5. Случайные величины. Случайные векторы.

Случайной величиной называется функция, которая каждому элементарному исходу эксперимента ставит в соответствие некоторое число. Случайная величина обозначается $X(\omega) = X$.

Если **множество значений** случайной величины **дискретно**, т. е. значения случайной величины отстоят друг от друга на числовой оси, то **случайная величина** называется **дискретной.**

Законом распределения случайной величины называется соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Если **множество значений** случайной величины **континуально,** т.е. значения случайной величины полностью занимают некоторый промежуток числовой оси, то **случайная величина** называется **непрерывной.**

Закон распределения случайной величины – это **соответствие между ее значениями и вероятностями**, с которыми она принимает эти значения. Закон распределения дискретной случайной величины представляется таблицей:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Здесь x_i – значения случайной величины X; $p_i = P(X = x_i)$.

Графическое представление закона распределения – **многоугольник распределения**. Это ломаная линия с узлами в точках (x_i, p_i).

Функция распределения случайной величины **X** находится по формуле:

$$F(x) = P(X < x).$$

Основные свойства функции распределения:

1. $x \in R, \quad 0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ – неубывающая функция.
3. $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.
4. При $x \to -\infty$, $F(x) \to 0$;
   При $x \to +\infty$, $F(x) \to 1$.

Примерный вид графика функции распределения непрерывной случайной величины приведен на рисунке 6.1.

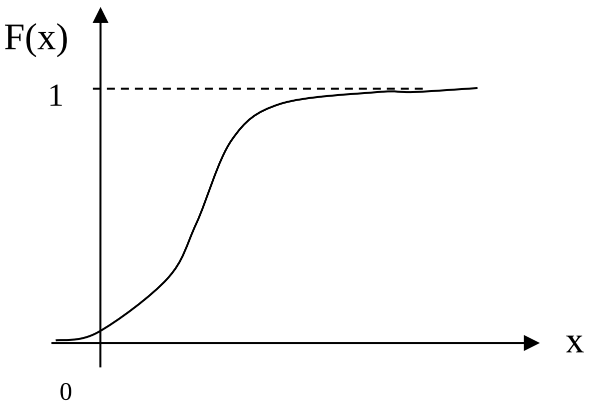

Рис.6.1. График функции распределения

Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины **X** находится по формуле:

$$p(x) = F'(x).$$

Поэтому плотность распределения называется дифференциальным законом распределения.

Основные свойства плотности распределения:

1. $p(x) \geq 0$ – условие неотрицательности.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$ – условие нормировки, то есть площадь под кривой S=1.

3. $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt$, поэтому функцию распределения называют интегральным законом распределения.

4. $P(\alpha \leq X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} p(x)dx$

5. При $x \to \pm\infty$, $p(x) \to 0$;

Примерный вид графика плотности распределения непрерывной случайной величины приведен на рисунке.

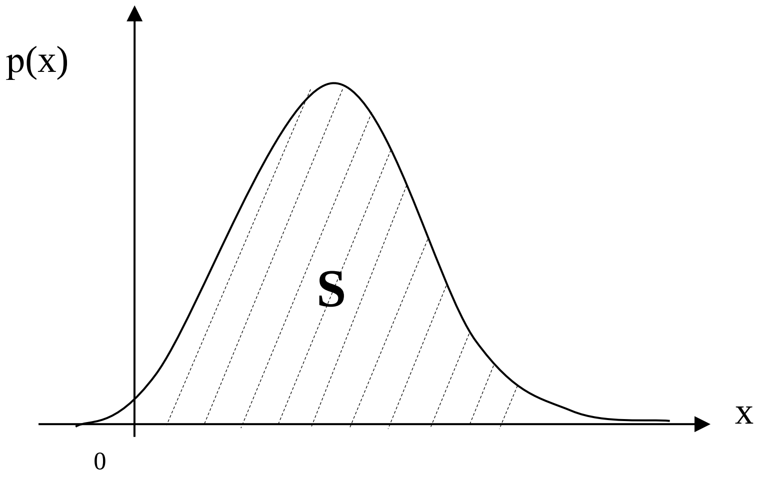

Рис.6.2. График плотности распределения

Математическое ожидание случайной величины X – это ее среднеожидаемое значение. Математическое ожидание M(X) можно назвать также **серединой облака рассеивания** значений случайной величины X.

Для дискретной случайной величины:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i ,$$

где x_i – значение дискретной случайной величины; p_i – вероятности принятия случайной величиной X значений x_i.

Для непрерывной случайной величины:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx ,$$

где p(x) – плотность распределения.

Дисперсия случайной величины X – это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right)$.

Дисперсия характеризует **ширину разброса** значений случайной величины вокруг ее математического ожидания.

Для дискретной случайной величины:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i$$

или

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - M^2(X) .$$

Для непрерывной случайной величины:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2\,p(x)\,dx$$

или

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\,p(x)\,dx-M^2(X)$$

Среднеквадратическое отклонение дискретной случайной величины:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,.$$

Свойства математического ожидания:

1. M(C) = C, где C – постоянная величина.
2. M(X+Y) = M(X) + M(Y).
3. M(XY) = M(X) · M(Y), где X, Y – независимые случайные величины.
4. M(X+C) = M(X) + C, где C – постоянное слагаемое.
5. M(CX) = CM(X) , где C – постоянный множитель.

Свойства дисперсии:

1. D(C) = 0, где C – постоянная величина.
2. $D(CX)=C^2D(X)$, где C – постоянный множитель.
3. D(X+Y) = D(X) + D(Y), где X, Y – независимые случайные величины.
4. D(C+X) = D(X), где C – постоянная величина.
5. $D(X)=M(X^2)-M^2(X)$.

Начальным моментом k-ого порядка случайной величины X называется число, находимое по формуле:

$$\nu_k(x)=M(X^k)$$

Начальный момент k-ого порядка находится по формулам:

$$\nu_k(X)=\sum x_i{}^k p_i$$

для дискретной случайной величины X и

$$\nu_k(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k\,p(x)\,dx\,.$$

Центральным моментом k-ого порядка случайной величины X называется число, находимое по формуле:

$$\mu_k(x)=M\left((X-M(X))^k\right).$$

Формулы центральных моментов для дискретной и непрерывной случайных величин имеют вид:

$$\mu_k(X)=\sum(x_i-M(X))^k p_i \quad \text{и} \quad \mu_k(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^k\, p(x)\,dx\,.$$

Нетрудно заметить, что

$$\nu_1(x)=M(X);$$
$$\mu_0(x)=0;$$
$$\mu_2(x)=D(X)\,.$$

Характеристиками формы кривой распределения (многоугольника распределения или графика плотности распределения) являются **коэффициенты асимметрии и эксцесса.**

Асимметрия имеет вид:

$$as(X)=\frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)}$$

и отвечает за скошенность кривой распределения влево либо вправо относительно математического ожидания. Так если $as(X)>0$, то асимметрия будет правосторонней, что означает, что правая часть кривой распределения более длинная и пологая, чем левая (см. рис. 6.3).

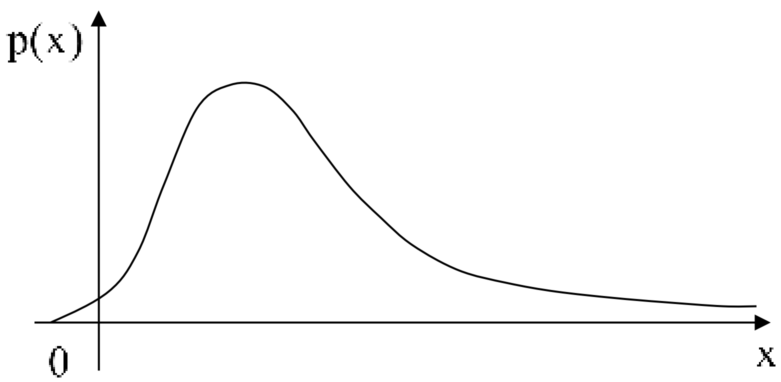

Рисунок 6.3. График плотности распределения при правосторонней асимметрии

Эксцесс имеет вид:

$$ex(X)=\frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)}-3$$

и отвечает за островершинность (плосковершинность) кривой распределения по сравнению с графиком плотности распределения нормальной случайной величины, имеющей то же математическое ожидание и дисперсию, что и данная случайная величина. Так если $ex(X)>0$, то кривая распределения более островершинная, чем график плотности $N(a,\sigma)=N(M(X),\sigma(X))$ (см. рис. 6.4).

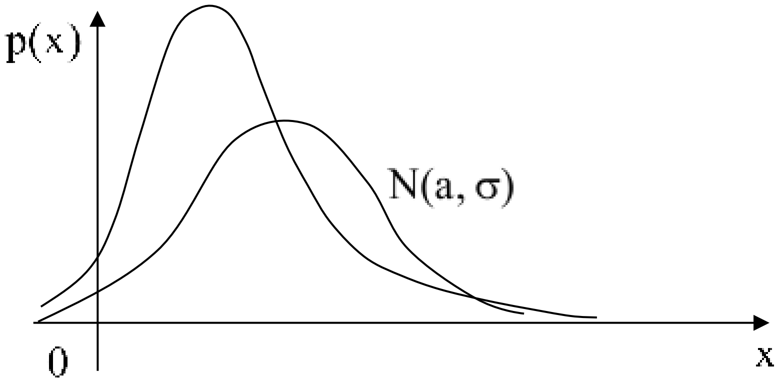

Рисунок 6.4. График плотности распределения при положительном эксцессе по сравнению с соответствующей нормальной кривой

Такая нормальная случайная величина называется соответствующей данной случайной величине X.

Пример 6.1. В партии 10% нестандартных деталей. Наудачу отобраны 2 детали. Написать закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди двух отобранных.

Решение. Дискретная случайная величина X – число нестандартных деталей среди двух отобранных принимает следующие значения:

$x_1 = 0$ – все детали стандартны из двух отобранных;

$x_2 = 1$ – одна из двух отобранных деталей не стандартна;

$x_3 = 2$ – обе отобранные детали нестандартны.

Так как вероятность отбора нестандартной детали $p = 0,1$ постоянная, то для определения вероятностей воспользуемся формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где $q = 1 - p = 0,9$.

$$P(X=0) = P_2(0) = C_2^0 \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^2 = 0,81,$$

$$P(X=1) = P_2(1) = C_2^1 \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^1 = 0,18,$$

$$P(X=2) = P_2(2) = C_2^2 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^0 = 0,01.$$

Проверяем условие нормировки $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Имеем, что $0,81 + 0,18 + 0,01 = 1$.

Искомый закон распределения дискретной случайной величины X имеет вид:

x	0	1	2

p	0,81	0,18	0,01

Математическое ожидание найдем по формуле:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i p_i = 0\cdot 0{,}81+1\cdot 0{,}18+2\cdot 0{,}01=0{,}18+0{,}02=0{,}2.$$

Дисперсию найдем по формуле:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i\ p_i - M^2(X)=0^2\cdot 0{,}81+1^2\cdot 0{,}18+2^2\cdot 0{,}01-(0{,}2)^2=$$

$$=0{,}18+0{,}04-0{,}04=0{,}18.$$

Пример 6.2. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 2,\\ Ax, & \text{при } 2<x\le 4,\\ 0, & \text{при } x>4.\end{cases}$$

Найти:

1. Коэффициент A, при котором f(x) будет плотностью распределения.
2. Функцию распределения F(x).
3. Вероятность того, что в результате испытания X примет значение а) меньше 0,2; б) меньше 3.
4. Математическое ожидание.
5. Дисперсию.

Решение:

1. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 2,\\ Ax, & \text{при } 2<x\le 4,\\ 0, & \text{при } x>4.\end{cases}$

Так как по условию нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$, вычислим A из этого соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{2}0\cdot dx+\int_{2}^{4}Ax\,dx+\int_{4}^{\infty}0\cdot dx=A\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_2^4=A\left(\frac{4^2}{2}-\frac{2^2}{2}\right)=$$

$$=A\left(\frac{16}{2}-\frac{4}{2}\right)=A\cdot 6=1.$$

Откуда $A = \frac{1}{6}$.

2. Функция распределения непрерывной случайной величины X при известной плотности распределения f(x) определяется из формулы:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Данная подынтегральная функция принимает три различных вида на промежутке от - ∞ до ∞.

Рассмотрим отдельно каждую ситуацию:

а) при $x \le 2$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt = 0;$$

б) при $2 < x \le 4$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{2} 0 \cdot dt + \int_{2}^{x} \frac{t}{6}\,dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^2}{2}\Bigg|_2^x = \frac{1}{12}\left(x^2 - 2^2\right) = \frac{x^2 - 4}{12};$$

в) при $x > 4$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{2} 0 \cdot dt + \int_{2}^{4} \frac{t}{6}\,dt + \int_{4}^{x} 0 \cdot dt = \frac{1}{6}\int_{2}^{4} t \cdot dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^2}{2}\Bigg|_2^4 =$$

$$= \frac{1}{12}\left(4^2 - 2^2\right) = \frac{1}{12}(16 - 4) = \frac{12}{12} = 1.$$

Таким образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 2, \\ \dfrac{x^2 - 4}{12}, & \text{при } 2 < x \le 4, \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

3. По определению $F(x) = P(X < x)$, тогда

$P(X < 0{,}2) = F(0{,}2) = 0$.

$$P(X < 3) = F(3) = \frac{3^2 - 4}{12} = \frac{9 - 4}{12} = \frac{5}{12}.$$

4. Математическое ожидание непрерывной случайной величины X ищем по формуле:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\int_{-\infty}^{2} 0\cdot dx+\int_{2}^{4} x\,\frac{x}{6}\,dx+\int_{4}^{\infty} 0\cdot dx=\frac{1}{6}\int_{2}^{4} x^2\,dx=\frac{1}{6}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_2^4=$$

$$=\frac{1}{18}\left(4^3-2^3\right)=\frac{1}{18}(64-8)=\frac{56}{18}=\frac{28}{9}\approx 3{,}1(1).$$

5. Дисперсию непрерывной случайной величины X ищем по формуле:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,f(x)\,dx-M^2(X)=\int_{2}^{4} x^2\cdot\frac{x}{6}\,dx-\left(\frac{28}{9}\right)^2=\frac{1}{6}\int_{2}^{4} x^3\,dx-\frac{784}{81}\approx$$

$$\approx\frac{1}{6}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_2^4-9{,}679=\frac{1}{24}\left(4^4-2^4\right)-9{,}679=\frac{256-16}{24}-9{,}679=10-9{,}679=0{,}321$$

.

Биномиальный закон распределения

Биномиально распределенной с параметрами **n** и **p** дискретной случайной величиной X называется величина, характеризующая число появлений события A в n независимых испытаниях Бернулли, в каждом из которых вероятность появления события P(A) = p. Вероятность того, что X примет свое значение x_i задается формулой Бернулли, т. е.

$$P(X=x_i)=P_n(x_i)=C_n^{x_i}\cdot p^{x_i}\cdot q^{n-x_i},$$

где $q = 1 - p$; $x_i = 0, 1, ..., n$.

Для биномиальной случайной величины $M(X)=np$, $D(X)=npq$.

Закон распределения Пуассона

Распределенной по закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$ дискретной случайной величиной X называется случайная величина, значения которой – целые неотрицательные числа. Вероятность того, что X примет свое значение x_i задается формулой Пуассона, т. е.

$$P(X = x_i) = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda},$$

где λ – параметр распределения; $x_i = 0, 1, \ldots$.

Для пуассоновской случайной величины $M(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$.

Равномерный закон распределения

Непрерывная, равномерно распределенная на отрезке [a, b], случайная величина задается плотностью распределения вида:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}.$$

Ее функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x > b \end{cases}.$$

Для равномерной случайной величины $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$, $D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Показательный закон распределения

Непрерывная, показательно распределенная с параметром $\alpha > 0$, случайная величина задается плотностью распределения вида:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x}, & x \ge 0 \end{cases}.$$

Ее функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-\alpha x}, & x\ge 0\end{cases}.$$

Для показательной случайной величины $M(X)=\dfrac{1}{\alpha}$, $D(X)=\dfrac{1}{\alpha^2}$.

Нормальный закон распределения

Непрерывная, нормально распределенная с параметрами a и σ, случайная величина задается плотностью распределения вида:

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Обозначение такой случайной величины $N(a,\sigma)$.

Для $N(a,\sigma)$ справедлива формула:

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Из этой формулы вытекает **правило трех сигм**:

$$P(a-3\sigma\le X\le a+3\sigma)=2\Phi(3)=0,9973.$$

Для нормальной случайной величины $M(X)=a$, $D(X)=\sigma^2$.

6. Числовые характеристики случайных величин. Система двух случайных величин

Системой двух случайных величин (X,Y) называется случайная величина, возможные значения которой определяются двумя числами. Иначе пара (X,Y) называется случайным вектором.

Законом распределения системы двух случайных величин называется соотношение, устанавливающее связь между областями возможных значений системы двух случайных величин и вероятностями появления системы в этих областях.

Таблицей распределения системы двух дискретных случайных величин (X,Y) называется перечень ее возможных значений, то есть пар чисел (x_i,y_i) и вероятностей появления этих пар:

$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}$, где $i=\overline{1,n}; j=\overline{1,m}$. В общем виде таблица распределения приведена в табл. 7.1.

Таблица 7.1.

Таблица распределения двумерной дискретной случайной величины

X \ Y	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…	p_{2m}
…	…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…	p_{im}
…	…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nj}	…	p_{nm}

Функцией распределения двух случайных величин (X,Y) называется функция двух аргументов F(x,y) равная вероятности совместного выполнения двух неравенств $X < x$, $Y < y$, то есть

$$F(x,y) = P\{X<x,\ Y<y\}.$$

Свойства функции распределения:

1. Функция распределения F(x,y) есть неубывающая функция по каждому ее аргументу, то есть:

$$F(x_2, y) \ge F(x_1, y) \text{ , если } x_2 > x_1,$$

$$F(x, y_2) \ge F(x, y_1) \text{ , если } y_2 > y_1.$$

2. $\lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y) = F_1(x) = P\{X < x\}$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y) = F_2(x) = P\{Y < y\}$.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x,y) = 1$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y) = \lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0$.

5. Вероятность попадания системы двух случайных величин (X,Y) в произвольный прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, находится по формуле:

$$P\{a \le x < b, c \le y < d\} = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c).$$

Составляющие X и Y системы двух случайных величин (X,Y) называются **независимыми**, если их совместная функция распределения представляется произведением функций распределения составляющих:

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$$

Плотность распределения f(x,y) системы двух непрерывных случайных величин (X,Y) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения F(x,y), т. е.

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \, \partial y}.$$

Отсюда

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(z,t)\, dz\, dt.$$

Свойства плотности распределения:

1. $f(x,y) \geq 0$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1$.

3. Вероятность попадания системы двух непрерывных случайных величин (X,Y) в произвольный прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, находится по формуле:

$$P\{a \leq x < b, c \leq y < d\} = \int_{a}^{b} \int_{c}^{d} f(x,y)\, dx\, dy.$$

Из совместной плотности распределения f(x,y) можно найти **плотности распределения составляющих:**

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy, \quad f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx.$$

Математические ожидания составляющих m_X, m_Y для системы двух непрерывных случайных величин

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x)\, dx, \quad m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y)\, dy$$

Дисперсии составляющих D_X, D_Y системы двух непрерывных случайных величин

$$D_X = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 \cdot f_1(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_1(x)\, dx - m_X^2,$$

$$D_Y = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_Y)^2 \cdot f_2(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f_2(y)dy - m_Y^2 .$$

Математические ожидания составляющих m_X, m_Y для системы двух дискретных случайных величин (X,Y):

$$m_X = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i , \quad m_Y = \sum_{j=1}^{m} y_j p_j ,$$

где $p_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$; $p_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$.

Дисперсии составляющих D_X, D_Y системы двух дискретных случайных величин

$$D_X = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_X)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_X^2$$

$$D_Y = \sum_{j=1}^{m} (y_j - m_Y)^2 p_j = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 p_j - m_Y^2$$

Среднеквадратические отклонения составляющих находятся по формулам:

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} ; \quad \sigma_Y = \sqrt{D_Y}$$

Корреляционным моментом K_{XY} системы двух случайных величин (X,Y) называется математическое ожидание произведения центрированных случайных величин X и Y, т. е.

$$K_{XY} = M\big((X - m_X)(Y - m_Y)\big).$$

Для системы двух **дискретных случайных величин** (X,Y)

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i - m_X)(y_j - m_Y)p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - m_X m_Y ,$$

а для системы двух **непрерывных случайных величин** (X,Y)

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)(y - m_Y) f(x,y)\, dx\, dy =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x,y)\, dx\, dy - m_X m_Y .$$

Коэффициентом корреляции r_{XY} системы двух случайных величин (X,Y) называется отношение корреляционного момента K_{XY} к произведению среднеквадратических отклонений составляющих σ_X и σ_Y, т. е.

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Свойства K_{XY} и r_{XY}:

1. Для системы двух независимых случайных величин (X,Y)

$$K_{XY} = r_{XY} = 0.$$

2. Абсолютная величина K_{XY} не превышает среднего геометрического их дисперсий, то есть $|K_{XY}| \le \sqrt{D_X D_Y}$.

3. Абсолютная величина коэффициента корреляции r_{XY} не превышает единицы, то есть $|r_{XY}| \le 1$.

Пример 7.1. Задана плотность вероятности совместного распределения системы двух случайных величин:

$$f(x,y) = \begin{cases} a \cdot 3^{-x-y}, & x \ge 0 \quad \text{и} \quad y \ge 0 \\ 0, & x < 0 \ \text{или} \ y < 0 \end{cases}$$

Найти:

1) коэффициент a; 2) F(x,y); 3) m_X, m_Y, D_X, D_Y; 4) K_{XY}, r_{XY}.

Решение.

1. Согласно условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = 1.$$

Так как f(x,y) не равно нулю лишь в первом квадранте координатной плоскости, то пределы интегрирования сужаются, и условие нормировки приобретает вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} a \cdot 3^{-x-y} dx\, dy = a \cdot \int_{0}^{\infty} 3^{-x} dx \cdot \int_{0}^{\infty} 3^{-y} dy = 1.$$

Учитывая, что $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, рассчитаем отдельно каждый интеграл, входящий в указанное произведение.

$$\int_{0}^{\infty} 3^{-x} dx = -\int_{0}^{\infty} 3^{-x} d(-x) = -\left.\frac{3^{-x}}{\ln 3}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{\ln 3}.$$

Аналогично

$$\int_0^{\infty} 3^{-y}dx = -\int_0^{\infty} 3^{-y}d(-y) = -\left.\frac{3^{-y}}{\ln 3}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{\ln 3}.$$

Откуда $\quad a\cdot\frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{\ln 3} = 1 \quad$ и $\quad a = \ln^2 3$.

2. Согласно формуле $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(z,t)dzdt$.

Рассмотрим поведение F(x,y) в каждом квадранте плоскости. Так как подынтегральная функция f(x,y) не равна нулю лишь при $x \ge 0$ и $y \ge 0$, то F(x,y) тоже не равна нулю только при этих условиях.

При $x \ge 0$ и $y \ge 0$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(z,t)dzdt = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dzdt + \int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{y} 0\cdot dzdt + \int_{0}^{x}\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dzdt +$$

$$+\int_0^x\int_0^y \ln^2 3\cdot 3^{-z-t}dzdt = \ln^2 3\cdot\int_0^x\int_0^y 3^{-z-t}dzdt = \ln^2 3\cdot\int_0^x 3^{-z}dz\cdot\int_0^y 3^{-t}dt =$$

$$= \ln^2 3\cdot\left.\frac{3^{-z}}{\ln 3}\right|_0^x\cdot\left.\frac{3^{-t}}{\ln 3}\right|_0^y = \ln^2 3\cdot\left(\frac{1}{\ln 3}\left(3^{-x}-1\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{\ln 3}\left(3^{-y}-1\right)\right) =$$

$$= 3^{-x-y} - 3^{-x} - 3^{-y} + 1.$$

3. Для нахождения m_X и m_Y необходимо знать плотности распределения составляющих.

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^{\infty}\ln^2 3\cdot 3^{-x-y}dy = \ln^2 3\cdot 3^{-x}\cdot\int_0^{\infty}3^{-y}dy =$$

$$= \ln^2 3\cdot 3^{-x}\cdot\frac{1}{\ln 3} = \ln 3\cdot 3^{-x}$$

Аналогично находится $f_2(y) = \ln 3\cdot 3^{-y}$.

Тогда m_X найдется по формуле:

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_1(x)dx = \int_0^{\infty} x\cdot\ln 3\cdot 3^{-x}dx = \ln 3\cdot\int_0^{\infty}x\cdot 3^{-x}dx.$$

Получившийся интеграл легко решается по частям:

$$\int_0^{\infty} x\cdot 3^{-x}dx = -\int_0^{\infty} x\cdot d\left(\frac{3^{-x}}{\ln 3}\right) = -\left(\left. x\cdot\frac{3^{-x}}{\ln 3}\right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\frac{3^{-x}}{\ln 3}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \cdot \int_0^{\infty} 3^{-x} dx = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{\ln^2 3}.$$

Тогда $m_X = \frac{1}{\ln 3}$. Аналогично находится $m_Y = \frac{1}{\ln 3}$.

Найдем дисперсию D_X, используя формулу:

$$D_X = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_1(x) dx - m_X^2 =$$

$$= \int_0^{\infty} x^2 \cdot \ln 3 \cdot 3^{-x} dx - \left(\frac{1}{\ln 3}\right)^2 = \ln 3 \cdot \int_0^{\infty} x^2 \cdot 3^{-x} dx - \frac{1}{\ln^2 3}.$$

Интеграл $\int_0^{\infty} x^2 \cdot 3^{-x} dx$, разрешенный с помощью правила интегрирования по частям (примененного дважды), дает следующий результат:

$$\int_0^{\infty} x^2 3^{-x} dx = -\int_0^{\infty} x^2 d\left(\frac{3^{-x}}{\ln 3}\right) = -\left(\left.\frac{x^2 3^{-x}}{\ln 3}\right|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{3^{-x}}{\ln 3} dx^2\right) =$$

$$= \frac{2}{\ln 3} \cdot \int_0^{\infty} 3^{-x} x\, dx = \frac{2}{\ln 3} \cdot \frac{1}{\ln^2 3} = \frac{2}{\ln^3 3}.$$

Откуда $D_X = \frac{2}{\ln^3 3} - \frac{1}{\ln^2 3} = \frac{2 - \ln 3}{\ln^3 3} = D_Y$.

4. Для расчета корреляционного момента используем формулу:

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f(x,y) dx\, dy - m_X m_Y =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xy \cdot \ln^2 3 \cdot 3^{-x-y} dx\, dy - \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{\ln 3} = \ln^2 3 \cdot \int_0^{\infty} x 3^{-x} dx \cdot \int_0^{\infty} y 3^{-y} dy - \frac{1}{\ln^2 3} =$$

$$= \ln^2 3 \cdot \frac{1}{\ln^2 3} \cdot \frac{1}{\ln^2 3} - \frac{1}{\ln^2 3} = 0.$$

Откуда, очевидно, равен нулю и коэффициент корреляции:

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{0}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = 0.$$

Заметим, что так, как данные случайные величины X и Y независимы, то имеет место равенство:

$$F(x,y)=\ln^2 3\cdot 3^{-x-y}=\left(\ln 3\cdot 3^{-x}\right)\cdot\left(\ln 3\cdot 3^{-y}\right)=F_1(x)\cdot F_2(y)\ ,$$

то во всех двойных интегралах использовалась возможность разбиения их на произведение интегралов по каждой переменной в отдельности.

Пример 7.2. Дана система дискретных случайных величин (X,Y), заданная своей таблицей распределения.

Y X	**1**	**2**
-1	0,15	0,05
0	0,3	0,05
1	0,35	0,1

Найти: 1) Таблицы распределения составляющих; 2) $m_X,\quad m_Y$; 3) $D_X,\quad D_Y,\quad \sigma_X,\quad \sigma_Y$; 4) $K_{XY},\quad r_{XY}$.

Решение.

1. Найти таблицу распределения одномерной случайной величины (составляющей), значит перечислить все ее возможные значения и указать вероятности, с которыми эти значения принимаются.

Так случайная величина X принимает значения $x_1=-1,\quad x_2=0,\quad x_3=1$. Так как событие X= –1 происходит только совместно с событием $Y=y_1=1$ или с событием $Y=y_2=2$, которые, в свою очередь, являются несовместными, то

$$P\left(X=-1\right)=P\left\{\left(X=-1\right)\cdot\left(\left(Y=1\right)+\left(Y=2\right)\right)\right\}=$$

$$=P\left(X=-1,Y=1\right)+P\left(X=-1,Y=2\right)=0{,}15+0{,}05=0{,}2\ .$$

Аналогично

$$P\left(X=0\right)=P\left\{\left(X=0\right)\cdot\left(\left(Y=1\right)+\left(Y=2\right)\right)\right\}=$$

$$=P\left(X=0,Y=1\right)+P\left(X=0,Y=2\right)=0{,}3+0{,}05=0{,}35\ .$$

$$P\left(X=1\right)=P\left\{\left(X=1\right)\cdot\left(\left(Y=1\right)+\left(Y=2\right)\right)\right\}=$$

$$=P\left(X=1,Y=1\right)+P\left(X=1,Y=2\right)=0{,}35+0{,}1=0{,}45\ .$$

Тогда таблица распределения X имеет вид:

X	- 1	0	1

p	0,2	0,35	0,45

Проверим условие нормировки:

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = 0{,}2 + 0{,}35 + 0{,}45 = 1.$$

Рассуждая аналогично, получим закон распределения составляющей Y.

Y	1	2
p	0,8	0,2

$$\sum_{j=1}^{2} p_j = 0{,}8 + 0{,}2 = 1.$$

2. Чтобы найти математические ожидания составляющих, воспользуемся формулами:

$$m_X = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}35 + 1 \cdot 0{,}45 = -0{,}2 + 0{,}45 = 0{,}25;$$

$$m_Y = \sum_{j=1}^{2} y_j p_j = 1 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}8 + 0{,}4 = 1{,}2.$$

3. Чтобы найти дисперсии составляющих, воспользуемся формулами:

$$D_X = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i - m_X^2 = (-1)^2 \cdot 0{,}2 + 0^2 \cdot 0{,}35 + 1^2 \cdot 0{,}45 - (0{,}25)^2 =$$

$$= 0{,}2 + 0{,}45 - 0{,}0625 = 0{,}5875.$$

Откуда $\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{0{,}5875} = 0{,}7665$.

$$D_Y = \sum_{j=1}^{2} y_j^2 p_j - m_Y^2 = 1^2 \cdot 0{,}8 + 2^2 \cdot 0{,}2 - (1{,}2)^2 = 0{,}8 + 0{,}8 - 1{,}44 = 0{,}16.$$

Откуда $\sigma_Y = \sqrt{D_Y} = \sqrt{0{,}16} = 0{,}4$.

4. Для нахождения корреляционного момента K_{XY} и коэффициента корреляции r_{XY} воспользуемся формулой:

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j p_{ij} - m_X m_Y =$$

$$= -1 \cdot 1 \cdot 0{,}15 + (-1) \cdot 2 \cdot 0{,}05 + 0 \cdot 1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 2 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}35 + 1 \cdot 2 \cdot 0{,}1 -$$

$$-0{,}25 \cdot 1{,}2 = -0{,}15 - 0{,}1 + 0{,}35 + 0{,}2 - 0{,}3 = 0.$$

Аналогично примеру 7.1, коэффициент корреляции r_{XY} так же оказывается равным нулю.

Условные законы распределения составляющих

Пусть составляющие X и Y дискретны и возможные значения X – x_i, где $i = 1, 2, ..., n$ и возможные значения Y – y_j, где $j = 1, 2, ..., m$. Обозначим за $p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$ и $p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$.

Здесь $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$.

Условным законом распределения составляющей X при условии, что $Y = y_j$, называют совокупность условных вероятностей:

$$p(x_1 / y_j) = \frac{p_{1j}}{p(y_j)};$$

$$p(x_2 / y_j) = \frac{p_{2j}}{p(y_j)};$$

$$\dots \dots \dots$$

$$p(x_n / y_j) = \frac{p_{nj}}{p(y_j)}.$$

Аналогично определяется условный закон распределения составляющей Y при условии, что $X = x_i$.

Пусть составляющие X и Y непрерывны, и $p(x, y)$ – их совместная плотность распределения. Тогда плотности распределения составляющих примут вид:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, dy, \quad h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\, dx.$$

Условной плотностью распределения составляющей X при заданном значении Y = y, называется функция вида:

$$\varphi(x / y) = \frac{p(x, y)}{h(y)}.$$

Аналогично, словной плотностью распределения составляющей Y при заданном значении X = x, называется функция вида:

$$\psi\left(y / x\right) = \frac{p(x, y)}{g(x)}\ .$$

Если условные законы распределения составляющих совпадают с их безусловными законами распределения, то составляющие являются независимыми.

Условные математические ожидания и условные дисперсии находятся по таким же формулам, как и безусловные. Достаточно заменить безусловные вероятности на условные, для дискретной величины, и безусловную плотность распределения на условную – для непрерывной.