13Регрессионный анализ.

Дисперсионный анализ развит английским статистиком Р. Фишером, применен им для сравнения нескольких средних ($p > 2$) на основе сравнения дисперсий. На практике задача состоит в установлении того, оказывает ли существенное влияние некоторый качественный фактор F, который имеет p уровней на изучаемую величину X. Основная цель дисперсионного анализа состоит в сравнении «факторной дисперсии», порождаемой воздействием фактора, и «остаточной дисперсии», обусловленной случайными причинами. Если различие между этими дисперсиями значимо, то фактор оказывает существенное влияние на X; в этом случае средние наблюдаемых значений на каждом уровне (групповые средние) различаются значимо.

Пусть на количественный нормально распределенный признак X воздействует на F, который имеет p постоянных уровней. Предполагается, что число наблюдений (испытаний) на каждом уровне одинаково и равно q.

Пусть наблюдалось $n = pq$ значений x_{ij} признака X, где i – номер испытания ($I = 1, 2, \ldots, q$), j – номер уровня фактора ($j = 1, 2, \ldots, p$). Результаты наблюдений приведены в таблице (табл. 15.1), которая называется **матрицей наблюдения**.

Таблица 15.1.

Номер испытания i	Уровни фактора F_j			
	F_1	F_2	…	F_p
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}
…	…	…	…	…
q	x_{q1}	x_{q2}	…	x_{qp}
Групповая средняя	$\bar{x}_{гр1}$	$\bar{x}_{гр2}$	...	$\bar{x}_{гр}$

Выдвигаем гипотезу H_0 заключающуюся в равенстве средних выборочных:

$$H_0 : \bar{x}_1 = \bar{x}_2 = ... = \bar{x}_m$$

$$H_1 : \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2 \neq ... \neq \bar{x}_m$$

Гипотеза H_0 проверяется сравнением внутригрупповых и межгрупповых дисперсий по F критерию Фишера.

Если расхождение незначительно, то принимается гипотеза H_0, в противном случае гипотеза H_0 отвергается.

Введем, по определению, *общую сумму* квадратов отклонений наблюдаемых значений от общей средней $\bar{x}$:

$$S_{общ} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}(x_{ij} - \bar{x})^2 ,$$

факторную сумму квадратов отклонений групповых средних от общей средней, которая характеризует рассеяние «между группами»,

$$S_{факт} = q\sum_{i=1}^{p}(\bar{x}_{грj} - \bar{x})^2 ,$$

остаточную сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений группы от своей групповой средней, которая характеризует рассеяние «внутри групп»,

$$S_{ост} = \sum_{i=1}^{q}(x_{i1} - \bar{x}_{гр1})^2 + \sum_{i=1}^{q}(x_{i2} - \bar{x}_{гр2})^2 + ... + \sum_{i=1}^{q}(x_{ip} - \bar{x}_{гр})^2 \text{, или}$$

$$S_{ост} = S_{общ} - S_{факт}.$$

Расчетные формулы для дисперсионного анализа:

$$S_{общ} = \sum_{i=1}^{p} P_j - \left[\left(\sum_{i=1}^{q} R_j \right)^2 \Big/ pq \right],$$

$$S_{факт} = \left[\left(\sum_{j=1}^{p} R_j^2 \right) \Big/ q \right] - \left[\left(\sum_{i=1}^{p} R_j \right)^2 \Big/ pq \right], \qquad (15.1)$$

где

$P_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}^2$ - сумма квадратов значений признака на уровне F_j;

$R_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}$ - сумма значений признака на уровне F_j.

Получим оценки дисперсий:

- дисперсия, обусловленная влиянием фактора $S_{факт}^2 = \dfrac{S_{факт}}{p-1}$;
- остаточная дисперсия, обусловленная влиянием случайных и других неучтённых факторов $S_{ост}^2 = \dfrac{S_{ост}}{p(q-1)}$;
- общая дисперсия $S_{общ}^2 = \dfrac{S_{общ}}{pq-1}$.

(15.2)

Далее формируем оценку различия между оценками $S_{факт}^2$ и $S_{ост}^2$:

$F_{набл} = \dfrac{S_{факт}^2}{S_{ост}^2}$ подчиняется распределению Фишера.

Выбираем уровень значимости α и по таблице F-распределения с числом степеней свободы: $k_1 = p - 1$; $k_2 = p(q - 1)$ находим критическое значение $F_{кр}(\alpha, k_1, k_2)$ Фишера.

Если $F_{набл} > F_{кр}$, то гипотеза H_0 о равенстве групповых средних отвергается.

Замечание 1. Для упрощения вычислений вычитают из каждого наблюдаемого значения одно и то же число С, примерно равное общей средней, т. е. $y_{ij} = x_{ij} - C$.

Замечание 2. При неодинаковом числе испытаний на различных уровнях используют объем выборки, равный общему числу испытаний $n = q_1 + q_2 + \ldots + q_p$.

Пример 15.1.

Исследовать влияние числа оборотов вращения центрифуги при нанесении фоторезиста на равномерность слоя фоторезиста. Отклонение толщины плёнки от среднего значения равно 1 мкм при различных частотах вращения центрифуги помещены в таблице:

наблюдения	Частоты вращения центрифуги об/мин		
	1000	2000	3000
1	0,16	0,04	0,06
2	0,06	0,13	0,02
3	0,18	0,14	0,06
4	0,22	0,04	0,06
5	0,12	0,06	0,04
6	0,22	0,14	0,04
7	0,2	0,06	0,02
8	0,06	0,08	0,06
Групповая средняя	0,1525	0,08625	0,045

Решение:

Для вычисления оценок дисперсий составим расчетную таблицу:

наблюдения	Частоты вращения центрифуги об/мин						сумма
	1000		2000		3000		
	x_{i1}	x_{i1}^2	x_{i2}	x_{i2}^2	x_{i3}	x_{i3}^2	
1	0,16	0,0256	0,04	0,0016	0,06	0,0036	
2	0,06	0,0036	0,13	0,0169	0,02	0,0004	
3	0,18	0,0324	0,14	0,0196	0,06	0,0036	
4	0,22	0,0484	0,04	0,0016	0,06	0,0036	
5	0,12	0,0144	0,06	0,0036	0,04	0,0016	

6	0,22	0,0484	0,14	0,0196	0,04	0,0016	
7	0,2	0,04	0,06	0,0036	0,02	0,0004	
8	0,06	0,0036	0,08	0,0064	0,06	0,0036	
$P_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}^2$		0,2164		0,0729		0,0184	0,3077
$R_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}$	1,22		0,69		0,36		2,27
R_j^2	1,4884		0,4761		0,1296		2,0941

По расчетным формулам (15.1) находим:

$$S_{общ} = \sum_{i=1}^{p} P_j - \left[\left(\sum_{i=1}^{q} R_j\right)^2 \Big/ pq\right] = 0,3077 - \frac{2,27^2}{3 \cdot 8} = 0,093,$$

$$S_{факт} = \left[\left(\sum_{j=1}^{p} R_j^2\right) \Big/ q\right] - \left[\left(\sum_{i=1}^{p} R_j\right)^2 \Big/ pq\right] = \frac{2,0941}{8} - \frac{2,27^2}{24} = 0,047,$$

$$S_{ост} = S_{общ} - S_{факт} = 0,2204 - 0,1745 = 0,0459.$$

Найдем оценки дисперсий по формуле (15.2):

$$S_{факт}^2 = \frac{S_{факт}}{p-1} = \frac{0,044}{3-1} = 0,0235$$

$$S_{ост}^2 = \frac{S_{ост}}{p(q-1)} = \frac{0,0459}{3 \cdot (8-1)} = 0,0022$$

Воспользуемся критерием Фишера:

$$F_{набл} = \frac{S_{факт}^2}{S_{ост}^2} = 10,7562$$

$$F_{кр}(0,05; 2; 21) = 3,4668$$

Т. к. $F_{набл} > F_{кр}$, то H_0 отвергается, принимается гипотеза H_1 – зависит от частоты вращения центрифуги.

14Дискретные цепи Маркова.

Марковские СП, или процессы без последствия, являются удобной математической моделью для многих реальных процессов. Рассмотрим систему, которая может находиться в различных состояниях, и пусть ее эволюция во времени носит стохастический характер, то есть состояние системы в момент времени t в общем случае не определяется однозначно состояниями системы в предыдущие моменты $s < t$. Тогда состояние этой системы можно описать некоторым случайным процессом $\xi(t)$, заданным на интервале времени T и принимающим значения из множества X.

Если множество $X = \{i_1, i_2, ..., i_n, ...\}$ счетно или конечно, то марковский процесс называется **цепью Маркова**.

Цепь Маркова, у которой множество T дискретно, например, $T = \{0, 1, 2, ...\}$, называется **цепью с дискретным временем**.

Обычно марковскую цепь изображают в виде **графа состояний**, вершины которого соответствуют возможным состояниям системы, а ребра (дуги, стрелки) – возможным переходам системы из состояния в состояние (рис. 18.1).

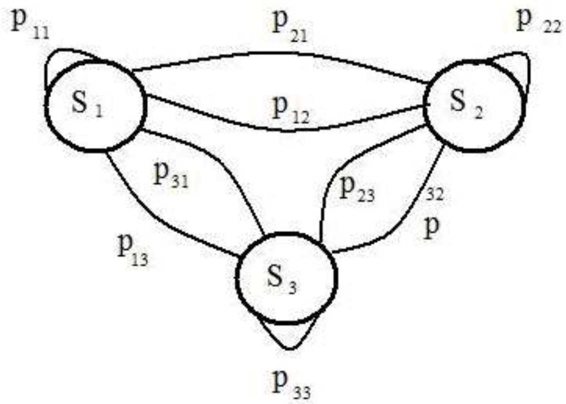


Рисунок 18.1. Граф цепи Маркова.

Переходной вероятностью p_{ij} называют условную вероятность того, что из состояния i (в котором система оказалась в результате некоторого испытания) в итоге следующего испытания перейдет в состояние j. Пусть число состояний конечно и равно k.

Матрицей вероятностей перехода системы называют матрицу, которая содержит все переходные вероятности этой системы:

$$P_1(k) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix},$$

и вектором начальных состояний $P(0) = p\{\xi(0) = k\},\ k \in X$.

Свойства вероятностей марковских цепей:

1. $\sum_{i=1}^{n} p_{ij}(k) = 1$ – i-ая строка содержит вероятности перехода из i-го состояния в j-ое состояние;

2. $\sum_{i=1}^{n} p_{i}(k) = 1$ – сумма вероятностей несовместных событий.

Зная переходные вероятности p_{ij}, можно найти $P_{ij}(n)$ перехода системы из состояния i в состояние j за n шагов. В общем случае имеем в матричной форме: $P(n) = P(0) \cdot P_1^n(k)$.

Однородные цепи Маркова

Если $p_{ij}(t,\ t')$ зависит от разности промежутка времени $t' - t$, то марковский процесс называют **однородным**: $p_{ij}(t,\ t') = p_{ij}(t' - t) = p_{ij}(\tau)$, для которого выполняются следующие условия: 1) $p_{ij}(\tau) \geq 0$; 2) $\sum_{j \in X} p_{ij}(\tau) = 1$.

Для однородных марковских процессов имеет место соотношение:

$p_j(t) = \sum_k p_k(0) p_{kj}(t)$, где $p_k(0) = p\{\xi(0) = k\}$, $p_j(t) = p\{\xi(t) = j\}$ – абсолютные вероятности, $p_{kj}(t) = p(\tau = t - 0)$.

Переходные вероятности однородной цепи Маркова удовлетворяют уравнению Чепмена-Колмогорова:

$$p_{ij}^{(n+l)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj}^{(l)}.$$

В ряде практических задач наибольший интерес представляет установившийся (стационарный) режим, который устанавливается при достаточно большом времени от начала процесса.

Цепь Маркова с дискретным временем называется **эргодической**, если $\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = \pi_j,\ \forall j \in X$. Эти вероятности π_j называются **финальными (предельными)** вероятностями, которые не зависят ни от t, ни от i.

Эргодическая теорема. Для однородной цепи Маркова финальные вероятности π_j удовлетворяют системе уравнений

$$\pi_j = \sum_{k=1}^{n} \pi_k p_{kj},\ j = \overline{1, n}.$$

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1.$$

Правило составления уравнений для стационарных вероятностей состояний марковского процесса с дискретным временем по графу переходов: в левой части уравнения записывается стационарная вероятность рассматриваемого состояния. Правая часть представляет собой сумму членов, число которых равно числу дуг, входящих в рассматриваемое состояние. Каждый член представляет собой произведение вероятности перехода, соответствующей данной дуге, на вероятность состояния, из которого исходит эта дуга.

Цепи Маркова с непрерывным временем

Рассмотрим марковский процесс $\xi(t)$ с конечным или счетным множеством состояний X, который изменяется свои состояния в произвольные моменты времени непрерывного интервала T. Такой процесс называется **цепью Маркова с непрерывным временем**, если для моментов $s < t < t'$ условная плотность распределения не зависит от значений процесса в моменты $t < s$, а определяется лишь значением $\xi(t) = i$, т. е.

$$P\{\xi(t') = j \mid \xi(t) = i, \xi(s) = k\} = P\{\xi(t') = j \mid \xi(t) = i\}.$$

Эту условную плотность вероятностей называют **вероятностью перехода** системы из i-го состояния, в котором она находилась в момент времени *t*, в j-ое состояние в момент $t' > t$ и обозначают $p_{ij}(t, t') = p\{\xi(t') = j \mid \xi(t) = i\}$.

Для дискретных марковских процессов с непрерывным временем имеет место **уравнение Чепмена-Колмогорова**:

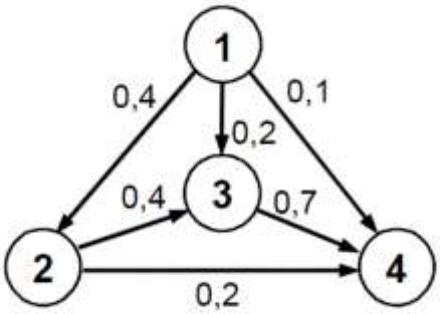
$$p_{ij}(t,t') = \sum_k p_{ik}(t,s) \cdot p_{kj}(s,t'),\ \forall t < s < t'.$$

Пример 18.1.

Цель (самолет) обстреливается из зенитной установки очередью из четырех снарядов с интервалом τ. После каждого выстрела самолет может остаться невредимым (состояние 1), получить незначительные (состояние 2) или значительные (состояние 3) повреждения, а также может быть сбитым (состояние 4).

Необходимо определить вероятности всех состояний самолета после четырех выстрелов.

Перед началом обстрела самолет находится в работоспособном состоянии ($P_1(0) = 1$, $P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0$) и вектор вероятностей состояний $P(0) = (1, 0, 0, 0)$. Размеченный граф состояний имеет вид (цифрами на стрелках указаны вероятности соответствующих переходов после каждого выстрела):



Решение: составим матрицу переходов:

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После первого выстрела вектор вероятностей состояний самолета

$$\mathrm{P}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

После второго выстрела

$$\mathrm{P}(2) = \mathrm{P}(0) \cdot (\mathrm{P})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 =$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}09 & 0{,}28 & 0{,}28 & 0{,}35\\ 0 & 0{,}16 & 0{,}28 & 0{,}56\\ 0 & 0 & 0{,}09 & 0{,}91\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}09 & 0{,}28 & 0{,}28 & 0{,}35\end{pmatrix}.$$

После третьего выстрела

$$P(3)=P(0)\cdot(P)^3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2\\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^3=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}027 & 0{,}148 & 0{,}214 & 0{,}611\\ 0 & 0{,}064 & 0{,}148 & 0{,}788\\ 0 & 0 & 0{,}027 & 0{,}973\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}027 & 0{,}148 & 0{,}214 & 0{,}611\end{pmatrix}.$$

После четвертого выстрела

$$P(4)=P(0)\cdot(P)^4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1\\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2\\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^4=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}0081 & 0{,}07 & 0{,}1288 & 0{,}7931\\ 0 & 0{,}0256 & 0{,}07 & 0{,}9044\\ 0 & 0 & 0{,}0081 & 0{,}9919\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}0081 & 0{,}07 & 0{,}1288 & 0{,}7931\end{pmatrix}.$$

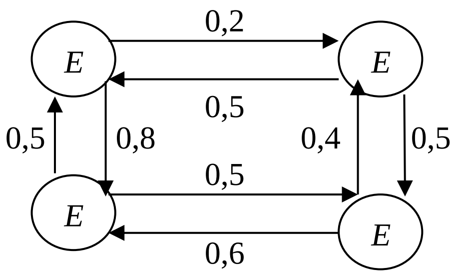
Таким образом, после четвертого выстрела вероятности состояний: цель не повреждена - 0,0081, незначительные повреждения - 0,07, значительные повреждения - 0,1288, цель сбита - 0,7931.

Пример 18.2.

Рассмотрим систему, которая состоит из двух устройств y_1 и y_2, каждое из которых может находиться в одном из двух состояний: не работает (состояние 0) и работает (состояние 1). В определенные моменты времени может включиться или выключиться только одно устройство. Пусть процесс функционирования такой системы описывается процессом с дискретным временем. Известны вероятности переходов, представленные в виде матрицы:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

и начальные вероятности $P_0(0) = 0{,}7$, $P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = 0{,}1$. Граф переходов для этого процесса имеет вид:



Определим вероятности состояний на различные моменты времени. Составим систему уравнений Колмогорова для однородных марковских процессов на момент времени t_1:

$P_0(t_1) = P_0(0)\, p_{00} + P_1(0)\, p_{10} + P_2(0)\, p_{20} + P_3(0)\, p_{30} = 0{,}1;$

$P_1(t_1) = P_0(0)\, p_{01} + P_1(0)\, p_{11} + P_2(0)\, p_{21} + P_3(0)\, p_{31} = 0{,}18;$

$P_2(t_1) = P_0(0)\, p_{02} + P_1(0)\, p_{12} + P_2(0)\, p_{22} + P_3(0)\, p_{32} = 0{,}62;$

$P_3(t_1) = P_0(0)\, p_{03} + P_1(0)\, p_{13} + P_2(0)\, p_{23} + P_3(0)\, p_{33} = 0{,}1;$

на момент времени t_2:

$P_0(t_2) = P_0(t_1)\, p_{00} + P_1(t_1)\, p_{10} + P_2(t_1)\, p_{20} + P_3(t_1)\, p_{30} = 0{,}4;$

$P_1(t_2) = P_0(t_1)\, p_{01} + P_1(t_1)\, p_{11} + P_2(t_1)\, p_{21} + P_3(t_1)\, p_{31} = 0{,}06;$

$P_2(t_2) = P_0(t_1)\, p_{02} + P_1(t_1)\, p_{12} + P_2(t_1)\, p_{22} + P_3(t_1)\, p_{32} = 0{,}14;$

$P_3(t_2) = P_0(t_1)\, p_{03} + P_1(t_1)\, p_{13} + P_2(t_1)\, p_{23} + P_3(t_1)\, p_{33} = 0{,}4;$

и т. д.

Предполагая, что рассматриваемый случайный процесс обладает эргодическим свойством, определим вероятности состояний для стационарного режима. Финальные вероятности π_0, π_1, π_2, π_3 могут быть найдены по эргодической теореме:

$$\begin{cases} \pi_0 = 0{,}5\,\pi_1 + 0{,}5\,\pi_2, \\ \pi_1 = 0{,}2\,\pi_0 + 0{,}4\,\pi_3, \\ \pi_2 = 0{,}8\,\pi_0 + 0{,}6\,\pi_3, \\ \pi_3 = 0{,}5\,\pi_1 + 0{,}5\,\pi_2. \end{cases}$$

Заменив, одно из уравнений системы условием нормировки $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, получим решение: $\pi_0 = 0{,}25$; $\pi_1 = 0{,}15$; $\pi_2 = 0{,}35$; $\pi_3 = 0{,}25$.

Пример 18.3.

Две автомашины *A* и *B* сдаются в аренду по одной и той же цене. Каждая из них может находиться в одном из двух состояний: *i*1 – машина работает хорошо, *i*2 – машина требует ремонта, которые образуют цепь Маркова. Матрицы вероятностей переходов между состояниями за сутки для этих машин равны соответственно

$$P_A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}, \; P_B = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Определить финальные вероятности состояний для обеих автомашин. Какую автомашину стоит арендовать?

Решение. Найдем финальные вероятности состояний для первой $\pi_A = \left(\pi_A^1, \pi_A^2\right)$ и для второй $\pi_B = \left(\pi_B^1, \pi_B^2\right)$ автомашин согласно уравнениям: $\pi_A = \pi_A P_A$, $\pi_B = \pi_B P_B$.

Составим системы уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}8\pi_A^1 + 0{,}7\pi_A^2 = \pi_A^1 \\ 0{,}2\pi_A^1 + 0{,}3\pi_A^2 = \pi_A^2, \\ \pi_A^1 + \pi_A^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0{,}7\pi_B^1 + 0{,}6\pi_B^2 = \pi_B^1 \\ 0{,}3\pi_B^1 + 0{,}4\pi_B^2 = \pi_B^2, \\ \pi_B^1 + \pi_B^2 = 1 \end{cases}$$

откуда получаем (любое из первых двух уравнений системы можно исключить): $\pi_A = \left(\frac{7}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\pi_B = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Отсюда следует, что первая автомашина будет более часто находиться в исправном состоянии, чем вторая, т. е. лучше арендовать первую автомашину.

15Случайные процессы.

Определение и характеристики стационарного случайного процесса

Среди случайных функций целесообразно выделить класс функций, математические ожидания которых сохраняют одно и то же постоянное значение при всех значениях аргумента t и корреляционные функции которых зависят только от разности аргументов $t_2 - t_1$. Такие случайные функции называют "стационарными в широком смысле" в отличие от случайных функций, «стационарных в узком смысле» (все характеристики этих функций не зависят от самих значений аргументов, но зависят от их взаимного расположения на оси t).

Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле; обратное утверждение неверно.

Стационарной называют случайную функцию X(t), математическое ожидание которой постоянно при всех значениях аргумента t и корреляционная функция которой зависит только от разности аргументов $t_2 - t_1$. Из этого определения следует, что:

1. корреляционная функция стационарной случайной функции есть функция одного аргумента $\tau = t_2 - t_1$, т. е.

$$K_x(t_1,t_2) = k_x(t_2 - t_1) = k_x(\tau);$$

2. дисперсия стационарной случайной функции постоянна при всех значениях аргумента t и равна значению ее корреляционной функции в начале координат ($\tau = 0$), т. е.

$$D_x(t) = K_x(t, t) = k_x(t - t) = k_x(0).$$

Свойства корреляционной функции стационарной случайной функции:

1. $k_x(\tau) = k_x(-\tau)$.
2. $k_x(\tau)| \leq k_x(0)$.

Нормированной корреляционной функцией стационарной случайной функции называют неслучайную функцию аргумента τ:

$$\rho_x(\tau) = k_x(\tau) / k_x(0).$$

Абсолютная величина нормированной корреляционной функции стационарной случайной функции не превышает единицы: $|\rho_x(\tau)| \leq 1$.

Стационарно связанными называют две случайные функции X(t) и Y(t), если их взаимная корреляционная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$: $R_{xy}(t_1,t_2) = r_{xy}(\tau)$.

Взаимная корреляционная функция стационарно связанных случайных функций обладает следующим свойством:

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau).$$

Геометрически свойство можно истолковать так: график кривой $r_{yx}(-\tau)$ *с*имметричен графику кривой $r_{xy}(\tau)$ относительно оси ординат.

Заметим, что если каждая из двух случайных функций стационарна, то отсюда еще нельзя заключить, что их взаимная корреляционная функция зависит только от разности аргументов.

Пример 17.1.

Задана случайная функция X(t)=cos(t+φ), где φ – случайная величина, распределенная равномерно в интервале (0, 2π). Доказать, что X(t) – стационарная случайная функция.

Решение.

Найдем математическое ожидание:

$m_x(t)$ = M [cos(t + φ)] = M [cos t cos φ – sin t sin φ] = cos t M (cos φ) –
– sin t M (sin φ).

Тогда $M(\cos\varphi) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi = 0$ и M (sin φ) = 0. Следовательно, $m_x(t) = 0$.

Найдем корреляционную функцию, учитывая, что центрированная функция $\overset{\circ}{X}(t)$ = X(t) – $m_x(t)$ = X(t) = cos (t +φ).

$$K_x(t_1, t_2) = M\left\{\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot \overset{\circ}{X}(t_2)\right\} = M\left[\cos(t_1+\varphi)\cos(t_2+\varphi)\right] =$$

$$= M\left[\frac{\cos(t_2-t_1)+\cos(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right] = \frac{\cos(t_2-t_1)}{2},$$

где M [cos $(t_2+t_1+2\varphi)$] = 0.

Итак, математическое ожидание случайной функции X(t) постоянно при всех значениях аргумента и ее корреляционная функция зависит только от разности аргументов. Следовательно, X(t) – стационарная случайная функция.

Заметим, что, положив $t_1 = t_2 = t$ в корреляционной функции, найдем дисперсию $D_x(t) = K_x(t, t)$ = (cos (t – t))/2 =1/2. Таким образом, дисперсия сохраняет постоянное значение при всех значениях аргумента, как и должно быть для стационарной случайной функции.

Пример 17.2.

Заданы две стационарные случайные функции X(t) = cos (t + φ) и Y(t) = sin (t + φ), где φ – случайная величина, распределенная равномерно в интервале (0, 2π). Доказать, что заданные стационарные функции стационарно связаны.

Решение.

В примере 17.1. было найдено, что $m_x(t) = 0$; аналогично можно получить, что $m_y(t)=0$. Запишем центрированные функции:

$\overset{\circ}{X}(t)$ = X(t) – $m_x(t)$ = X(t) = cos (t + φ),

$\overset{\circ}{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = Y(t) = \sin(t + \varphi)$.

Найдем взаимную корреляционную функцию:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M\left\{\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)\right\} = M\left[\cos(t_1+\varphi)\sin(t_2+\varphi)\right] =$$

$$= M\left[\frac{\sin(t_2 - t_1) + \sin(t_2 + t_1 + 2\varphi)}{2}\right] = \frac{\sin(t_2 - t_1)}{2},$$

где $M[(\sin(t_1 + t_2 + 2\varphi))/2] = 0$. Итак, взаимная корреляционная функция заданных стационарных случайных функций зависит только от разности аргументов; следовательно, эти функции стационарно связаны.

Теорема 1. Корреляционная функция производной $X'(t) = \dot{x}$ дифференцируемой стационарной случайной функции X(t) равна второй производной от ее корреляционной функции, взятой со знаком минус:

$$k_{\dot{x}}(\tau) = -k''_x(\tau).$$

Теорема 2. Взаимная корреляционная функция дифференцируемой стационарной случайной функции X(t) и ее производной $X'(t) = \dot{x}$ равна первой производной от корреляционной функции $k_x(\tau)$, взятой со своим (противоположным) знаком, если индекс $\dot{x}$ стоит на втором (первом) по порядку месте: a) $r_{x\dot{x}}(\tau) = k'_x(\tau)$; b) $r_{\dot{x}x}(\tau) = -k'_x(\tau)$. Предполагается, что $\tau = t_2 - t_1$.

Теорема 3. Корреляционная функция интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$ от стационарной случайной функции равна

$$K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_2}(t_2 - \tau)k_x(\tau)d\tau - \int_0^{t_2 - t_1}(t_2 - t_1 - \tau)k_x(\tau)d\tau + \int_0^{t_1}(t_1 - \tau)k_x(\tau)d\tau.$$

Следствие. Дисперсия интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$ от стационарной случайной функции равна $D_y(t) = 2\int_0^t (t - \tau)k_x(\tau)d\tau$.

Эргодическое свойство стационарных случайных функций

Среди стационарных случайных функций можно выделить класс функций, оценка характеристик которых путем усреднения множества реализаций равносильна усреднению по времени только одной реализации достаточно большой длительности.

Стационарную случайную функцию X(t) называют **эргодической**, если ее характеристики, найденные усреднением множества реализаций, совпадают с соответствующими характеристиками, полученными усреднением по времени одной реализации x(t), которая наблюдалась на интервале (0,T) достаточно большой длительности.

Достаточное условие эргодичности стационарной случайной функции X(t) *относительно математического ожидания* состоит в том, что ее корреляционная функция $k_x(\tau)$ при $\tau\to\infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{\tau\to\infty} k_x(\tau) = 0.$$

Достаточное условие эргодичности стационарной случайной функции X(t) *относительно корреляционной функции* состоит в том, что корреляционная функция $k_y(\tau)$ при $\tau\to\infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{\tau\to\infty} k_y(\tau) = 0,$$

где $Y(t,\tau) = \overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t+\tau)$.

В качестве оценки математического ожидания эргодической стационарной случайной функции X(t) по наблюдавшейся на интервале (0, T) реализации x(t) принимают среднее по времени ее значение:

$$m_x^* = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt.$$

В качестве оценки корреляционной функции эргодической стационарной случайной функции X(t) принимают:

$$k_x^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)dt - \left[m_x^*\right]^2.$$

Спектральное разложение. Линейное преобразование стационарных случайных процессов

Если случайная функция X(t) может быть представлена в виде суммы гармоник различных частот со случайными амплитудами и случайными фазами, то X(t) – стационарная функция.

Спектральным разложением стационарной случайной функции называют представление этой функции в виде суммы гармонических колебаний различных частот со случайными амплитудами и случайными фазами:

$$X(t)=\sum_{i=1}^{n}X_i(t)=\sum_{i=1}^{n}\left[U_i\cos\omega_i t+V_i\sin\omega_i t\right]. \qquad (17.1)$$

Дискретным спектром стационарной случайной функции X(t) вида (17.1) называют совокупность дисперсий всех составляющих ее гармоник.

Графически спектр изображают так: на горизонтальной оси откладывают частоты ω_i, а в качестве соответствующих ординат (спектральные линии) строят дисперсии D_i. Этот спектр называют **линейчатым**.

Пусть X(t) – стационарный СП, непрерывный по времени t, с математическим ожиданием **a** и корреляционной функцией $k_x(\tau)$. **Спектральная плотность** $s_x(\omega)$ для X(t) определяется как предел отношения дисперсии, приходящейся на некоторый интервал частот, к длине этого интервала.

Корреляционная функция и спектральная плотность связаны взаимно обратными преобразованиями Фурье:

$$k_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}s_x(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega, \qquad s_x(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k_x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau,$$

являющимися следствием спектрального разложения X(t) (формулы Винера – Хинчина). В действительной форме они представляют собой взаимные обратные косинус-преобразования Фурье:

$$k_x(\tau)=2\int_{0}^{\infty}s_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega, \qquad s_x(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}k_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$$

При $\tau=0$ корреляционная функция дает элементарную дисперсию:

$$k_x(0)=D_x=\int_{-\infty}^{\infty}s_x(\omega)d\omega.$$

Элементарная дисперсия описывает плотность распределения дисперсий СП по непрерывно изменяющейся частоте.

Для СП с дискретным временем корреляционная функция и спектральная плотность равны:

$$k_x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_x(\omega)e^{i\omega n}d\omega, \qquad s_x(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_x(n)e^{-i\omega n}.$$

Рассмотрим задачу анализа на примере стационарной линейной динамической системы, функционирование которой описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$a_0y^{(n)}(t) + a_1y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_ny(t) = b_0x^{(m)}(t) + b_1x^{(m-1)}(t) + \ldots + b_mx(t), \tag{17.2}$$

где x(t) – входной СП (воздействие), y(t) – выходной СП (отклик, реакция).

Найдем математическое ожидание m_y, зная m_x, для чего приравняем математические ожидания левой и правой частей уравнения (17.2). Учитывая, что x(t) и y(t) – ССП, а значит, математические ожидания производных этих функций равны нулю, получим:

$$m_y = \frac{b_m}{a_n}\cdot m_x.$$

Введем оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$ и перепишем данное дифференциальное уравнение в виде:

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)y(t) = (b_0p^m + b_1p^{m-1} + \ldots + b_m)x(t).$$

Передаточная функция линейной динамической системы устанавливает связь между входом и выходом системы:

$$\Phi(p) = \frac{b_0p^m + \ldots + b_m}{a_0p^n + \ldots + a_n}.$$

Из этого следует, что выходная и входная функции связаны равенством: y(t) = Ф(p) x(t).

Частотной характеристикой линейной динамической системы называют функцию, которая получается заменой аргумента p в передаточной функции на аргумент iω (ω – действительное число):

$$\Phi(i\omega) = \frac{b_0(i\omega)^m + \ldots + b_m}{a_0(i\omega)^n + \ldots + a_n}.$$

Справедливо соотношение, позволяющее по спектральной плотности входного СП найти спектральную плотность выходного СП, а также другие характеристики y(t):

$$s_y(\omega) = s_x(\omega)\left|\Phi(i\omega)\right|^2.$$

Зная же спектральную плотность выходной функции, можно найти ее корреляционную функцию:

$$k_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega,$$

и, следовательно, дисперсию:

$$D_y = k_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_y(\omega) d\omega.$$

Пример 17.3.

На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой уравнением $3y'(t) + y(t) = 4x'(t) + x(t)$, подается стационарная случайная функция x(t) с корреляционной функцией $k_x(\tau) = 6e^{-2|\tau|}$. Найти дисперсию случайной функции y(t) на выходе системы в установившемся режиме.

Решение:

Найдем спектральную плотность входной функции:

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 6e^{-2|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} 6e^{2\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_{0}^{\infty} 6e^{-2\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} 6e^{(2-i\omega\tau)} d\tau + \int_{0}^{\infty} 6e^{-(2+i\omega\tau)} d\tau\right] =$$

$$= \frac{6}{2\pi}\left[\left.\frac{e^{(2-i\omega\tau)}}{2-i\omega}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-(2+i\omega\tau)}}{2+i\omega}\right|_{0}^{\infty}\right] = \frac{3}{\pi}\left[\frac{1}{2-i\omega} + \frac{1}{2+i\omega}\right] = \frac{3\cdot 4}{\pi(4+\omega^2)} = \frac{12}{\pi(4+\omega^2)}.$$

Найдем передаточную функцию, для чего запишем заданное уравнение в операторной форме: $(3p+1)Y(t) = (4p+1)X(t)$,

или $Y(t) = \frac{4p+1}{3p+1} X(t)$. Откуда $\Phi(p) = \frac{4p+1}{3p+1}$.

Найдем частотную характеристику, заменив аргумент p на iω:

$$\Phi(i\omega) = \frac{4i\omega+1}{3i\omega+1}.$$

Найдем спектральную плотность выходной функции:

$$s_y(\omega) = s_x(\omega)\left|\Phi(i\omega)\right|^2 = \frac{12}{\pi\left(4+\omega^2\right)} \cdot \frac{\left|4i\omega+1\right|^2}{\left|3i\omega+1\right|^2} = \frac{12}{\pi\left(4+\omega^2\right)} \cdot \frac{16\omega^2+1}{9\omega^2+1}.$$

Найдем дисперсию на выходе системы:

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} s_y(\omega)d\omega = \frac{24}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{16\omega^2+1}{(\omega^2+4)(9\omega^2+1)} d\omega =$$

$$\left[\begin{cases} 9A+B=16 \\ A+4B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=9/5 \\ B=-1/5 \end{cases}\right]$$

$$= \frac{24}{\pi}\left[\int_0^{\infty} \frac{9}{5(\omega^2+4)} d\omega - \int_0^{\infty} \frac{1}{5(9\omega^2+1)} d\omega\right] = \frac{24}{\pi}\left[\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\omega}{2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{9}\operatorname{arctg}3\omega\right]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{24}{\pi}\left[\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\right] = \frac{12}{5}\cdot\left[\frac{9}{2} - \frac{1}{3}\right] = 10.$$