## 7. Характеристические функции.

Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует единственное значение случайной величины Y, то Y называют функцией случайного аргумента X и записывают Y = f(X).

Если X – дискретная случайная величина и функция y = f(x) монотонна, то различным значениям случайной величины X соответствуют различные значения случайной величины Y. Тогда возможные значения Y находятся из равенства:

$$y_i = f(x_i).$$

Соответствующие им вероятности находятся из равенства:

$$p_i = P(Y = y_i) = P(X = x_i).$$

Если X – дискретная случайная величина и функция y = f(x) не монотонна, то различным значениям случайной величины X могут соответствовать одинаковые значения случайной величины Y. Тогда для нахождения вероятностей возможных значений Y надо сложить вероятности тех значений X, при которых Y принимает одинаковые значения.

Если X – непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $p(x)$, и если $y = f(x)$ – дифференцируемая строго возрастающая или строго убывающая функция, обратная к которой $x = f^{-1}(y)$, то плотность распределения случайной величины Y = f(X) находят из выражения:

$$g(y) = p\left(f^{-1}(y)\right) \cdot \left|\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right|.$$

**Пример 8.1.** Пусть случайная величина X задана таблицей

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | | |
| | ,2 | ,3 | ,5 |

Найти распределение случайной величины $Y = X^2 + 2$.

*Решение*.

Найти закон распределения дискретной случайной величины, значит перечислить все ее возможные значения и рассчитать вероятности, с которыми она эти значения принимает. Возможные значения Y найдем, подставив в формулу $y = f(x) = x^2 + 2$

различные значения X. При X = -1, Y = 3; при X = 0, Y = 2; при X = 1, Y = 3. Тогда

$$P\left(Y=3\right)=P\left(\left(X=-1\right)+\left(X=1\right)\right)=0{,}2+0{,}5=0{,}7\,;$$

$$P\left(Y=2\right)=P\left(X=0\right)=0{,}3.$$

Таким образом, таблица распределения величины Y примет вид:

| | | |
|---|---|---|
| | ,3 | ,7 |

**Пример 8.2.** Пусть случайная величина X = N(0, 1). И пусть случайная функция Y = 2X+3. Найти плотность распределения Y.

*Решение*.

Плотность распределения X, данной нормальной случайной величины, имеет вид:

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Зависимость между величинами X и Y выражается линейной функцией:

$$y=f(x)=2x+3.$$

Так как f(x) строго возрастает, у нее есть обратная функция:

$$x=f^{-1}(y)=\frac{y-3}{2}.$$

Найдем ее производную:

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{2}\cdot\left(y-3\right)'_y=\frac{1}{2}.$$

Воспользуемся формулой:

$$g(y)=p\left(f^{-1}(y)\right)\cdot\left|\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right|=p\left(\frac{y-3}{2}\right)\cdot\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\cdot p\left(\frac{y-3}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-3)^2}{2\cdot 2^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-3)^2}{8}}.$$

Очевидно, что Y так же является нормальной случайной величиной N(3, 2).

## Функция двух случайных аргументов

Если каждой паре возможных значений случайных величин X и Y соответствует единственное значение случайной величины Z, то Z называют функцией двух случайных аргументов X и Y и записывают

$$Z = f(X, Y).$$

Если X и Y – дискретные независимые случайные величины, то для того, чтобы найти все возможные значения случайной величины Z, достаточно подставить в формулу z = f(x, y) поочередно все пары значений $(x_i, y_j)$, получить значения $z_{ij}$, после чего найти соответствующие им вероятности по формуле:

$$P(Z = z_{ij}) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_i).$$

Если X и Y – непрерывные независимые случайные величины, с плотностями распределения $p_1(x)$ и $p_2(y)$, то для того, чтобы найти плотность распределения случайной величины Z = X + Y, можно воспользоваться формулой:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(x) \cdot p_2(z - x)dx.$$

Или формулой:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_1(z - y) \cdot p_2(y)dy,$$

при условии, что хотя бы одна из функций $p_1(x)$ и $p_2(y)$ задана в интервале $(-\infty, +\infty)$ одним выражением.

**Пример 8.3.** Дискретные случайные величины X и Y независимы и заданы распределениями:

| | | |
|---|---|---|
| | ,4 | ,6 |

| | | |
|---|---|---|
| | ,2 | ,8 |

Найти распределение случайной величины Z = X + Y.

*Решение*.

Найти закон распределения дискретной случайной величины, значит перечислить все ее возможные значения и рассчитать вероятности, с которыми она эти значения принимает. Значения случайной величины Z получаются путем сложения всех возможных попарных комбинаций значений случайных величин X и Y.

0 + 1 = 1   0 + 2 = 2   1 + 1 = 2   1 + 2 = 3.

Таким образом, Z принимает три возможных значения: 1, 2 и 3. Найдем вероятности принятия величиной Z этих значений.

Так как Z принимает свое значение 1, тогда и только тогда, когда X принимает значение 0, а Y – значение 1, то случайное событие «Z = 1» является произведением независимых (из-за независимости X и Y по условию) случайных событий «X = 0» и «Y = 1». Используя теорему умножения вероятностей независимых событий имеем:

$$P(Z=1)=P\{(X=0)(Y=1)\}=P(X=0)P(Y=1)=0{,}4\cdot 0{,}2=0{,}08=p_1.$$

Так как Z принимает свое значение 2 либо когда X=0, а Y=2, либо когда X=1, а Y=1, причем одновременно это происходить не может, то событие «Z=2» – является суммой несовместных событий (X=0)(Y=2) и (X=1)(Y=1), и его вероятность можно найти с помощью теоремы сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(Z=2)=P\{(X=0)(Y=2)+(X=1)(Y=1)\}=P\{(X=0)(Y=2)\}+P\{(X=1)(Y=1)\}=$$

$$=P(X=0)P(Y=2)+P(X=1)P(Y=1)=0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}6\cdot 0{,}2=0{,}32+0{,}12=0{,}44=p_2\ .$$

Рассуждая аналогично, найдем:

$$P(Z=3)=P\{(X=1)(Y=2)\}=P(X=1)P(Y=2)=0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}48=p_3\,.$$

Проверим выполнение условия нормировки: $\sum_{i=1}^{n} p_i$ =0,08+0,44+0,48=1.

Таким образом, искомый ряд распределения имеет вид:

| Z | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| p | 0,08 | 0,44 | 0,48 |

## 8 Законы больших чисел. Центральная предельная теорема.

Под законом больших чисел в теории вероятностей понимается ряд математических теорем, в каждой из которых для тех или иных условий устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа опытов к некоторым определенным постоянным.

### Неравенство Маркова

Пусть $P(X>0)=1$. Тогда для любого $\delta>0$ имеет место неравенство:

$$P\left(X>\delta\right)\le\frac{M(X)}{\delta} \qquad \text{или} \qquad P\left(X\le\delta\right)\ge1-\frac{M(X)}{\delta}.$$

## Неравенство Чебышева

Для любой случайной величины:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|>\varepsilon\right)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

или

$$P\left(\left|X-M(X)\right|\le\varepsilon\right)\ge1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

## Теорема Чебышева

Теорема Чебышева является одной из важнейших форм закона больших чисел. Пусть $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$ – последовательность попарно независимых случайных величин, для которых $D\left(X_i\right)<c,\ c=\text{const}$, i = 1,2,... . Тогда для любого $\delta>0$:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left(X_i\right)\right|\le\delta\right)=1.$$

При конечном n:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left(X_i\right)\right|\le\delta\right)\ge1-\varepsilon, \qquad \text{где } \varepsilon=\frac{c}{n\cdot\delta^2}.$$

## Теорема Бернулли

Теорема Бернулли является также одной из форм закона больших чисел. Если вероятность p наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и число испытаний достаточно велико, то

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\delta\right)=1.$$

При конечном значении n:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\delta\right)\ge 1-\varepsilon,\qquad \text{где } \varepsilon=\frac{p\cdot q}{n\cdot\delta^2}.$$

**Пример 9.1.** Вероятность наступления события в каждом из 1000 независимых испытаний постоянна и равна 0,3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что отклонение числа наступлений события от математического ожидания будет не менее 30.

*Решение*. Неравенство Чебышева имеет вид:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|>\varepsilon\right)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Для применения неравенства Чебышева найдем математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$ случайной величины X – числа наступления события в 1000 независимых испытаниях:

$$M(X)=np=1000\cdot 0{,}3=300,$$
$$D(X)=npq=1000\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7=210,$$

где $q=1-p$.

Отсюда, искомая вероятность $P\left(\left|X-300\right|>30\right)\le\dfrac{210}{900}\approx 0{,}233$.

**Пример 9.2.** Вероятность наступления события A в каждом из 1000 независимых испытаний постоянна и равна 0,3. Почему нельзя с помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что число появления события A будет заключено в границах от 160 до 460? Решить задачу при соответствующем изменении левой границы.

Решение. Неравенство Чебышева имеет вид:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|\le\varepsilon\right)\le 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

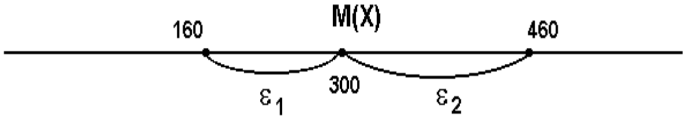
Но это означает, что оценивается вероятность события: «случайная величина X примет значение в интервале от $M(X)-\varepsilon$ до $M(X)+\varepsilon$». То есть интервал должен быть симметричен относительно математического ожидания, иначе этим неравенством воспользоваться нельзя. В нашем случае имеем биномиальную дискретную случайную величину X, где

n = 1000 – число независимых испытаний;

p = 0,3 – вероятность успеха в каждом испытании.

Тогда M(X) = np = 1000 · 0,3 = 300. Отсюда следует, что $M(X)-\varepsilon=160$ и $M(X)+\varepsilon=460$.

Нельзя найти такого $\varepsilon$, чтобы оно одновременно удовлетворяло обоим равенствам ($\varepsilon_1 = 300 - 160 = 140$; $\varepsilon_2 = 460 - 300 = 160$).




Изменим левую границу на 140. Тогда:

$P(140 < X < 460) = P\left(\left|X - M(X)\right| < 160\right)$.

Дисперсия $D(X) = npq = 1000 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 300 \cdot 0{,}7 = 210$.

$P\left(\left|X - M(X)\right| < 160\right) \geq 1 - \dfrac{210}{160^2} = 1 - \dfrac{210}{25600} \approx 1 - 0{,}0082 = 0{,}992$.