{12}cos\alpha+(b_{22}-B_{22})cosB_y=0;$$

Үш факторға

$$(b_{11}-B_{11})cos\alpha_x+\frac{1}{2}b_{12}cosB_y+\frac{1}{2}b_{13}cos\gamma_z=0;$$
$$\frac{1}{2}b_{12}cos\alpha_x+(b_{22}-B_{22})cosB_y+\frac{1}{2}b_{23}cos\gamma_z=0;$$
$$\frac{1}{2}b_{31}cos\alpha_x+\frac{1}{2}b_{32}cosB_y(b_{33}-B_{33})cos\gamma_z=0.$$

Сонымен, квадратты теңдеуді каноникалық түрге келесі тізбек бойынша іске асырылады:

1)Бастапқы теңдеуді әр айнымалы бойынша туындысын алып алынған теңдеуін шешіп жаңа орталықтың координаттарын анықтаймыз және ОП (Y_s) мәнін.

2) Характеристикалық теңдеуді шешіп B_{ii}коэффициентерін, каноникалық теңдеуін анықтаймыз.

3) Егерде ол, жаңа координаттарын ескі координаты арқылы анықтау үшін бағытауыш косинустарын анықтау үшін.

Каноникалық регрессия теңдеуі талдаумен оптималдауға ыңғайлы, өйткені барлық факторлар X_iквадрат болып кіреді және $Y-Y_s$өзгеруі B_{ii}коэффициенттерімен байланысты X_i өсі бойындағы қозғалуынан S оратолығынан тәуелсіз. Шынында да, ОП $Y-Y_s$ ылғи артады, $B_{ii}>0$ болғанда және кемиді егерде $B_{ii}<0$.

Егерде барлық B_{ii} коэффициенттер нөлге тең болмаса және бетін орталығы тәжірибе аймағында жатса, онда келесі жағдайлар мүмкін:

1) Барлық $B_{ii}<0$, онда орталықтан кез-келген жақа жылжуы ОП кемиді;

2) Барлық $B_{ii}>0$ болса, онда орталықтан кез-келген жақа жылжуы ОП артады;

3) Жартысы $B_{ii}<0$, ал басқасы $B_{ii}>0$ болғанда, онда ОП арту үшін ортадан жылжығанда X_iмәні сол таңбалы коэффициентімен нөлге тең болу керек, немесе $B_{ii}>0$ коэффициентімен өсі бойында экстремумін іздеу

керек; керісінше ОП кеңейту үшін $B_{ii} > 0$ коэффициенті бар өсі бойында жылжу қажет.

Квадратты теңдеуді каноникалық түрде геометрикалық бейнесі изосызықты түрде, факторлар k=2 немесе беттері түрде факторлар k=3.

k=2 болған жағдайда $Y - Y_s = B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2$теңдеуіне изосызықтар келесі түрде болады (сурет):

а) Эллипстер (сурет а). Екі коэффициенттерінің B_{11} және B_{22} таңбалары бірде эллипс орталығы S минимум болады, егерде B_{11} және B_{22} сол таңбалы болса, және минимум болады, егерде B_{11} және B_{22} оң таңбалы болса. Егерде, B_{22} абсолютті мәні бойынша B_{11} аз болса, онда эллипстер X_2 өсі бойында ұзарылады және керісінше. Отклик беті эллиптикалық параболла болады. Бұл жағдайда, экстремумді іздеу үшін тәжірибе финуранын орталығында өткізседе жеткілікті және ОП мәні регрессия теңдеуінің мәнімен дәл екенін тексеру қажет.

б) гиперболалар (сурет б). Коэффициенттер B_{11} және B_{22} әртүрлі таңбалары болады. Каноникалық теңдеудегі абсолютті мәні бойынша аз коэффициентіне сәйкес өсі бойынша созылады. Бұл жағдайда ОП мәні ортадан жылжығанда бір өсі бойында артады және басқа өсі бойында кемиді.

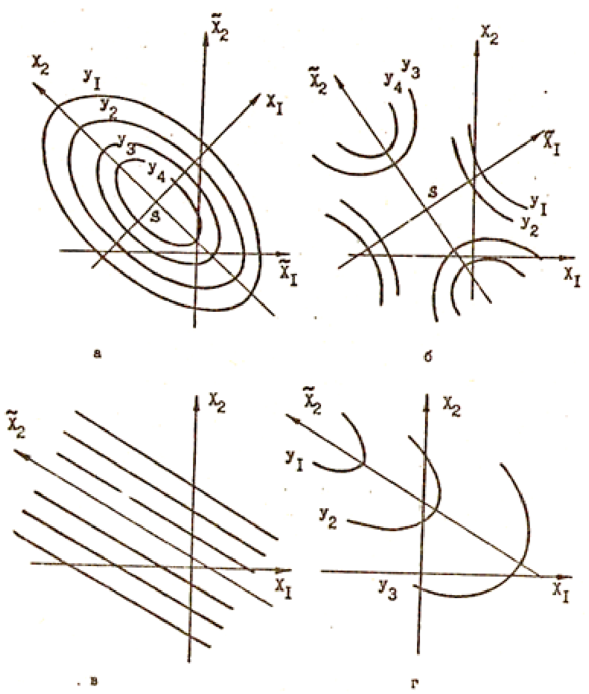
Егерде, мысалы, $B_{11} > 0$, ал $B_{22} < 0$ $(Y - Y_s = B_{11}X_1^2 - B_{22}X_2^2)$, онда ОП артады ортадан + X_1 және $-X_1$ бағытында қозғалғанда және кемиді ортадан + X_1 және $-X_1$ бағытында қозғалғанда. Фигура орталығы седло немесе минимак деп аталады. Отклик беті гиперболоидті параболоид болады. Зерттеуші қандай мақсат қойылған бойынша жылжиды – максимумға немесе минимумға. Мұнда тік өрлеудегідей ойлы тәжірибелер өткізіледі, бір бөлігі іске асырылады.

Паралельді тіктер (сурет в).Каноникалық теңдеуінің біркоэффиценті нөлге тең, мұнда максимальді ОП мәні бар бір орталығы жоқ. Орталық ретінде мұнда өстегі кез-келген нүкте болады, каноникалық теңдеудің мәнсіз коэффицентіне сәйкес.Отклик беті стационарды көтерінкі болады.

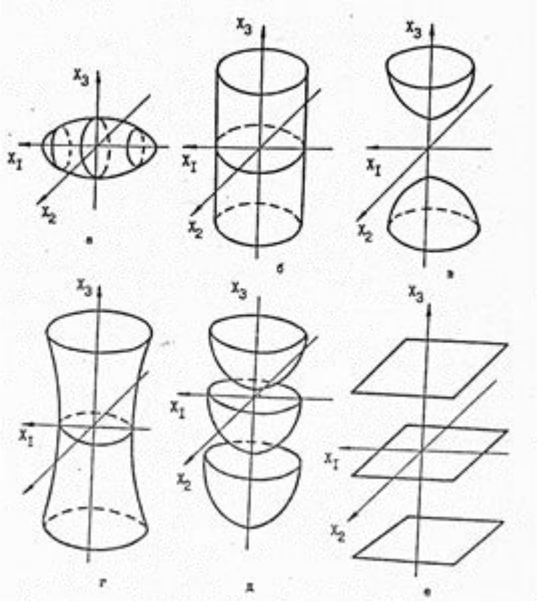
Параболалар (сурет 2). Каноникалық теңдеудің бір коэффиценті нөлге тең, және фигура орталығы шексіздікке жатады.Отклик беті артатын көтерінкі (возвышенность) болады. Бұл жағдайда координат басын өсінің кейбір нүктесіне (тәжірибе ортасына жақын) орналастырады. Мәнсіз коэффицентіне сәйкес, осылай парабола теңдеуін алады. Мысалы, B_{22} нөлге тең болса, онда жаңа орталықты S таңдап парабола теңдеуін аламыз $y - y_{s'}{=}B_{ii}x_1^2 + B_2X_2$, мұнда $B_2 - X_2$ өсі бойында ОП жылдамдығын артуын анықтайтын коэффицент.

Практикалық есептерде (в), (2) жағдайлары сирек кездеседі.Фигура орталығы S тәжірибе өткізілген аймағының сыртынан алыс болған жағдайлар жиі кездеседі, және сонда B_{11} және B_{22} біреуі нөлге жақын.Сонда,көтерілу көлбеуіне байланысты отклик беті немесе стационарды, немесе ортаның көтеруімен аппроксимацияланады.

Осылай келесі $y - y_s$=$B_{11}x_1^2 + B_{22}X_2{}^2 + B_{33}X_3{}^3$ канондық теңдеуінің талдауын тексеруге болады, фактор саны К=3 болғанда.Мысалы ,егерде барлық коэффиценттердің B_{ii} таңбалары бірдей болса, онда отклик беті айналу эллипеоиді болады (сурет а) және экстремиум эллипсоид орталығында болады. Егерде бір коэффицентінің таңбасы басқа таңбасына қарама-қарсы болса, онда бір немесе екі полості гиперполоид болады (сурет б және в). Каноникалық теңдеудің бір коэффиценті нөлге жақын болса,отклик беті эллипті цилиндр болады (сурет 2), егерде қалған екі коэффиценттерінің таңбалары бірдей болса және гиперболидті цилиндр (сурет д) болады егерде қалған коэффицентіне сәйкес өс максимум сызығы болады және одан кез келген бағытта алыстау ОП байланысты (стационарлық көтерілу).Бір коэффицент каноникалық теңдеудің нөлге жақын болған жағдайда отклик беті эллипті немесе гиперболоидті болады (сурет е және э сәйкес). Эллипті параболоид жағдайында (сурет е) фигура орталығы шексіздікте болады. Координат басын кейбір жаңа S мәнсіз коэффицентіне сәйкес өсінің S' нүктесіне орнатып (мысалы, B_{22}=0, жаңа орталық X_2 өсінде таңдалады) теңдеу алуға болады.



1-сурет. Фактор саны К=2 болғанда оптимум аймағынсипаттайтың екінші ретті теңдеулермен жазбаланатың контурлы қисықтар: а - экстремум; б-минимакс; в- стационарлы көтерілуі;г-өсетің көтерілуі



2-сурет. Фактор саны К=3 болғанда оптимум аймағын сипаттайтың екінші ретті теңдеулермен жазбаланатың үш өлшемді контурлы қисықтар: а – айналатың эллипсоид; б-эллиптикалық цилиндр; в- екі полосты гиперболоид; г-бір полосты гиперболоид;д-эллиптикалық параболоид; е-параллельді жазықтықтар.

Пайдаланған әдебиеттер тізімі

1. Статистические методы в инженерных исследованиях (лабораторный практикум): Учебн. Пособие / Бородюк В.П.,Вощинин А.П., Иванова А.З., и др.:Под ред.Г.К. Круга –М.: высшая школа,1983.-216с.

2. Талмазан В.А. Методические указания по программированному изучению курса Организация эксперимента.-Алма-Ата:РУМК,1989-49с.

3. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В., Планирование экспермента при поиске оптимальных условий .-М.:Наука,1975.-279с.

4. Ахназарова С.Л.,Кафаров В.В.Оптимизация эксперимента в химии и химической технологии.-М.:Высшая школа,1978.-320с.

5. Зедгенидзе И.Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем.-М.:Наука,1976.-390с.

6. Бондарь А.Г.,Статюха Г.А. Планирование эксперимента в химической технолгии (основные положения , примеры и задачи).-Киев :Высшая школа,1976.-184 с.

7. Горский В.Г., Адлер Ю.П.Планирование промышленных экспериментов.-М:металлургия ,1974.-264 с.

8. Прудковский Б.А. Зачем металлургу математическая модель-М.: Наука,1989.-264с.

9. Цымбал В.П. Математическое моделирование металлургических процессов –М.: Металлургия ,1986,-240с.

10. Дэдиел К. Применение статистики в промышленном эксперименте.-М.:1979.- 260с

11. Вознесенский В.А.,Ковальчук А.Ф. Принятие решений по статистическим моделям .-М.: Статистика ,1978.-192с.

12 Спиридонов А.А.,Васильев Н.Г. Планирование эксперимента при исследовании и оптимизации технологических процессов.-Свердловск:УПИ им С.М. Кирова ,1975.-140с.

13. Винарский М.С.,Жадан В.Т.,Кулак Ю.Е.Математическая статистика в черной металлургии .-Киев :Техника, 1973.-220с.

14. Налимов В.В. Теория эксперимента.М.:Наука ,1971-207с.

15. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах.-

М.:Мир ,1969.-345с.

16. Смирнов Н.В., Дунин –Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений.-М.:Наука,1969.-511 с.

17.Адлер Ю.П. Введение в планирование эксперимента.-М.:Металлургия,1969.-157с.

18. Пустыльник Е.И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений.-М.:Наука,1968.-288с.

19. Налимов В.В.,Чернова Н.А. Статистическиеметоды планирования экстремальных экспериментов .-М.:Наука,1965.-340с.

20. Спиридонов А.А. Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов.-М.: Машиностроение,1981.-184 с.

21. Новик Ф.С. Математические методы планирования экспериментов в металловедении. Разделы II-У. Изд. МИС иС, 1969-71 г.