11Интервальное оценивание.

Интервальной оценкой выборочного коэффициента корреляции с надежностью γ называется доверительный интервал:

$$r_{XY} - t \cdot \frac{1 - r_{XY}^2}{\sqrt{n}} \le r(X, Y) \le r_{XY} + t \cdot \frac{1 - r_{XY}^2}{\sqrt{n}}$$

где n – объем выборки, а t – коэффициент, находимый по таблице функции Лапласа (см. прил., табл. 3) из соотношения $2\Phi(t) = \gamma$. Формула используется при значительных объемах выборки.

Интервальной называется **оценка неизвестного параметра** теоретического распределения, определяемая двумя числами – концами интервала. Если Θ- параметр теоретического распределения, Θ^* – его точечная оценка, то точность интервальной оценки определяется из равенства:

$$\left|\Theta - \Theta^*\right| \le \delta,$$

где δ – малое положительное число.

Надежностью (доверительной вероятностью) γ называется вероятность, с которой осуществляется неравенство $\left|\Theta - \Theta^*\right| \le \delta$, то есть

$$P\left(\left|\Theta - \Theta^*\right| \le \delta\right) = \gamma.$$

Доверительным интервалом называется интервал $\left(\Theta^* - \delta, \Theta^* + \delta\right)$ покрывающий неизвестный параметр Θ с заданной надежностью γ.

Интервальные оценки математического ожидания нормального распределения

Интервальной оценкой математического ожидания m_x нормального распределения:

- при известном среднеквадратическом отклонении σ является доверительный интервал

$$\bar{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le a \le \bar{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}};$$

- при неизвестном среднеквадратическом отклонении σ является доверительный интервал

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} \le a \le \bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}},$$

с надежностью γ,

где $\bar{x}$ – выборочное среднее; s – исправленное среднеквадратическое отклонение; n – объем выборки; t – аргумент интегральной функции Лапласа, определяемого по таблице (см. приложение, табл. 3) из соотношения $\gamma = 2 \cdot \Phi(t)$; t_γ – величина, определяемая по таблице распределения Стьюдента (см. приложение 2, табл. 4) при заданных n и γ.

Интервальные оценки среднеквадратического отклонения нормального распределения

Интервальной оценкой среднеквадратического отклонения σ нормального распределения с надежностью γ по исправленному среднеквадратическому отклонению s называется доверительный интервал

$$s \cdot (1 - q) \le \sigma \le s \cdot (1 + q) \quad (\text{при } q < 1),$$

где $q = \delta / S$ и находится по таблице значений q при заданных n и γ (см. приложение 2, табл. 7).

Интервальная оценка неизвестной вероятности биномиального распределения

Интервальной оценкой неизвестной вероятности p биномиального распределения по относительной частоте w с надежностью γ называется доверительный интервал вида $p_1 \le p \le p_2$, где

$$p_1 = \frac{n}{t^2 + n}\left[w + \frac{t^2}{2n} - t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right],$$

$$p_2 = \frac{n}{t^2 + n}\left[w + \frac{t^2}{2n} + t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2}\right],$$

где n – объем выборки; t – значение аргумента функции Лапласа, причем $\gamma = 2 \cdot \Phi(t)$ (см. приложение 2, табл. 3).

При больших значениях n в качестве приближенных границ доверительного интервала принимаются:

$$p_1 = w - t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}, \quad p_2 = w + t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}.$$

12. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Статистической гипотезой называется любое предположение о генеральной совокупности, проверяемое по выборке.

Если предположение делается о значения параметров генеральной совокупности, то гипотеза называется **параметрической.**

Если предположение делается о виде закона распределения генеральной совокупности, то гипотеза называется **непараметрической.**

Основная гипотеза – это гипотеза об отсутствии различий. Она обозначается H_0 и имеет единственный вид: $H_0 : \theta = \theta_0$.

Альтернативная гипотеза – это гипотеза о существовании различий. Она обозначается H_1 и имеет три вида:

$H_1 : \theta > \theta_0$ – правосторонняя гипотеза;

$H_1 : \theta < \theta_0$ – левосторонняя гипотеза;

$H_1 : \theta \neq \theta_0$ – двусторонняя гипотеза.

Статистическим критерием называется функция от выборочных данных $K = K(x_1, x_2, ..., x_n)$, на основании значений которой делается вывод в пользу одной из гипотез. **Наблюдаемым значением критерия** $K_{НАБЛ}$ – называется значение функции $K(x_1, x_2, ..., x_n)$, найденной на конкретной выборке.

Областью допустимых значений критерия называется та часть области значений функции $K(x_1, x_2, ..., x_n)$, при попадании в которую $K_{НАБЛ}$ гипотеза H_0 – принимается.

Критической областью называется та часть области значений функции $K(x_1, x_2, ..., x_n)$, при попадании в которую $K_{НАБЛ}$ гипотеза H_0 – отвергается.

Границей между критической областью и областью допустимых значений критерия служат критические точки $K_{КР}$.

Критические области бывают трех видов. Это зависит от вида гипотезы H_1.

Если $H_1 : \theta > \theta_0$, то критическая область будет правосторонней и имеет вид, приведенный на рис. 14.1:

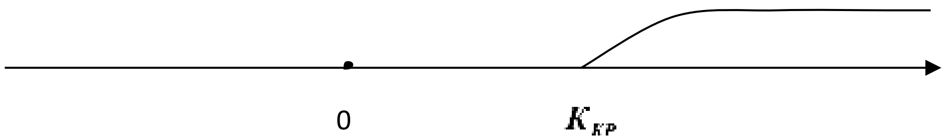

Рис. 14.1. Правосторонняя критическая область

Если $H_1 : \theta < \theta_0$, то критическая область будет правосторонней и имеет вид, приведенный на рис. 14.2:

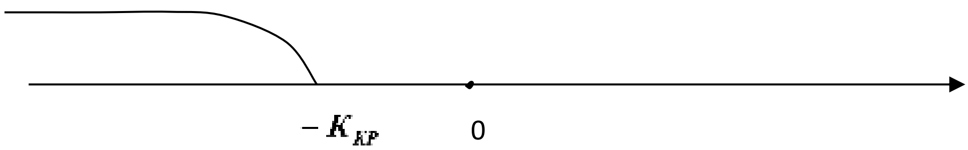

Рис. 14.2. Левосторонняя критическая область

Если $H_1 : \theta \neq \theta_0$, то критическая область будет правосторонней и имеет вид, приведенный на рис. 14.3:

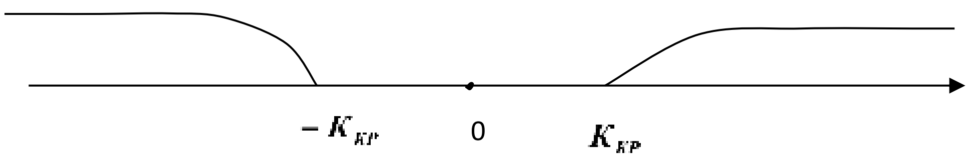

Рис. 14.3. Двусторонняя критическая область

При проверке статистических гипотез возникают ошибки I и II рода.

Ошибка первого рода заключается в том, что будет отвергнута правильная гипотеза H_0.

Ошибка второго рода заключается в том, что будет принята неправильная гипотеза H_0 (т. е. отвергнута правильная гипотеза H_1).

Вероятность ошибки I рода обозначается α и **называется уровнем значимости** критерия.

Вероятность ошибки II рода обозначается β. **Мощностью** критерия называется число $M = 1 - \beta$.

Критические точки определяются при заданном уровне значимости α следующими выражениями:

- для правосторонней критической области:

$$P(K > K_{кр}) = \alpha \qquad (K_{кр} > 0),$$

- для левосторонней критической области:

$$P(K < K_{кр}) = \alpha \qquad (K_{кр} < 0),$$

- для двухсторонней критической области:

$$P(K > K_{кр}) = \alpha/2 \quad \text{или} \quad P(K < -K_{кр}) = \alpha/2, \qquad K_{кр} > 0.$$

Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей (Критерий Фишера)

Исходные данные: Две независимые выборки, объемы которых n_1 и n_2, извлечены из нормальных генеральных совокупностей и найдены исправленные дисперсии S_x^2 и S_y^2.

Нулевая гипотеза H_0: D(X) = D(Y).

Конкурирующая гипотеза H_1: D(X)>D(Y).

Для проверки нулевой гипотезы вычисляется наблюдаемое значение критерия

$$F_{набл} = \frac{S_X^2}{S_Y^2},$$

если $S_X^2 > S_Y^2$. В противном случае $F_{набл} = \frac{S_Y^2}{S_X^2}$.

Нулевая гипотеза принимается, если $F_{набл} < F_{кр}$, где $F_{кр}$ – критическая точка, определяемая по таблице распределения Фишера-Снедекора при заданном уровне значимости α и числом степеней свободы $\nu_1 = n_1 - 1; \nu_2 = n_2 - 1$, где n_1 – объем выборки, имеющей большую исправленную дисперсию (иначе поменять X и Y местами).

Если $F_{набл} > F_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

При конкурирующей гипотезе H_1: $D(x) \neq D(y)$ $F_{кр} = F_{кр}(\alpha/2, \nu_1, \nu_2)$.

Сравнение двух средних генеральных совокупностей

Исходные данные: Две независимые выборки объема n_1 и n_2 больших объемов (n_1>30, n_2>30), по которым найдены выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Генеральные дисперсии D(X) и D(Y) – известны.

Нулевая гипотеза H_0: M(X) = M(Y).

Конкурирующая гипотеза H_1: $M(X) \neq M(Y)$.

Наблюдаемое значение критерия найдем по формуле:

$$Z_{набл} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{D(X)/n_1 + D(Y)/n_2}}.$$

Нулевая гипотеза принимается, если $|Z_{набл}| < Z_{кр}$, где критическая точка $Z_{кр}$ находится по таблице Лапласа из условия, что

$$\Phi(Z_{кр}) = {(1-\alpha)}/{2}.$$

Если $|Z_{набл}| > Z_{кр}$ – нулевая гипотеза отвергается.

При конкурирующей гипотезе $H_1{:}M(X) > M(Y)$ критическая точка находится из условия:

$$\Phi\left(Z_{кр}\right) = {\left(1-2\alpha\right)}/{2}.$$

Если $Z_{набл} > Z_{кр}$, то нулевая гипотеза отвергается.

Если генеральные дисперсии D(X) и D(Y) неизвестны и одинаковы, а n_1 и n_2 – объемы малых независимых выборок, то наблюдаемое значение критерия найдем по формуле:

$$T_{набл} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_1 - 1)S_X^2 + (n_2 - 1)S_Y^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Нулевая гипотеза принимается, если $|T_{набл}| < t_{кр}$, где критическая точка $t_{кр}$ находится по таблице распределения Стьюдента при заданном уровне значимости α и числу степеней свободы $\nu = n_1 + n_2 - 2$.

Нулевая гипотеза отвергается, если $|T_{набл}| > t_{кр}$.

В случае такого условия, если достоверно неизвестно, что дисперсии генеральных совокупностей одинаковы, приходится предварительно использовать критерий Фишера для проверки гипотезы о равенстве дисперсий нормальных генеральных совокупностей по найденным исправленным дисперсиям.

Сравнение наблюдаемой относительной частоты с гипотетической вероятностью появления события

Исходные данные: Большое число n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события постоянна, но неизвестна; найдена относительная частота $W = m/n$.

Нулевая гипотеза H_0: $p = p_0$

Конкурирующая гипотеза H_1: $p \neq p_0$.

Наблюдаемое значение критерия найдем по формуле:

$$U_{НАБЛ} = \frac{(W - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}, \quad \text{где } q_0 = 1 - p_0.$$

Нулевая гипотеза принимается, если $|U_{набл}| < U_{кр}$, где $U_{кр}$ находится по таблице Лапласа из условия, что

$$\Phi(U_{кр}) = {(1-\alpha)}/{2}.$$

Если конкурирующая гипотеза имеет вид H_1: $p > p_0$, то $U_{кр}$ находится по таблице Лапласа из условия, что

$$\Phi(U_{КР}) = {(1-2\alpha)}/{2}.$$

Если $U_{НАБЛ} > U_{КР}$, то нулевая гипотеза отвергается.

Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента корреляции

Исходные данные. Дана двумерная генеральная совокупность (X,Y), распределенная по нормальному закону. Извлечена выборка объема n и найден выборочный коэффициент корреляции.

Нулевая гипотеза H_0: $r(X, Y) = 0$.

Конкурирующая гипотеза H_1: $r(X, Y) \neq 0$.

Наблюдаемое значение критерия найдем по формуле:

$$T_{набл} = \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_{XY}^2}}.$$

Нулевая гипотеза принимается, если $|T_{набл}| < t_{кр}$, где $t_{кр}$ – находится по таблице распределения Стьюдента при заданном уровне значимости α и числу степеней свободы ν = n – 2.

Нулевая гипотеза отвергается, если $|T_{набл}| > t_{кр}$.

Проверка гипотезы о нормальности распределения генеральной совокупности по критерию Пирсона

Исходные данные. Дано статистическое распределение

$$\begin{array}{c} x_1, x_2, \ldots, x_N \\ n_1, n_2, \ldots, n_N \end{array}.$$

Нулевая гипотеза H_0: генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

Конкурирующая гипотеза H_1: генеральная совокупность не распределена по нормальному закону.

Наблюдаемое значение критерия Пирсона:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'},$$

где $n_i' = np_i$, n_i' – теоретические частоты, p_i – вероятности попадания X в интервалы $[a_i, a_{i+1})$; n - объем выборки; $p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$; $\Phi(z)$ – интегральная функция Лапласа; $z = \dfrac{a_i - \bar{x}}{\sigma}$.

Нулевая гипотеза принимается, если $\chi^2_{набл} < \chi_{кр}$, где $\chi^2_{кр}$ определяют по таблице распределения χ^2 – Пирсона (см. приложение 2, табл. 5) при заданном уровне значимости α и числу степеней свободы $\nu = n - m - 1$, где n – число групп выборки, а m – число неизвестных параметров распределения, найденных по выборке.

Нулевая гипотеза отвергается, если $\chi^2_{набл} > \chi_{кр}$.