Раздел 1. Теория вероятностей. Элементарные события. Событие и его частота.

Случайное событие – это факт, который может как произойти, так и не произойти при выполнении определенного комплекса условий.

Достоверным называется такое событие, которое обязательно произойдет в результате данного эксперимента.

Невозможным называется такое событие, которое никогда не произойдет в результате данного эксперимента.

Например, при бросании игральной кости, достоверное событие – выпадение числа очков в пределах от 1 до 6.

Невозможным будет событие, состоящее в появлении 5 тузов при извлечении 5 карт из колоды.

Несколько событий составляют **полную группу**, если в результате эксперимента обязательно произойдет хотя бы одно из этих событий.

Например, при бросании игральной кости может появиться более трех очков или менее пяти очков. Эти события составляют полную группу.

Два события называются **несовместными**, если происхождение одного из них исключает происхождение остальных в результате эксперимента.

Группа событий будет **группой несовместных событий**, если любые два события этой группы – несовместны.

Например, при извлечении двух карт из колоды могут произойти несовместные события: появление двух тузов, появление двух королей, появление двух десяток. Это группа несовместных событий.

События называют **равновозможными**, если условия, в которых ставится эксперимент, позволяют считать, что ни одно из событий не будет происходить чаще другого при многократном повторении испытания.

Пространство элементарных исходов эксперимента это множество Ω всех взаимоисключающих и более неделимых исходов эксперимента. Тогда случайные события – подмножества пространства элементарных исходов. Элементарные исходы, принадлежащие событию А называются **благоприятствующими исходами** для события А.

Суммой событий A и B называется событие A+B, которое происходит тогда и только тогда, когда произойдет хотя бы одно из этих событий, то есть или A, или B, или A и B одновременно.

Произведением событий A и B называется событие AB, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят события A и B одновременно.

Разностью событий A и B называется событие A–B, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит A, но не происходит B.

Событием, **противоположным** к A называется событие $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит.

Пример 1.1. При бросании игральной кости пространство элементарных исходов эксперимента – множество $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Здесь ω_i – элементарный исход, состоящий в том, что выпало i очков. Тогда, событие $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ – выпало нечетное число очков; событие $B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$; событие $C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ – выпало не более трех очков.

Тогда суммой событии A и B будет событие $A + B = A \cup B = =\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. – выпало некоторое число очков от одного до шести. Это событие, очевидно, достоверное. Суммой событий A и C будет событие $A + C = A \cup C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5\}$ – не выпало ни четырех, ни шести очков.

Произведением событий A и B будет событие $AB = A \cap B = \varnothing$. Это событие невозможное. Произведением событий B и C будет событие $BC = B \cap C = \{\omega_2\}$ – выпало два очка.

Разностью событий A и B будет событие $A - C = \{\omega_5\}$.

Событием, противоположным к A будет событие $\overline{A} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, то есть событие B. Противоположным к событию C будет событие $\overline{C} = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$– выпало более трех очков.

Элементы комбинаторики

Комбинаторика – ветвь математики, изучающая комбинации и перестановки предметов, общие законы комбинирования и образования различных конфигураций объектов возникла в XVII в.

С задачами, в которых приходится выбирать те или иные предметы, располагать их в определенном порядке и отыскивать среди расположений наилучшие люди столкнулись еще в доисторическую эпоху, выбирая наилучшие расположения охотников во время охоты, воинов во время битвы, инструментов во время работы. Определенным образом располагались украшения на одежде, узоры на керамике, перья в оперении стрелы. По мере усложнения производственных и общественных отношений все шире приходилось пользоваться общими понятиями о порядке, иерархии, группировании. В том же направлении действовало развитие ремесел и торговли.

В первом приближении можно сказать, что комбинаторика изучает способы выборки и расположения предметов, свойства различных конфигураций, которые можно образовать из элементов, причем элементами могут быть числа, точки, отрезки, шахматные фигуры и т. д. Характерной чертой комбинаторных задач является то, что в них речь идет всегда о конечном множестве элементов. Чтобы устранить влияние конкретного вида выбираемых и располагаемых предметов, надо воспользоваться общим языком теории множеств, говорить о множествах и их подмножествах (частях), об объединении нескольких множеств и их пересечении (образовании общей части).

Правило суммы

Пример 1.2. Если множество А состоит из букв (элементов) $\{$ а, б, в, г, д, е $\}$, а множество $B = \{$ г, д, е, ж, з, $\}$, то их пересечение $A \bigcap B = \{$ г, д, е $\}$.Тогда, количество элементов их объединения найдется по правилу суммы:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 6 + 5 - 3 = 11 - 3 = 8. \qquad (1)$$

Для трех множеств правило имеет вид:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \qquad (2)$$

По правилу суммы легко найти элементы некоторого множества U, не принадлежащие ни одному из подмножеств $A_1, A_2, ...A_m$ этого множества. Сначала надо найти количество элементов в объединении $A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_m$, а затем вычесть это число из числа элементов U.

Пример 1.3.

В классе обучаются 42 ученика. Из них 16 участвуют в секции по легкой атлетике, 24– в футбольной секции, 15 – в шахматной секции, 11 – и в секции легкой атлетики и в футбольной секции, 8 – в легкоатлетической и шахматной, 12 – в футбольной и шахматной, 6 – во всех трех секциях. Остальные увлекаются только туризмом. Сколько школьников являются туристами?

Решение. Обозначим через U множество всех учащихся, через A – членов легкоатлетической секции, B – футбольной, C – шахматной, D – туристической. По условию задачи имеем:

$$U = A \bigcup B \bigcup C \bigcup D,$$

причем

$$D \bigcap (A \bigcup B \bigcup C) = \varnothing$$

и

$|U| = 42,\ |A| = 16,\ |B| = 24,\ |C| = 15,\ |A \cap B| = 11,\ |A \cap C| = 8,$
$|B \cap C| = 12,\ |A \cap B \cap C| = 6.$

Тогда по формуле (2) получаем, что

$$|A \cap B \cap C| = 16 + 24 + 15 - 11 - 8 - 12 + 6 = 30,$$

и потому

$$|D| = |U| - |A \cup B \cup C| = 42 - 30 = 12.$$

Таким образом, туризмом занимаются 12 школьников.

Правило произведения

Пусть имеем несколько конечных множеств $X_1, X_2, \ldots, X_k$, причем $|X_1| = n_1,\ |X_2| = n_2,\ \ldots, |X_k| = n_k$.

По теореме о мощности прямого произведения множеств, число векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, которые можно составить из элементов данных множеств, равно $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$, так как

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_k| = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k.$$

Полученный результат – один из важнейших в комбинаторике. Есть лишь одна тонкость. Иногда множество X_2 бывает не задано, а определяется после выбора x_1, а множество X_3 определяется после выбора элементов x_1 и x_2 и т. д. Но при этом, как бы мы ни выбирали x_1, выбор элемента x_2 возможен n_2 способами; при любом выборе

x_1 и x_2 на третье место имеется некоторое число n_3 претендентов и т. д. И в этом случае ответ получится тот же самый:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k .$$

Пример 1.4. Сколько восьмизначных чисел можно построить из цифр (символов) (0, 1, 2 . . . 9), так чтобы цифры не повторялись?

Так как речь идет именно о восьмизначном числе, а не о последовательности из 8 знаков, то, следовательно, 1-ая цифра не может быть нулем.

Тогда множество X_1 – кандидатов на 1-ое место содержит 9 элементов (1, 2, 3, . . . , 9);

после выбора первой цифры множество X_2 содержит снова 9 элементов – те цифры, которые не равны первой;

если первая цифра 1, то (0, 2, 3, 4 . . . 9);

2, то (0, 1, 3, 4 . . . 9);

3, то (0, 1, 2, 4 . . . 9) . . .

Множество X_3 после выбора x_1 и x_2 содержит 8 элементов – те цифры, которые не равны x_1 и x_2.

Ответом является число $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.

Размещения без повторений

Решим задачу: имеется множество X, состоящее из n элементов (n-множество). Сколько векторов размерности k можно составить из элементов этого множества, если координаты вектора должны быть различными (не должны повторяться)?

Число размещений без повторений из n по k – это число способов, сколькими можно из n различных элементов построить векторов с k различными координатами.

Число размещений без повторений находится по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Будем рассуждать так: на первое место – имеем n претендентов. После того, как оно заполнено, на второе остается n–1 претендент, на третье – (n–2) претендента и т. д.

На k-ое место имеется n – (k – 1) кандидат (т. к. после того, как из m предложенных элементов уже выбрали k – 1, то остался n – (k – 1) = n – k + 1 претендент на k-ое место). Применяя правило произведения, находим:

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)).$$

Умножив числитель и знаменатель на (n–k) . . . $3\cdot 2\cdot 1$, получим окончательный вид формулы:

$$A_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-(k+1))\cdot(n-(k+2))\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример 1.5. Сколько слов длины 4 можно составить из 33 букв русского алфавита, при условии, что все буквы различны. В результате:

$$A_{33}^4 = \frac{33!}{(33-4)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 29\cdot 30\cdot 31\cdot 32\cdot 33}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 27\cdot 28\cdot 29} = 30\cdot 31\cdot 32\cdot 33.$$

Размещения с повторениями

Множества $X_1, X_2, \ldots, X_k$, из элементов, из которых составляются вектора, в правиле произведения могут иметь общие элементы. В частности, все они могут совпадать с одним и тем же множеством X, содержащим n элементов.

Число размещений с повторениями из n по k – это число способов, сколькими можно из n различных элементов построить векторов с k координатами, среди которых могут быть одинаковыми.

Число размещений с повторениями находится по формуле:

$$B_n^k = n^k.$$

Докажем формулу. Из правила произведения вытекает следующее:

$$B_n^k = n^k = \underbrace{|X|\cdot|X|\cdot\ldots\cdot|X|}_{k\ \text{раз}}$$

Пример 1.6. Сколько слов длины 6 можно составить из 26 букв английского алфавита?

$$B_{26}{}^6 = 26^6.$$

Перестановки без повторений

Решим задачу: сколькими способами можно переставить между собой (поменять местами) n элементов множества X?

Число перестановок без повторений из n элементов – это число способов, сколькими можно расположить на n различных местах n различных элементов.

Число перестановок без повторений находится по формуле:

$$P_n = n!.$$

Она легко получается из формулы для размещений без повторений при условии, что размерность создаваемых векторов k равна количеству элементов всего n – множества :

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!}.$$

0! по определению равен 1.

Пример 1.7. Сколько существует различных способов расположения 5 различных человек на 5 стульях?

$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$

Сочетания без повторений

Решим задачу: сколькими способами из множества X (причем $|X| = n$), можно составить всевозможные подмножества по k элементов каждое?

Число сочетаний без повторений из n по k – это число способов, сколькими можно из n различных элементов выбрать k штук без учета порядка.

Число сочетаний без повторений находится по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Докажем формулу. Если бы мы искали число упорядоченных k - подмножеств без повторений, составленных из множества X в n элементов, то оно было бы равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Но нас не интересует порядок элементов, выбранный в вектор длины k, а интересует лишь состав. Тогда среди A_n^k различных векторов k! штук имеют одинаковые компоненты и отличаются лишь их порядком. Таким образом, сочетаний будет в k! раз меньше, чем размещений:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Число сочетаний без повторений C_n^k обладает следующими свойствами:

$$1)\ C_n^0 = 1; \qquad 2)\ C_n^n = 1;$$

$$3)\ C_n^1 = n; \qquad 4)\ C_n^{n-1} = n;$$

$$5)\ C_n^k = C_n^{n-k};$$

$$6)\ C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2};$$

$$7)\ C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

Пример 1.8. Из 1, 2, 3, 4 упорядоченных пар можно составить $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 3 \cdot 4 = 12$.

12	13	14	23	24	34
21	31	41	32	42	43

При таком расположении заметно, что эти пары можно составить, выбрав сначала в пару какие-то 2 элемента, а затем составить все возможные векторы, переставив данный состав 2! различными способами. Значит, если считать пары, отличающиеся только составом, то их будет в 2! раз меньше, чем A_4^2.

Пример 1.9. Сколько существует различных способов заполнения карточек “Спортлото” 6 из 49? Нам надо выбрать неупорядоченные подмножества размерности $k = 6$ из множества X, n= 49.

$$C_{49}^6 = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{6! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 42 \cdot 43} =$$

$$= \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13983816.$$

2. Вероятность. Вероятностное пространство.

Если пространство элементарных исходов Ω конечно и его исходы равновозможны, то вероятность события *A* находится как отношение числа благоприятствующих этому событию исходов **m** к общему числу всех исходов эксперимента **n**, то есть:

$$P(A) = \frac{m}{n} .$$

Геометрическое определение вероятности

Геометрическая вероятность используется в случае, когда число равновозможных исходов бесконечно. Геометрической вероятностью, характеризующей вероятность появления случайной точки внутри некоторой области A, называется отношение размера (меры) этой области к размеру всей области Ω, в которой может появляться данная точка

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} ,$$

где $P(A)$ – вероятность попадания случайной точки в область A.

Пример 2.1. Выпущено 100 лотерейных билетов, причем установлены призы, из которых 8 по 1 руб., 2- по 5 руб. и 1-10 руб. Найти вероятность того, что купленный билет выиграл: а) 5 рублей; б) не более 5 рублей.

Решение: а) Для определения искомой вероятности используем формулу классического определения вероятности $P(A) = \frac{m}{n}$. Определим общее число исходов n. Оно равно числу выпущенных билетов-100. Определим благоприятное число исходов m. Оно равно числу лотерейных билетов с выигрышем в 5 рублей, т.е. 2. Тогда искомая вероятность равна: $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{100}$=0,02.

б) Условие выигрыш “не более 5 рублей” означает, что купленный билет должен иметь либо выигрыш, равный 1 рублю (таких билетов 8), либо выигрыш, равный 5 рублям (таких билетов

2). В данном случае общее число исходов, как и в пункте а) равно 100, а число благоприятных исходов равно 10=8+2. Тогда искомая вероятность равна: $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{10}{100}$=0,1.

Пример 2.2. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.

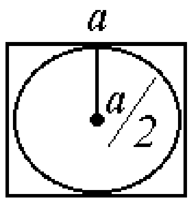
Решение. Для решения указанной задачи воспользуемся классическим определением вероятности $P(A)=\frac{m}{n}$, где *A* – событие, состоящее в том , что отобраны по табельным номерам три женщины и четверо мужчин; m – число исходов, благоприятствующих появлению событию А; n – общее число исходов. Общее число возможных исходов испытания равно числу способов, которыми можно отобрать семь человек из десяти. Число способов определяется по выражению: $n=C_{10}^{7}$.

Число исходов, благоприятствующих появлению события А, определяется числом способов, которым можно отобрать трех женщин из четырех, т.е. C_4^3 и четырех мужчин из шести, т.е. C_6^4. Следовательно, число исходов, благоприятствующих появлению события А: m=$C_4^3\cdot C_6^4$.

Искомая вероятность:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_4^3\cdot C_6^4}{C_{10}^7}=\frac{60}{120}=0{,}5.$$

Пример 2.3. В квадрат со сторонами, равными **a,** наудачу бросается точка. Определить вероятность того, что точка попадет внутрь вписанного в квадрат круга.



Данная задача решается с использованием формулы геометрического определения вероятности. Мерой пространства элементарных событий Ω является площадь квадрата $S_{кв}=a^2$. Площадь круга

- мера события А. $S_{кр} = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$. Тогда искомая вероятность будет определяться по формуле $P(A) = \frac{S_{кр}}{S_{кв}} = \frac{\pi a^2}{4a^2} = \frac{\pi}{4}$.

Условная вероятность

Условной вероятностью события А при условии В называется вероятность $P(A/B)$, вычисленная при условии, что событие В уже произошло и, тем самым, изменило ход эксперимента. Формула для нахождения условной вероятности имеет вид:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

События называются **зависимыми**, если происхождение или не происхождение одного из них изменяет вероятности другого.

События называются **независимыми**, если происхождение или не происхождение одного из них не изменяет вероятности другого.

Для независимых событий А и В справедливы равенства:

$$P(A) = P(A/B) = P(A/\bar{B});$$

$$P(B) = P(B/A) = P(B/\bar{A}).$$

Теорема умножения зависимых событий

$$P(AB)=P(A)P(B/A),$$

где $P(B/A)$ вероятность наступления события В при условии, что произошло событие А, где А и В – зависимые события.

Следствие.

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1A_2) \cdot ... \cdot P(A_n/A_1A_2...A_{n-1})$$

,

где A_1, A_2,..., A_n – зависимые события.

Теорема умножения независимых событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

где А и В независимые события.

Следствие.

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot ... \cdot P(A_n),$$

где A_i, i=1,...,n – независимые в совокупности события.

Теорема сложения вероятностей совместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

где A и B – совместные события.

Теорема сложения несовместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B),$$

где A, B – несовместные события.

Следствие 1. $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, где A_i, $i=1, ..., n$ – попарно-несовместные события.

Следствие 2. Если $A_1, A_2, ..., A_n$ полная группа событий, то

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1.$$

Следствие 3. Если A и $\overline{A}$ противоположные события, то

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Следствие (из теорем сложения и умножения). Вероятность появления хотя бы одного из событий A_i, $i=1, ..., n$, независимых в совокупности

$$P(A)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)\cdot ...\cdot P(\overline{A}_n) \quad .$$

Если $P(\overline{A}_i)=q$, то $P(A)=1-q^n$.

Пример 3.1. В читальном зале имеется 6 учебников по теории вероятностей, из которых три в переплете. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в переплете.

Решение. Рассмотрим следующие события:

A_1- первый взятый учебник в переплете;

A_2- второй взятый учебник в переплете.

Событие, состоящее в том, что оба взятых учебника в переплете $A=A_1\cdot A_2$. События A_1 и A_2 являются зависимыми, так как вероятность наступления события A_2 зависит от наступления события A_1. Для решения указанной задачи воспользуемся теоремой умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1).$$

Вероятность наступления события A_1 в соответствии с классическим определением вероятности:

$$P(A_1) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0,5.$$

Вероятность наступления события A_2 определяется условной вероятностью наступления события A_2 при условии наступления события A_1, т.е.

$$P(A_2 / A_1) = \frac{2}{5} = 0,4 .$$

Тогда искомая вероятность наступления события:

$$P(A)=0,5 \cdot 0,4=0,2 .$$

Пример 3.2. Два стрелка делают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания первого стрелка равна 0,9; второго – 0,8. Найти вероятность того, что:

а) в мишень попадет только один стрелок;

б) мишень будет поражена.

Решение:

а) Пусть событие A – в мишень попадет только один стрелок. Введем события: A_1 – в мишень попадет первый стрелок; A_2 – в мишень попадет второй стрелок. Согласно условию: $P(A_1) = 0,9$; $P(A_2) = 0,8$.

Заметим, что событие A означает следующее: в мишень попадет только первый стрелок (то есть первый попадет и второй не попадет) или в мишень попадет только второй стрелок (то есть второй попадет и первый не попадет). Тогда $A = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$. События $A_1\overline{A}_2$ и $\overline{A}_1 A_2$ несовместны, так как имеют множители, являющиеся противоположными событиями. Значит, к ним применима теорема сложения вероятностей для несовместных событий. События A_1 и A_2 независимы, значит, наступление A_1 не изменяет вероятности A_2. Из этого следует, что и не наступление A_1 (то есть наступление $\overline{A}_1$) не меняет вероятности A_2. Значит, независимы A_1 и $\overline{A}_2$, $\overline{A}_1$ и A_2, и к этим парам событий применима теорема умножения независимых событий. Учитывая, что $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, имеем:

$$P(A) = P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2) = P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 A_2) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) = 0,9 \cdot (1-0,8) + (1-0,9) \cdot 0,8 =$$
$$= 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,18 + 0,08 = 0,26.$$

б) Пусть событие В – мишень будет поражена. Это произойдет, если в мишень попадет хотя бы один стрелок: или только первый, или только второй, или оба (и первый, и второй). Значит $B = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2 + A_1A_2$. Рассуждая аналогично пункту а), имеем:

$$P(A) = P(A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2 + A_1A_2) = P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1A_2) + P(A_1A_2)$$
$$= 0{,}9\cdot(1-0{,}8)+(1-0{,}9)\cdot 0{,}8+0{,}9\cdot 0{,}8 = 0{,}9\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}8+0{,}9\cdot 0{,}8 =$$
$$= 0{,}18+0{,}08+0{,}72 = 0{,}98.$$

Найти вероятность события В можно, используя теорему сложения совместных событий A_1 и A_2. Согласно определению суммы событий $B = A_1 + A_2$.

$$P(B) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) =$$
$$= 0{,}9 + 0{,}8 - 0{,}9\cdot 0{,}8 = 1{,}7 - 0{,}72 = 0{,}98.$$

Найти вероятность события В можно, используя подход “от противного”. Событием, противоположным к В, является событие $\overline{B}$ - ни один стрелок не попадет в мишень. Тогда имеем:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) = 1 - (1-0{,}9)(1-0{,}8) =$$
$$= 1 - 0{,}1\cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$$

Формула полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i),$$

где $H_1, H_2, ..., H_n$ – группа гипотез о происхождении события А. Они составляют полную группу несовместных событий.

Формула Байеса

$$P(H_j/A) = \frac{P(H_j)\cdot P(A/H_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)},.$$

Формула используется для пересчета априорных (первоначальных) вероятностей гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$ при условии, что событие А уже произошло.

Пример 4.1. Имеется три урны с различным составом шаров в каждой. В первой – 5 белых и 5 черных, во второй – 3 белых и 3 черных, в третьей – 2 белых и 4 черных. Из случайно выбранной урны извлекается шар. Он оказался белым. Определить вероятность того, что он вынут из третьей урны.

Решение. Введем обозначения для рассматриваемых событий.

Пусть А – извлечен белый шар. Гипотезами будут события:

H_1 – выбрана первая урна;

H_2 – выбрана вторая урна;

H_3 – выбрана третья урна.

$P(A/H_1)$ – вероятность извлечения белого шара из первой урны.

$P(A/H_2)$ – вероятность извлечения белого шара из второй урны.

$P(A/H_3)$ – вероятность извлечения белого шара из третьей урны.

Определим вероятности, соответствующие этим событиям. Так как все урны одинаковы, то

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}.$$

$$P(A/H_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad P(A/H_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(A/H_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Тогда, используя формулу полной вероятности, получим:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i), = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

Пересчитаем вероятность третьей гипотезы с условием, что произошло рассматриваемое событие, используя формулу Байеса.

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A/H_3)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)} = \frac{1/3 \cdot 1/3}{4/9} = \frac{1}{4}.$$